UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON
E. SCHMIDT
BERLIN
UND
I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON
K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:
W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON H. WEYL

38. BAND

QA1
M88
v.38

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1934

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON
E. SCHMIDT
BERLIN
UND
I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON
K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:
W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON H. WEYL

38. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1934

66 53128

QA1
M88
V. 38

Inhaltsverzeichnis

Seite

Leon Lichtenstein †

Aumann, G., Über den Differential- und Differenzenquotient von regulären analytischen Funktionen, insbesondere von Polynomen 70

Baer, R., Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen 375

Bohr, H., Anwendung einer Landauschen Beweismethode auf den Kroneckerschen Approximationssatz. (Auszug aus einem Briefe an Professor Landau) . . . 312

Boldt, H., Raumgeometrie und Spiegelungslehre 104

Cauer, W., Ein Interpolationsproblem mit Funktionen mit positivem Realteil 1

Chowla, S., On the k-analogue of a result in the theory of the Riemann zeta function 483

Estermann, Th., Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchyschen Integralsatz“ 641

Ganapathi, P., The vector-regions of convex closed bodies 488

Ganapathi, P., A note on the oval 490

Ganapathi, P., On a certain class of ovals 687

Ganapathi, P., The Isoperimetric Deficit of a Convex Closed Curve 691

Haack, W., Eine geometrische Deutung der Affin-Invarianten einer Raumkurve 155

Haviland, E. K., A Note on the Extremal Surfaces in the Calculus of Variations 465

Heuser, P., Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen 777

Hlavatý, V., Über eine Art der Punktkonnexion 135

Hlavatý, V., Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen 283

Hölder, O., Verallgemeinerung einer Dirichletschen Summenumformung 476

Jacobsthal, E., Über eine besondere Klasse rekurrierend definierter Zahlfolgen und ihr Konvergenzverhalten. Herrn Richard Fuchs zum 60. Geburtstage gewidmet 633

Jarník, V., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Maßbegriffes 217

Karamata, J., Weiterführung der N. Wienerschen Methode 701

Knothe, H., Zur differentiellen Liniengeometrie einer zwölfgliedrigen Gruppe 45

Levin, V., Ein Beitrag zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen . . 306

Levin, V., Über die Koeffizientensummen einiger Klassen von Potenzreihen . . 565

Löwner, K., Über monotone Matrixfunktionen 177

Marshak, S., Zwei Bemerkungen über stark summierbare unendliche Reihen 96

Maruhn, K., Über einige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, auf deren Oberflächen singuläre Punkte liegen 747

Müntz, Ch. H., Zum dynamischen Wärmeleitungsproblem 323

Seite

Oberseider, H., Über das Minimum positiver Hermitescher Formen 591

Oppenheim, A., The minima of positive definite Hermitian binary quadratic forms 538

Oseen, C. W., Über Beziehungen zwischen Potentialtheorie und Liniengeometrie 709

Ostrowski, A., Bemerkung zu meiner Abhandlung: Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes. [Diese Zeitschrift **24** (1925)] 642

Ostrowski, A., Bemerkung zur vorstehenden Note von Herrn S. Warschawski (S. 669) 684

Piel, M., Eine Begründung der Resultantentheorie durch einen elementaren Beweis der Cayleyschen Konstruktion 650

Pollaczek, F., Über das Warteproblem 492

Poprougénko, G., Le principe de Dirichlet et les ensembles (A) 146

Sauer, R., Krümmungsfeste Kurven bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung 468

Schauder, J., Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . 257

Schiffer, M., Ein neuer Beweis des Endlichkeitssatzes für Orthogonalinvarianten 315

Schoenberg, I. J., Zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen 546

Steßmann, B., Periodische Minimalflächen 417

Suschkewitsch, A., Über den Zusammenhang der Rauterschen Übergruppe mit den gewöhnlichen Gruppen 643

Turkin, W. K., Eine neue Anwendung der Darstellung einer endlichen Gruppe als monomiale Matrizengruppe 301

Urban, H., Zur affinen Differentialgeometrie zweier komplexer Veränderlicher: Flächen im vierdimensionalen Raume 338

Vakselj, A., Beiträge zur Flächentheorie 443

Walsh, J. L., On Approximation to an Analytic Function by Rational Functions of Best Approximation 163

Warschawski, St., Bemerkung zu meiner Arbeit: Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung 669

Wintner, A., Über die automorphen Transformationen beschränkter nicht-singulärer hermitescher Formen 695

Wright, E. M., Proportionality conditions in Waring's problem 730

Leon Lichtenstein †

Am 21. August dieses Jahres ist Leon Lichtenstein, der hervorragende Gelehrte, der Begründer und Herausgeber der mathematischen Zeitschrift, im Alter von 55 Jahren nach kurzem Leiden einem Herzschlag erlegen. Die Wissenschaft hat einen schmerzlichen Verlust zu beklagen, die Zeitschrift hat einen schweren Schlag erlitten. Alle, die dem Dahingegangenen nahestanden, trauern einem edelgesinnten Menschen nach.

Es ist hier nicht die Stelle, die bedeutenden Leistungen Lichtensteins auf den verschiedensten Gebieten der Analysis ausführlich zu würdigen. Um seine seltene Vielseitigkeit zu beleuchten, sei nur erwähnt, daß die Funktionentheorie, die Potentialtheorie und die Variationsrechnung ihm ebenso wesentliche Fortschritte verdanken wie die Hydrodynamik und die Theorie der Differential- und Integralgleichungen. In neuerer Zeit haben seine Untersuchungen zur Hydrodynamik eine besonders starke Wirkung ausgeübt. Sie führten zur Herstellung neuartiger Verbindungswege zwischen Mathematik und Astronomie. Ein Hauptmerkmal seiner Arbeiten ist strengste Selbstkritik und unermüdliche Hartnäckigkeit im Weiterverfolgen der in Angriff genommenen Probleme. Überall tritt ein meisterhaftes Beherrschen aller modernen Hilfsmittel der Analysis und Mengenlehre hervor.

Während seines ganzen Lebens war Lichtenstein von einem außerordentlich stark entwickelten Arbeitswillen erfüllt. Es war ihm ein Bedürfnis, seine Tatkraft und sein hervorragendes Organisationstalent in den Dienst immer neuer wissenschaftlicher Aufgaben zu stellen. Diese Eigenschaften, die ihn befähigt haben,

in schweren Jahren neben der Herausgabe der Zeitschrift den Umbau und die Weiterführung des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik mit schönstem Erfolg zu übernehmen, hätten noch nicht ausgereicht, ihn zu dem wissenschaftlichen Redakteur großen Stils zu machen, der er für diese Zeitschrift geworden ist. Nur einem Gelehrten von hohem Rang mit weitverzweigten Beziehungen zu den Fachgenossen im In- und Ausland, der ein bewundernswert reiches Wissen mit nie versagendem Instinkt in der Beurteilung mathematischer Leistungen verband, konnte es gelingen, im Laufe von 15 Jahren ein wissenschaftliches Organ zu schaffen, das in der stattlichen Reihe der von ihm herausgegebenen 37 Bände den ganzen Reichtum der mathematischen Forschungsarbeit unserer Zeit widerspiegelt. Zu den Zierden dieser Bände gehören Lichtensteins zahlreiche eigene Beiträge.

Wir werden das Andenken des uns zu früh Entrissenen stets in Ehren halten.

Die Schriftleitung.

Ein Interpolationsproblem mit Funktionen mit positivem Realteil.

Von

W. Cauer in Göttingen.

§ 1.

Einleitung und Problemstellung.

Die heute in der Elektrotechnik, besonders in der Fernmeldetechnik, eine zentrale Rolle einnehmenden Aufgaben, Schaltungen mit vorgeschriebenen Einschwingvorgängen oder vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit zu konstruieren, führen auf eine Klasse analytischer Funktionen, die kurz als *positiv* bezeichnet werden sollen und die folgendermaßen charakterisiert werden: *Regulär in der rechten λ-Halbebene mit positiv reellem Teil dort und reell auf der reellen Achse.* Die „Positivheit" derjenigen Funktionen der Frequenz, die als Charakteristiken von Zweipolen oder Wechselstromwiderständen, als Charakteristiken von Vierpolen usw. auftreten, bedingt ihre physikalische Realisierbarkeit durch positive Schaltelemente. Wie kürzlich ausgeführt wurde[1]), treten als mathematische Teilaufgaben bei der Untersuchung der genannten Fragen der Schaltungstechnik gewisse Interpolationsprobleme oder Approximationsprobleme auf. Es sollen numerisch oder graphisch oder durch gewisse ideale Forderungen gegebene Funktionen (Matrizen) durch positive rationale Funktionen (allgemeiner Matrizen[1])) approximiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird ein solches Interpolationsproblem gelöst, bei dem „ideale Forderungen" vorgeschrieben sind. Es ist das Problem der symmetrischen vierpoligen Siebschaltungen. Vierpolige Schaltungen sollen entworfen werden, die in gewissen vorgeschriebenen Frequenzintervallen (Intervallen der imaginären λ-Achse) nahezu verschwindende Betriebsdämpfung, in den komple-

[1]) W. Cauer, Math. Annalen 106, S. 369—394.

mentären Frequenzintervallen aber praktisch unendlich große Dämpfung haben[2], [2a]).

Das mathematisch Besondere des hier behandelten Interpolationsproblems der symmetrischen vierpoligen Siebschaltungen liegt wie bei allen analogen Problemen der Schaltungstechnik darin, daß die interpolierenden Funktionen nicht wie gewöhnlich ganze rationale, sondern positive gebrochene rationale Funktionen sind. Für unser Problem darf man sich ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit auf solche positive rationale Funktionen beschränken, die auf der imaginären λ-Achse (bis auf Pole) rein imaginär sind (Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$[1])). Die mathematische Fragestellung lautet dann in schon reduzierter Form[3]):

Es sollen zwei rationale Funktionen $z_1(\lambda)$ und $z_2(\lambda)$ der Klasse $\mathfrak{C}$ so bestimmt werden, daß die idealen Forderungen

$$z_1 z_2 = 1 \tag{1}$$

in endlich vielen vorgeschriebenen Intervallen der positiv imaginären λ-Achse (D-Intervallen) und

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 \tag{2}$$

in den komplementären Intervallen (S-Intervallen) approximativ erfüllt werden [3a]).

Weil z_1 und z_2 Funktionen mit reellen Koeffizienten sind, sind die idealen Forderungen, wenn sie in einem Intervall der positiv-imaginären λ-Achse approximativ erfüllt sind, zugleich im konjugiert komplexen Intervall approximativ erfüllt.

Folgende Sonderfälle sind praktisch besonders wichtig:

1. „TP“ [3b]): Ein D-Intervall $0 < \omega < \omega_1$ $(\lambda = i\omega)$ und ein S-Intervall $\omega_1 < \omega < \infty$;

---

[2]) Die physikalisch-technische Seite des Problems wurde behandelt von W. Cauer in „Die Siebschaltungen der Fernmeldetechnik“, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **10** (1930), S. 425—433; „Siebschaltungen“, VDI-Verlag 1931 (Sammlung von Tabellen und Kurven zum praktischen Entwurf von Siebschaltungen); „New Theory and Design of Wave Filters“, Physics, Vol. 2, No. 4, pp. 242—268, April 1932. Siehe auch die Arbeit von E. Glowatzki, „Entwurf und Beispiele symmetrischer Siebschaltungen nach der Methode von W. Cauer“, ENT **10** (1933), S. 377—386 und S. 404—415.

[2a]) Von ähnlichen noch zu lösenden Approximationsproblemen ist das vielleicht mathematisch interessanteste das der elektrischen Weiche.

[3]) Vgl. l. c. [1]), § 6.

[3a]) Die ideale Forderung (1) bedeutet ungedämpftes Durchlassen, die ideale Forderung (2) bedeutet unendlich große Dämpfung der Siebschaltung.

[3b]) Die Bezeichnungen „NDF“, „HDF“, „BDF“ und „BSF“ der „Siebschaltungen“, VDI-Verlag 1931, sind hier bzw. durch „TP“, „HP“, „BP“ und „BS“ ersetzt (Elektrotechnisch: Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß und Bandsperre).

2. „HP“: Ein D-Intervall $\omega_1 < \omega < \infty$ und ein S-Intervall $0 < \omega < \omega_1$;
3. „BP“: Ein D-Intervall $\omega_{-1} < \omega < \omega_1$ und zwei S-Intervalle $0 < \omega < \omega_{-1}$, $\omega_1 < \omega < \infty$;
4. „BS“: Zwei D-Intervalle $0 < \omega < \omega_{-1}$, $\omega_1 < \omega < \infty$ und ein S-Intervall $\omega_{-1} < \omega < \omega_1$.

Da mit z auch $1/z$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{C}$ ist, sind die Forderungen (1) und (2) gleicher Art. Es besteht also mathematisch kein Unterschied zwischen den Interpolationsproblemen zweier komplementärer Fälle wie TP und HP. Es vertauschen einfach $z_1 z_2$ und z_1/z_2 oder z_2 und $1/z_2$ ihre Rollen.

Exakt lassen sich die Forderungen (1) und (2) nicht zugleich erfüllen, da aus (2) z. B. $z_1 \equiv z_2$ folgen würde. Die Approximationsaufgabe ist jedoch bei beliebig vorgeschriebenen D- und S-Intervallen stets in dem Sinne lösbar, daß die Approximation beliebig gut gemacht werden kann in jedem Teilintervall der gegebenen Intervalle, wobei die Enden eines Teilintervalls innere Punkte des betreffenden vorgeschriebenen Intervalls sind, die den Enden dieses Intervalls beliebig nahe gewählt werden dürfen. Handelt es sich z. B. um ein TP, so lassen sich die Forderungen

(1a) $$|\ln(z_1 z_2)| < \varepsilon_1$$

für $\omega < \omega_x$, wo $\omega_1 - \omega_x = \delta_1 > 0$ und zugleich

(2a) $$\left|\ln \frac{z_1}{z_2}\right| < \varepsilon_2$$

für $\omega > \omega_k$, wo $\omega_k - \omega_1 = \delta_2 > 0$, bei beliebig kleinen vorgegebenen $\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ durch Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$ erfüllen.

In § 2 wird gezeigt, daß auf Grund der charakteristischen Gestalt der Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$ und der Forderungen (1) und (2) stets sowohl für $\sqrt{z_1 z_2}$ wie für $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ nur bestimmte ausgezeichnete „Klassen“ von Funktionen in Frage kommen, in denen noch eine Anzahl willkürlicher, aber durch Ungleichungen eingeschränkter Parameter auftreten. Jedes Paar approximierender Funktionen z_1, z_2 kann durch Multiplikation und Division einer beliebig ausgewählten $\sqrt{z_1 z_2}$-Klasse und einer $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-Klasse gewonnen werden. Für TP, HP, BP und BS werden die Klassen explizit angegeben. Dadurch, daß man sich auf die aufgestellten Klassen beschränken muß und kann, zerfällt unser ursprüngliches Interpolationsproblem, in welchem z_1 und z_2 miteinander gekoppelt auftreten, in zwei getrennte Interpolationsprobleme für die Funktionen $\sqrt{z_1 z_2}$

und $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$, wobei als interpolierende Funktionen jetzt nicht positive rationale Funktionen, sondern die in der genannten Klasseneinteilung auftretenden Funktionen zu nehmen sind, welche solche positive Funktionen mit nur Polen und Verzweigungspunkten zweiter Ordnung als Singularitäten darstellen, deren Quadrat für rein imaginäre λ reell ist.

Es wird dann zuerst das vereinfachte Problem gelöst, $\sqrt{z_1 z_2}$ bzw. $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ in vorgeschriebenen Punkten der *D*- bzw. *S*-Intervalle exakt gleich 1 zu machen. Der in der K. W. Wagnerschen Kettenmethode[4]) enthaltene physikalische Beweis der Lösbarkeit unseres Problems hinsichtlich der $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$[4a]) wird mathematisch formuliert und kann unmittelbar auch auf die $\sqrt{z_1 z_2}$ angewandt werden. Eine weitere Lösung wird durch gewisse Integraldarstellungen der 1 gegeben, welche den Grenzfall veranschaulichen, wo die Zahl der Nullstellen und Pole von $\sqrt{z_1 z_2}$ bzw. $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ nach ∞ strebt. Indem man die Integrale durch Summen approximiert, gewinnt man „zulässige" approximierende Funktionen $\sqrt{z_1 z_2}$ bzw. $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$. In gewissen Fällen kann man jene Integrale durch Stieltjessche Kettenbrüche ersetzen und erhält approximierende Funktionen $\sqrt{z_1 z_2}$ bzw. $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$, indem man einen solchen Kettenbruch durch Näherungsbrüche ersetzt.

Die bisherigen Approximationsmethoden sind allgemein anwendbar. In § 3 und 4 werden für die TP, HP, BP und BS *Approximationen im Tschebyscheffschen Sinne* behandelt[4b]). Approximation im Tschebyscheffschen Sinne heißt z. B. für ein TP und $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$: Man bestimme die in einer $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-Klasse für ein TP vorkommenden Parameter derart, daß für $\omega > \omega_k > \omega_1$ das Max $\left|\ln \frac{z_1}{z_2}\right|$ zum Minimum gemacht wird. Für TP, HP, BP und BS wird das Interpolationsproblem im Tschebyscheffschen Sinne durch Zurückführung auf ein Transformationsproblem der elliptischen Funktionen explizit gelöst. In § 3 wird die Lösung dreier normierter Interpolationsprobleme abgeleitet. In § 4 werden die Interpolationsprobleme der TP, HP, BP und BS durch geeignete Trans-

---

[4]) K. W. Wagner, Arch. f. Elektrot. **3** (1915), S. 315 (Kettenleiter); **8** (1919), S. 61 (Siebketten); Telefunkenzeitung **6** (1924), S. 21 (Allgemeiner Kettenleiter).

[4a]) Dämpfung.

[4b]) Sie sind für die elektrotechnischen Anwendungen besonders vorteilhaft.

formation von ω [4c]) auf die normierten Interpolationsprobleme von § 3 zurückgeführt.

Obwohl dies wenig bekannt ist, haben schon Tschebyscheff [5]) und sein Schüler Zolotareff die von Tschebyscheff zuerst auf Polynome angewandte Methode auch auf gewisse Approximationsprobleme mit gebrochenen rationalen Funktionen angewandt, welche den hier behandelten Problemen eng verwandt sind. Neu ist hier, daß von der Tschebyscheffschen Methode eine Anwendung auf ein technisch wichtiges Problem gemacht wird, und vor allem, daß die hier als interpolierende Funktionen zugelassenen Funktionen durch die Forderung der „Positivheit" noch besonders eingeschränkt werden. Obwohl es nach den Resultaten von § 2 durchaus plausibel erscheint, daß die Bestimmung der willkürlichen Parameter durch die Tschebyscheffsche Maximum-Minimum-Forderung auf Parameter führt, welche den Positivheitsungleichungen genügen, ist dies nicht selbstverständlich und muß nachträglich bewiesen werden (am Schluß des § 3). Tatsächlich wurde bereits vor der Auffindung der strengen Lösung mittels elliptischer Funktionen für eine größere Anzahl von Fällen die Tschebyscheffsche Approximation durch systematische numerische und graphische Interpolation mit Erfolg durchgeführt, so daß auch dadurch die Vermutung bestätigt wurde, daß die Tschebyscheffsche Approximation auf Parameter führt, welche den Positivheitsbedingungen genügen. Bei dieser numerisch-graphischen Vorarbeit wurden auch einige Gesetzmäßigkeiten [6]) in den Tschebyscheffschen Parametern aufgefunden, die sich aus den Rechnungen des § 3 ergeben. In der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen wird der Fall gerader oder gebrochener Teilung auf eine Zusammensetzung der Gaußschen oder Landenschen Transformation mit einer Transformation ungerader Teilung zurückgeführt, ohne daß explizite Schlußformeln angegeben werden. Solche Endformeln mußten hier mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Anwendungen und die Darlegung der Positivheit neu abgeleitet werden [z. B. (27), (40), (41), § 3].

[4c]) $\lambda = i\omega$, ω Kreisfrequenz.

[5]) Tschebyscheff, „Sur les expressions approchées de la racine carrée d'une variable par des fractions simples", Oeuvres II, p. 541; G. Zolotareff, „Anwendung der elliptischen Funktionen auf Probleme über Funktionen, die von Null am wenigsten oder am meisten abweichen" (russisch), Abh. d. Kaiserl. Akad. d. Wiss., St. Petersburg, **30** (1877); „Sur l'application des fonctions elliptiques aux questions de maxima et minima", Melanges mathem. et astron. tirés du Bulletin de l'Academie Impériale de St. Petersbourg (1877).

[6]) Z. B. fand Herr E. Glowatzki die Übereinstimmung des b-Parameters der BDF-Klasse 6 mit dem a-Parameter der BDF-Klasse 3 (vgl. Tabelle VIII der „Siebschaltungen", VDI-Verlag).

§ 2.

Klasseneinteilung der TP, HP, BP und BS—verschiedene Approximationsmethoden.

Rationale Funktionen z der Klasse $\mathfrak{C}$ sind dadurch gekennzeichnet, daß sie eine Partialbruchzerlegung der Form

$$z = \lambda \sum_s \frac{a_s}{\lambda^2 + b_s} + L\lambda + D\lambda^{-1} \tag{1}$$

besitzen, wo

$$a_s > 0, \quad b_s > 0, \quad L \geqq 0, \quad D \geqq 0 \tag{2}$$

gilt. Die Nullstellen und Pole solcher Funktionen liegen ausschließlich auf der imaginären Achse, sind alle einfach und trennen sich gegenseitig. Dem entspricht die folgende charakteristische Form der Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$:

$$z = \frac{C(\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_3^2) \dots (\lambda^2 + \omega_{2n-1}^2)}{\lambda(\lambda^2 + \omega_2^2) \dots (\lambda^2 + \omega_{2n-2}^2)}, \tag{3}$$

wobei

$$C > 0, \quad 0 \leqq \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_{2n-2} < \omega_{2n-1} \leqq \infty \tag{4}$$

gilt. *Wenn die Forderungen* (1) *und* (2), § 1 *auch nur approximativ erfüllt werden sollen, darf* $z_1 z_2$ *keine Nullstellen und Pole in den D-Intervallen,* $\frac{z_1}{z_2}$ *keine Nullstellen und Pole in den S-Intervallen besitzen.* Daraus folgt, daß $\sqrt{z_1 z_2}$ abwechselnd einfache Nullstellen und Pole

$$\left(\text{Faktoren } (\lambda^2 + \omega_s^2) \quad \text{und} \quad \frac{1}{(\lambda^2 + \omega_s^2)}\right)$$

in den S-Intervallen, und $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ abwechselnd einfache Nullstellen und Pole in den D-Intervallen besitzt. Jedem ω_g [6a]), das ein S-Intervall von einem D-Intervall trennt, entspricht ein Faktor $\sqrt{\lambda^2 + \omega_g^2}$ oder $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_g^2}}$ [7]). So ergeben sich als verträglich mit den Forderungen der Positivheit und (1) und (2), § 1 nur ganz bestimmte „Klassen" von Funktionen $\sqrt{z_1 z_2}$ und $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ als zulässige Approximationsfunktionen für unser Problem.

[6a]) „Grenzfrequenz", z. B. bei den TP und HP ω_1; bei den BP und BS ω_{-1} und ω_1.

[7]) Eine eingehendere Behandlung siehe l. c. [2]), 3. Zitat, S. 249.

Insbesondere erhält man für TP als $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ oder für HP als $\sqrt{z_1 z_2}$ (oder als reziproke Werte davon [8]))

(5) Klasse 2ν:

$$\frac{m_0 (\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu-1}})(\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu-3}}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{a_1})}{\lambda \quad (\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu-2}}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{a_2}) \sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}},$$

(6) Klasse $2\nu + 1$:

$$\frac{m_0 \lambda (\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu-1}}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{a_1})}{(\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu}}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{a_2}) \sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}}.$$

Analog ergibt sich für TP als $\sqrt{z_1 z_2}$ und für HP als $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ (oder als reziproke Werte davon)

(7) Klasse $\alpha_{2\nu}$:

$$\frac{\mu_0 (\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_1}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_{2\nu-3}})(\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_{2\nu-1}})}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}\,(\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_2}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_{2\nu-2}})},$$

(8) Klasse $\alpha_{2\nu+1}$ [9]):

$$\frac{\mu_0 (\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_1}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_{2\nu-1}})}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}\,(\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_2}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{\alpha_{2\nu}})}.$$

Entsprechend hat man für BP als $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ und für BS als $\sqrt{z_1 z_2}$ (oder als reziproke Werte davon)

(9) Klasse 4ν:

$$\frac{m_0 (\lambda^2 + \omega^2_{-a_1})(\lambda^2 + \omega^2_{-a_3}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{-a_{2\nu-1}})(\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu-1}})(\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu-3}}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{a_1})}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2_{-1}}\,(\lambda^2 + \omega^2_{-a_2}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{-a_{2\nu-2}})(\lambda^2 + \omega_0^2)(\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu-2}}) \cdots (\lambda_2 + \omega^2_{a_2}) \sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}},$$

(10) Klasse $4\nu + 1$:

$$\frac{m_0 \sqrt{\lambda^2 + \omega^2_{-1}}\,(\lambda^2 + \omega^2_{-a_2}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{-a_{2\nu}})(\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu-1}}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{a_1})}{(\lambda^2 + \omega^2_{-a_1}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{-a_{2\nu-1}})(\lambda^2 + \omega^2_{a_{2\nu}}) \cdots (\lambda^2 + \omega^2_{a_2}) \sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}},$$

---

[8]) Bedeuten die Funktionen $\sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}}$, so wird dies in der Klassenbezeichnung, wie sie in den „Siebschaltungen" eingeführt wurde, durch einen zusätzlichen * ausgedrückt.

[9]) Die Bezeichnungen m_0 und μ_0 zum Unterschied von m und μ in den „Siebschaltungen" sollen zum Ausdruck bringen, daß es sich hier nicht um die dortigen Größen Z_1 und Z_2, sondern um z_1 und z_2 handelt.

(11) Klasse $4\nu+2$:

$$\frac{m_0(\lambda^2+\omega_{-a_1}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu-1}}^2)(\lambda^2+\omega_0^2)(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu-1}}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{a_1}^2)}{\sqrt{\lambda^2+\omega_{-1}^2}(\lambda^2+\omega_{-a_2}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu}}^2)(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu}}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{a_2}^2)\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2}},$$

(12) Klasse $4\nu+3$:

$$\frac{m_0\sqrt{\lambda^2+\omega_{-1}^2}(\lambda^2+\omega_{-a_2}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu}}^2)(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu+1}}^2)(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu-1}}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{a_1}^2)}{(\lambda^2+\omega_{-a_1}^2)(\lambda^2+\omega_{-a_3}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu+1}}^2)(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu}}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{a_2}^2)\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2}}.$$

Schließlich ergibt sich für BP als $\sqrt{z_1 z_2}$ und für BS als $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ (oder als reziproke Werte davon)

(13) Klasse $a_{4\nu}$:

$$\frac{\mu_0(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu-1}}^2)(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu-3}}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{-a_1}^2)\qquad(\lambda^2+\omega_{a_1}^2)(\lambda^2+\omega_{a_3}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu-1}}^2)}{\lambda(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu-2}}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{-a_2}^2)\sqrt{(\lambda^2+\omega_{-1}^2)(\lambda^2+\omega_1^2)}\,(\lambda^2+\omega_{a_2}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu-2}}^2)},$$

(14) Klasse $a_{4\nu+2}$ [9a]):

$$\frac{\mu_0\lambda(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu-1}}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{-a_1}^2)\qquad(\lambda^2+\omega_{a_1}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu-1}}^2)}{(\lambda^2+\omega_{-a_{2\nu}}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{-a_2}^2)\sqrt{(\lambda^2+\omega_{-1}^2)(\lambda^2+\omega_1^2)}\,(\lambda^2+\omega_{a_2}^2)\cdots(\lambda^2+\omega_{a_{2\nu}}^2)}.$$

In allen voranstehenden Formeln für die verschiedenen Siebschaltungsklassen ist $\mu_0 > 0$ und $m_0 > 0$, und die ω_s sind der Größe nach von links nach rechts geordnet. Das heißt, es ist z. B. in (12)

(12a) $$\omega_{-1} < \omega_{-a_1} < \omega_{-a_2} < \cdots < \omega_{-a_{2\nu+1}} < \omega_{a_{2\nu+1}} < \cdots < \omega_{a_2} < \omega_{a_1} < \omega_1.$$

Sämtliche hier unter (5) bis (14) aufgezählten Funktionsklassen wie überhaupt die Klassen für irgendwelche D- und S-Intervalle sind positive algebraische Funktionen, wenn derjenige Zweig genommen wird, der für positive λ positiv ist [10]). Jede derartige Funktion ist in der folgenden Funktionsklasse $\mathfrak{Q}$ enthalten, die ihrerseits die Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$

[9a]) Während bei den vorangehenden Klassen alle sich ergebenden Möglichkeiten berücksichtigt sind, enthalten die Klassen $a_{4\nu}$ und $a_{4\nu+2}$ nur diejenigen BP-$\sqrt{z_1 z_2}$- bzw. BS-$\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-Klassen, bei denen beiderseits von $i\omega_{-1}$ und $i\omega_1$ gleich viele Nullstellen und Pole auf der positiv imaginären λ-Achse vorkommen und der mittlere Faktor $\frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+\omega_{-1}^2)(\lambda^2+\omega_1^2)}}$ lautet (es könnte statt dessen auch $\frac{\sqrt{\lambda^2+\omega_{-1}^2}}{\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2}}$ stehen).

[10]) Die Positivheit erklärt sich physikaliseh aus der Bedeutung der $\sqrt{z_1 z_2}$ als „Wellenwiderstände", vgl. z. B. l. c. [2]), 1. Zitat, und wird nachstehend bewiesen.

umfaßt. Dabei entsprechen die Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$ einem einzigen unendlichen D- oder S-Intervall.

Unter einer Funktion der Klasse Ω soll eine positive Funktion verstanden werden, die als Singularität nur Pole und algebraische Verzweigungspunkte zweiter Ordnung besitzt, und die auf der imaginären Achse an regulären Stellen entweder rein imaginär oder positiv ist (bzw. deren Quadrat auf der imaginären Achse reell ist).

Nach dieser Definition können Pole und Verzweigungspunkte zweiter Ordnung nur in endlicher Zahl auftreten, da ein Häufungspunkt solcher Singularitäten nicht mehr ein Pol oder Verzweigungspunkt zweiter Ordnung wäre. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip können, da die Funktion als positive Funktion in der rechten Halbebene keine Singularitäten und Nullstellen hat, auch in der linken Halbebene keine Singularitäten und Nullstellen vorhanden sein, d. h. alle Pole, Nullstellen und Verzweigungspunkte zweiter Ordnung liegen auf der imaginären Achse. Ein D-Intervall ist für $\sqrt{z_1 z_2}$ ein Intervall, wo die Funktion positiv ist — „Positivintervall" —, ein S-Intervall ein Intervall, wo $\sqrt{z_1 z_2}$ rein imaginär ist — „Imaginärintervall" —, und für $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ ist es gerade umgekehrt. Die Verzweigungspunkte zweiter Ordnung liegen an den Intervallgrenzen, welche Positivintervalle von den Imaginärintervallen trennen[10a]). Ein Positivintervall enthält keine Pole oder Nullstellen. In jedem Imaginärintervall sind alle Nullstellen und Pole einfach und folgen abwechselnd aufeinander. Kommt beim Durchlaufen des Intervalls zuerst ein Pol, so hat das Quadrat der Funktion an der benachbarten Intervallgrenze eine einfache Nullstelle, kommt dagegen zuerst eine Nullstelle, so hat das Quadrat dort einen einfachen Pol. Enthält ein Imaginärintervall weder Nullstellen noch Pole, so hat das Quadrat der Funktion an dem einen Intervallende eine einfache Nullstelle und an dem anderen Ende einen einfachen Pol. Endlich ist derjenige der beiden Zweige der Funktion zu nehmen, der für positive λ positiv ist. Daß die eben genannten Bedingungen für Funktionen der Klasse Ω notwendig und hinreichend sind, wird ersichtlich, wenn man die Abbildung der imaginären Achse, bei der die Singularitäten durch kleine, nach rechts ausweichende Halbkreise umgangen sind, untersucht und den Satz anwendet, daß eine in einem abgeschlossenen Bereich reguläre harmonische Funktion (der Realteil der Funktion der Klasse Ω) ihr Minimum auf dem Rande annimmt. Umgekehrt kann jede Funktion der Klasse Ω

10a) Diese Stellen entsprechen den Grenzfrequenzen der Siebschaltung.

als $\sqrt{z_1 z_2}$- oder $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-Klasse für ein gewisses System von D- und S-Intervallen, d. h. einer gewissen „Type", aufgefaßt werden.

Kombiniert man nun irgendeine $\sqrt{z_1 z_2}$-Klasse einer bestimmten Type (z. B. TP) mit irgendeiner $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-Klasse derselben Type, so ergeben sich durch Multiplikation und Division gerade z_1 und z_2 der charakteristischen Form (3), wobei die Bedingungen (4) erfüllt sind. z_1 und z_2 sind also tatsächlich Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$. Handelt es sich um das Interpolationsproblem für eine ganz bestimmte Type, z. B. TP mit „Grenzfrequenz" ω_1, so sind die Parameter m_0, ω_{a_1}, ... noch willkürlich. Die *idealen Forderungen* (1) und (2), § 1, in denen die z_1 und z_2 miteinander verkoppelt auftreten, können nunmehr *unabhängig voneinander approximativ befriedigt werden.* (Daß dies mit jedem verlangten Genauigkeitsgrad wirklich geht, wird sogleich gezeigt werden.) Die Aufgabe ist nun darauf reduziert, irgendeine der Klassen z. B. für $\sqrt{z_1 z_2}$ aufzusuchen und dann die verfügbaren Parameter so zu bestimmen, daß die Approximation möglichst gut wird. Ist ein vorgeschriebener Genauigkeitsgrad der Approximation mit der ausgesuchten Klasse nicht erreichbar, so gehe man zu einer höheren Klasse über. Je höher die Klassenzahl, um so größer ist die Anzahl der bis auf die Positivheitsungleichungen frei verfügbaren Parameter, und eine um so bessere Approximation ist bei geeigneter Wahl der Parameter zu erwarten [11]). Alle weiteren Überlegungen dieser Arbeit zielen auf eine Beantwortung der Frage hin: Wie hat man die in den zulässigen Funktionsklassen (Funktionen der Klasse $\mathfrak{Q}$) auftretenden willkürlichen Parameter zu bestimmen, um gute Approximationen der idealen Forderungen (1) und (2), § 1 zu erhalten?

Zunächst sei eine Methode auseinandergesetzt, für eine beliebige Type interpolierende Funktionen $\sqrt{z_1 z_2}$ $\left(\text{bzw. } \sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\right)$ zu konstruieren, die an endlich vielen vorgeschriebenen Stellen der D-(S-) Intervalle $\lambda = i\omega_1, i\omega_{11}, \ldots$ die ideale Forderung (1) (bzw. (2)) exakt erfüllen. Mögen w_1 und w_2 zwei Approximationsfunktionen der $\sqrt{z_1 z_2}$- $\left(\text{bzw. } \sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\text{-}\right)$ Klassen derselben Type sein. Dann gilt der Satz:

$$w_3 = \frac{1 + w_1 w_2}{w_1 + w_2} \tag{15}$$

ist eine Approximationsfunktion derselben Type und Art wie w_1 *und* w_2 (z. B. $\sqrt{z_1 z_2}$ für TP). w_3 *erfüllt die ideale Forderung* (1) (*bzw.* (2))

[11]) Je größer die Klassenzahl, um so höher ist auch die zur physikalischen Realisierung in der Schaltung erforderliche Anzahl von Schaltelementen.

sowohl an den Stellen exakt, wo w_1 dies tut, als auch an den Stellen, wo w_2 dies tut.

Eine andere Formulierung dieses Satzes lautet:

Sind w_1 und w_2 Funktionen der Klasse $\mathfrak{Q}$ mit übereinstimmenden Positiv- und Imaginärintervallen, so ist w_3 eine Funktion gleicher Art. Die 1-Stellen von w_1 und w_2 sind auch 1-Stellen von w_3.

Daß mit w_1 oder w_2 auch w_3 die ideale Forderung erfüllt, ist sofort einzusehen. Denn sowohl, wenn $w_1 = 1$ ist, wie auch, wenn $w_2 = 1$ ist, wird nach (15) $w_3 = 1$. Zum Beweis der ersten Behauptung ist zuerst festzustellen, daß w_3 eine positive Funktion ist. Hierfür braucht nur vorausgesetzt zu werden, daß w_1 und w_2 positive Funktionen sind. Jedenfalls ist w_3 in der rechten λ-Halbebene regulär und für reelle λ reell. Ferner ist mit dem Realteil von w_1 und w_2 auch der Realteil von w_3 positiv, womit die Positivheit von w_3 gezeigt ist. Ist w_1 und w_2 rein imaginär, so wird w_3 rein imaginär, ist w_1 und w_2 positiv, so wird w_3 positiv. Daher ist w_3 wie w_1 und w_2 eine Funktion der Klasse $\mathfrak{Q}$ und hat mit w_1 und w_2 übereinstimmende Positiv- und Imaginärintervalle.

Durch wiederholte Anwendung von (15) kann man nun sukzessive zu immer besseren Approximationen der idealen Forderung (1) oder (2) fortschreiten, wenn unter „besser" zunächst Vermehrung der Anzahl derjenigen Stellen verstanden wird, an denen die ideale Forderung exakt erfüllt wird. Z. B. kann man für ein HP in folgender Weise eine $\sqrt{z_1 z_2}$-Funktion konstruieren, die an vorgeschriebenen Stellen des D-Intervalls $\omega_{\mathrm{I}}, \omega_{\mathrm{II}}, \ldots$ den Wert 1 annimmt. Man gehe aus von der Funktion der Klasse 1 ($\nu = 0$ in (6))

$$w_{\mathrm{I}} = w_1 = \frac{m_0 \lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_{\mathrm{I}}^2}} \tag{16}$$

und bestimme m_0 aus der Forderung, daß $w_1 = 1$ wird für $\lambda = i\,\omega_{\mathrm{I}}$, also

$$m_0 = m_{0\,\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{\omega_{\mathrm{I}}^2 - \omega_{\mathrm{I}}^2}}{\omega_{\mathrm{I}}}.$$

$w_{\mathrm{II}}, w_{\mathrm{III}}, w_{(n)}$ mögen aus w_{I} durch Vertauschung von ω_{I} mit ω_{II}, ω_{I} mit $\omega_{\mathrm{III}}, \ldots$ hervorgehen. Dann bilde man rekursiv

$$w_n = \frac{1 + w_{n-1}\, w_{(n)}}{w_{n-1} + w_{(n)}}. \tag{17}$$

In w_n hat man eine HP-$\sqrt{z_1 z_2}$-Funktion der Klasse n, welche für $\omega_{\mathrm{I}}, \omega_{\mathrm{II}}, \ldots, \omega_{(n)}$ die ideale Forderung (1), § 1 exakt erfüllt.

Allgemein verifiziert man leicht, daß für TP, HP, BP und BS außer für BP-$\sqrt{z_1 z_2}$ und BS-$\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ die Summe der Klassenzahlen von w_1 und w_2 gleich der Klassenzahl von w_3 in Formel (15) ist.

Nimmt man in (17) für $w_{(n)}$ stets ein und dieselbe Funktion w_1 (man setze $\omega_{\mathrm{I}} = \omega_{\mathrm{II}} = \omega_{\mathrm{III}} = \ldots$, z. B. wähle man als $\sqrt{z_1 z_2}$ für HP oder $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ für TP)

$$w_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}}, \tag{18}$$

wobei $\omega_{\mathrm{I}} = \omega_{\mathrm{II}} = \ldots = \infty$), dann ergibt sich, daß *die idealen Forderungen* (1) *und* (2), § 1 *mit jedem vorgeschriebenen Genauigkeitsgrad erfüllt* werden können, wenn nur die Operation (15) oder (17) genügend oft wiederholt wird. Durch die Substitution

$$w_1 = \mathfrak{Cot}\frac{\Gamma}{2}, \quad w_2 = \mathfrak{Cot}\frac{\Gamma'}{2}, \quad w_3 = \mathfrak{Cot}\frac{\Gamma''}{2} \tag{19}$$

geht nämlich (15) in

$$\Gamma'' = \Gamma + \Gamma' \tag{20}$$

über. Daher liefert die $(n-1)$-malige Anwendung von (17) mit w_1 statt $w_{(n)}$

$$\Gamma^{(n)} = n\,\Gamma.$$

Ist also

$$\Re\,\Gamma = A_1 > \varepsilon,$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} w_n = \lim_{n=\infty} \frac{e^{n\Gamma}+1}{e^{n\Gamma}-1} = 1.$$

Bei beliebig klein vorgegebenen $\delta > 0$ kann nun aber ein $\varepsilon > 0$ gefunden werden, so daß in den Positivintervallen nach Ausschluß von Stücken der Länge δ an den Intervallenden gleichmäßig

$$\frac{e^{\varepsilon}-1}{e^{\varepsilon}+1} < w_1 < \frac{e^{\varepsilon}+1}{e^{\varepsilon}-1}$$

gilt. Dann ist in der Tat

$$A_1 = \ln\left|\frac{w_1+1}{w_1-1}\right| > \varepsilon\,^{11a)\,11b)}.$$

Weitere Approximationsmethoden der idealen Forderungen (1) und (2), § 1 durch Funktionen w der Klasse Ω erhält man durch Poissonsche

---

11a) Z. B. gilt dies für (18) und $\omega > \omega_1 + \delta$, wenn ε aus $\frac{\omega_1+\delta}{\sqrt{2\,\omega_1\,\delta+\delta^2}} = \frac{e^{\varepsilon}+1}{e^{\varepsilon}-1}$ bestimmt wird.

11b) Das Vorangehende ist eine mathematische Interpretation und Verallgemeinerung der K. W. Wagnerschen Kettenmethode zur Konstruktion von Siebschaltungen, welche einen physikalisch anschaulichen Beweis der Erfüllbarkeit der idealen Forderung (2) gibt; vgl. l. c. 4).

Integraldarstellung oder durch Stieltjessche Kettenbruchentwicklung solcher Funktionen v der Klasse $\mathfrak{Q}$, die im Innern der Imaginärintervalle keine Nullstellen oder Pole enthalten und deren Positivintervalle mit den Imaginärintervallen von w und deren Imaginärintervalle mit den Positivintervallen von w übereinstimmen. Multiplikation einer Summenapproximation des Poissonschen Integrals oder eines Näherungsbruches des Kettenbruchs mit $1/v$ liefert dann eine Approximationsfunktion w der Klasse $\mathfrak{Q}$.

Jede positive Funktion gestattet nämlich die Integraldarstellung [12])

$$w(\lambda) = \lambda\left[C + \int_0^\infty \frac{d\,\psi(x)}{\lambda^2 + x}\right], \tag{21}$$

worin C eine nicht negative Konstante und ψ eine nicht abnehmende Funktion bedeutet und das Integral im Stieltjesschen Sinne zu nehmen ist. $\psi(x)$ ist darin durch die Randwerte des Realteiles von w bestimmt:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \Re \int_0^{\sqrt{x}} w(\varepsilon + i\,y)\,d\,y. \tag{22}$$

Speziell in x-Intervallen, welche regulären Intervallen von $\lambda = i\sqrt{x}$ der imaginären λ-Achse entsprechen, ist ψ differenzierbar, und es gilt

$$\psi'(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\Re\, w(i\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \tag{23}$$

Für die erwähnten speziellen Funktionen v der Klasse $\mathfrak{Q}$ genügt nach Abspaltung der eventuell bei 0 und ∞ vorhandenen einfachen Pole — wie z. B. in den folgenden Formeln (25), (26) und (27) — die Formel (23) zur Aufstellung des Poissonschen Integrals (21), da der Grenzübergang in (22) zeigt, daß ψ für solche x, welche Verzweigungspunkten zweiter Ordnung $\lambda_s = i\sqrt{x_s}$ von w entsprechen, keine Sprungstellen aufweist.

Handelt es sich nun beispielsweise um die $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-Klassen für BP, so sind nach den Vorschriften für v folgende vier Möglichkeiten vorhanden, für welche die Integraldarstellungen sich mit Benutzung von (23) sofort hinschreiben lassen:

$$v_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + \omega_{-1}^2)(\lambda^2 + \omega_1^2)}} = \frac{\lambda}{\pi} \int_{\omega_{-1}^2}^{\omega_1^2} \frac{d\,x}{\sqrt{(\omega_1^2 - x)(x - \omega_{-1}^2)(\lambda^2 + x)}}, \tag{24}$$

[12]) G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem reellen Teil im Einheitskreis. Leipz. Ber. 63 (1911). Vgl. auch W. Cauer, Bull. Amer. Math. Soc. 1932: The Poisson Integral for Functions with Positive Real Part.

$$(25)\qquad v_2 = \frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2}}{\sqrt{\lambda^2+\omega_{-1}^2}} = \lambda\left[1+\frac{1}{\pi}\int_{\omega_{-1}^2}^{\omega_1^2}\sqrt{\frac{\omega_1^2-x}{x-\omega_{-1}^2}}\,\frac{dx}{\lambda^2+x}\right],$$

$$(26)\qquad v_3 = \frac{\sqrt{(\lambda^2+\omega_{-1}^2)(\lambda^2+\omega_1^2)}}{\lambda}$$

$$= \lambda\left[1+\frac{\omega_{-1}\omega_1}{\lambda^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\omega_{-1}^2}^{\omega_1^2}\frac{\sqrt{(x-\omega_{-1}^2)(\omega_1^2-x)}}{x(\lambda^2+x)}\,dx\right],$$

$$(27)\qquad v_4 = \frac{\sqrt{\lambda^2+\omega_{-1}^2}}{\lambda\sqrt{\lambda^2+\omega_1^2}} = \lambda\left[\frac{\omega_{-1}}{\omega_1}\cdot\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\pi}\int_{\omega_{-1}^2}^{\omega_1^2}\frac{\sqrt{x-\omega_{-1}^2}\,dx}{x\sqrt{\omega_1^2-x}\,(\lambda^2+x)}\right].$$

Approximiert man die Integrale der rechten Seiten durch Summen, so ergeben sich Ausdrücke der Gestalt (1), welche wegen der Positivheit der Faktoren von $\frac{1}{\lambda^2+x}$ im Integranden den Bedingungen (2) genügen, also Funktionen der Klasse $\mathfrak{C}$ sind und sich in der Form (3) darstellen lassen. Da die Pole einer solchen Funktion im Imaginärintervall $\omega_{-1} < -i\lambda < \omega_1$ der $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-Klassen für BP liegen, ergibt sich aus (24) durch Multiplikation mit $1/v_1$ tatsächlich eine in den Klassen (9), (10), (11) und (12) enthaltene Funktion, welche die Forderung (2), § 1 mit jeder vorgeschriebenen Genauigkeit erfüllt, wenn nur die das Integral approximierende Summe genügend viele Glieder enthält. Dasselbe gilt für (25), (26) und (27). Zwar könnte in der Approximationsfunktion der Klasse $\mathfrak{C}$ ein Faktor $(\lambda^2+\omega_p^2)$ mit $\omega_p < \omega_{-1}$ oder $\omega_p > \omega_1$ auftreten. Da aber diese Funktion mit $\frac{1}{v_2}\left(\frac{1}{v_3},\frac{1}{v_4}\right)$ multipliziert eine Approximation der 1 ergibt, die für $\omega < \omega_{-1}-\varepsilon$ und $\omega > \omega_1+\varepsilon$ mit wachsender Zahl der Approximationssummenglieder gleichmäßig beliebig gut gemacht werden kann, kann dann unmöglich im Innern der Positivintervalle (S-Intervalle) von $w = \sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ eine Nullstelle $i\omega_p$ auftreten, derart, daß $\omega_{-1}-\omega_p > \varepsilon$ oder $\omega_p-\omega_1 > \varepsilon$ ist. Durch einen zusätzlichen Faktor

$$\frac{\lambda^2+\omega_{-1}^2}{\lambda^2+\omega_p^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\lambda^2+\omega_1^2}{\lambda^2+\omega_p^2},$$

der die Approximation um so weniger verschlechtert, je kleiner ε, gelangt man immer zu einer Funktion w der $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-BP-Klassen.

Für andere Typen verhält sich alles analog, abgesehen davon, daß bei höheren Typen eine kleine Komplikation auftritt, für welche die $\sqrt{z_1 z_2}$-Klassen für BP ein Beispiel geben. Eine der beiden hier möglichen, zu (24) bis (27) analogen Relationen lautet:

$$(28)\qquad \sqrt{\frac{\lambda^2+\omega_1^2}{\lambda^2+\omega_{-1}^2}} = \frac{\lambda}{\pi}\Big[\int_0^{\omega_{-1}^2} \sqrt{\frac{\omega_1^2-x}{x(\omega_{-1}^2-x)}}\,\frac{dx}{\lambda^2+x} + \int_{\omega_1^2}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_1^2-x}{x(\omega_{-1}^2-x)}}\,\frac{dx}{\lambda^2+x}\Big].$$

Um hier einzusehen, daß eine hinreichend gute Approximation der Integrale durch eine Summe, mit dem reziproken Wert der linken Seite multipliziert, eine BP-$\sqrt{z_1 z_3}$-Klasse, z. B. (13) oder (14) ergibt, ist noch zu zeigen, daß für den Faktor $(\lambda^2+\omega_p^2)$, der hier eine Nullstelle $\omega = \omega_p$ zwischen dem letzten Pol vom ersten Integral und dem ersten Pol vom zweiten Integral gibt, bei beliebig kleinem vorgegebenen ε $\omega_p + \varepsilon > \omega_1$ ist. Ist dies gezeigt, so kann man die Approximationsfunktion stets durch Multiplikation mit dem nur unwesentlich von 1 verschiedenen Faktor $\frac{\lambda^2+\omega_1^2}{\lambda^2+\omega_p^2}$ auf eine Funktion der Gestalt der BP-$\sqrt{z_1 z_2}$-Klassen bringen. Genau wie in den früheren Fällen erkennt man, daß ω_p, wenn es im Intervall (ω_{-1}, ω_1) liegt, von den Intervallenden keinen größeren Abstand als ε haben kann. Denn wenn die Approximation der Integrale durch Summen mit genügend vielen Summanden vorgenommen wird, läßt sich erreichen, daß im Intervall $\omega_{-1}+\varepsilon \leqq \omega \leqq \omega_1 - \varepsilon$ gleichmäßig $|\ln \sqrt{z_1 z_2}| < \delta$ wird, wo $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben sind. Es kann also nicht etwa im genannten ω-Intervall eine Nullstelle von $\sqrt{z_1 z_2}$ liegen.

Zu zeigen ist aber noch, das ist das Neue bei (28) gegenüber (24) bis (27), daß der Fall $\omega_p < \omega_{-1} + \varepsilon$ ausgeschlossen ist. Die die ideale Forderung (1), § 1 approximierende Funktion $w = \sqrt{z_1 z_2}$ ist nach (28), falls $\omega_p < \omega_{-1} + \varepsilon$ sein sollte, von der Form

$$(29)\qquad w(\lambda) = C\sqrt{\frac{\omega^2-\omega_{-1}^2}{\omega_1^2-\omega^2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_{q+1}^2+\omega^2} \cdot \prod_{s=1}^{p}\Big(\frac{\varphi_s^2-\omega^2}{\chi_s^2-\omega^2}\Big) \cdot \prod_{s=1}^{q}\Big(\frac{\psi_s^2-\omega^2}{\omega_{(s)}^2-\omega^2}\Big),$$

wo φ_p statt ω_p geschrieben ist, und

$$(30)\qquad \chi_1 < \varphi_1 < \chi_2 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_p < \omega_{-1}+\varepsilon < \omega_1 \leqq \omega_I < \psi_1 < \omega_{II} < \psi_2 < \ldots < \psi_q < \omega_{(q+1)}$$

gilt. Die logarithmische Ableitung aller in w bei der geschriebenen Anordnung auftretenden Faktoren ist offenbar positiv für $\omega_{-1} + \varepsilon \leqq \omega \leqq \omega_1$. Daher ist

$$\triangle \ln w = \ln w((\omega_1 - \varepsilon)\, i) - \ln w((\omega_{-1} + \varepsilon)\, i) > \left| \ln \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{-1}^2}{\omega_1^2 - \omega^2}} \right|_{\omega_{-1}+\varepsilon}^{\omega_1 - \varepsilon}, \tag{31}$$

also sicher für genügend kleines $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ nicht $\triangle \ln w < 2\delta$, wodurch sich die Annahme $\omega_p < \omega_{-1} + \varepsilon$ als irrig erweist.

Offenbar gilt die am Beispiel der BP-$\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$- und -$\sqrt{z_1 z_2}$-Klassen erläuterte Methode allgemein.

Die schon erwähnte Kettenbruchmethode zur Gewinnung von Funktionen der Klasse $\mathfrak{Q}$, welche die idealen Forderungen (1) oder (2), § 1 approximieren, ist ganz ähnlich. Nur wird das Poissonsche Integral durch einen Stieltjesschen Kettenbruch ersetzt, was jedoch nur unter besonderen Voraussetzungen über $\psi(x)$ in (21) möglich ist, und dann ein Näherungsbruch des Kettenbruchs gewählt. Die Methode sei am Beispiel der $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$-Klassen für TP (bzw. für die $\sqrt{z_1 z_2}$ für HP) erläutert. Hier soll von derjenigen Poissonschen Integraldarstellung ausgegangen werden, die aus (25) durch $\omega_{-1} = 0$ hervorgeht:

$$\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2} = \lambda \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1^2} \sqrt{\frac{\omega_1^2 - x}{x - \omega_{-1}^2}} \cdot \frac{dx}{\lambda^2 + x}\right). \tag{32}$$

Das Integral läßt sich durch einen Stieltjesschen (periodischen) Kettenbruch mit der unabhängigen Veränderlichen $\frac{\lambda^2}{\omega_1^2}$ ersetzen, so daß man mit der vereinfachenden Substitution $\Lambda = \frac{\lambda}{\omega_1}$

$$\sqrt{\Lambda^2 + 1} = \Lambda \left\{1 + \frac{1}{|2\Lambda^2} + \frac{1}{|2} + \frac{1}{|2\Lambda^2} + \frac{1}{|2} + \cdots\right\} \tag{33}$$

erhält. Nach bekannten Eigenschaften der Stieltjesschen Kettenbrüche ergibt sich, wenn man hier rechts den Kettenbruch durch einen Näherungsbruch ersetzt, eine Funktion der Klasse $\mathfrak{C}$, deren Pole und Nullstellen dem Betrag nach kleiner als ω_1 sind. Also erhält man in der Tat durch Multiplikation dieser Funktion der Klasse $\mathfrak{C}$ mit $\frac{1}{\sqrt{\Lambda^2 + 1}}$ eine Funktion der Klassen (5) oder (6), welche im S-Intervall die ideale Forderung (2), § 1 für ein TP bzw. (1), § 1 für ein HP approximiert.

Es ist bemerkenswert, daß die Parameter der so erhaltenen HP-$\sqrt{z_1 z_2}$-Klassen 1, 2, 3, ... übereinstimmen mit denen der durch die Wagnersche Kettenmethode im Anschluß an (18) gewonnenen Klassen. Zum Beweis dieser Behauptung werde für den ν-ten Näherungsbruch des Kettenbruchs (33) $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ geschrieben, so daß die $(\nu+1)$-te aus (33) hervorgehende Klasse $\frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2+1}} \cdot \frac{A_\nu}{B_\nu}$ lautet. Für die Näherungszähler A_ν und Näherungsnenner B_ν gelten dann die Rekursionsformeln

$$
\begin{aligned}
A_{2\nu} &= 2A_{2\nu-1} + A_{2\nu-2}, \\
B_{2\nu} &= 2B_{2\nu-1} + B_{2\nu-2}, \\
A_{2\nu+1} &= 2\Lambda^2 A_{2\nu} + A_{2\nu-1}, \\
B_{2\nu+1} &= 2\Lambda^2 B_{2\nu} + B_{2\nu-1}.
\end{aligned} \tag{34}
$$

Demgegenüber ergibt der Wagnersche Prozeß, wenn für die ν-te Näherungsfunktion

$$w_\nu = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2+1}} \frac{A'_{\nu-1}}{B'_{\nu-1}}$$

gesetzt wird $\left(\frac{A'_0}{B'_0} = 1\right)$:

$$
\begin{aligned}
w_\nu &= \frac{1 + w_1 w_{\nu-1}}{w_1 + w_{\nu-1}} \\
&= \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2+1}} \cdot \frac{\Lambda^2 A'_{\nu-2} + (\Lambda^2+1) B'_{\nu-2}}{\Lambda^2 (A'_{\nu-2} + B'_{\nu-2})} = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2+1}} \cdot \frac{A'_{\nu-1}}{B'_{\nu-1}}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Bei passender Bestimmung des in A'_ν und B'_ν noch willkürlichen gemeinsamen Faktors folgen nunmehr die Rekursionsformeln

$$
\begin{aligned}
A'_{2\nu}\Lambda^2 &= \Lambda^2 A'_{2\nu-1} + (\Lambda^2+1) B'_{2\nu-1}, \\
B'_{2\nu} &= A'_{2\nu-1} + B'_{2\nu-1}, \\
A'_{2\nu+1} &= \Lambda^2 A'_{2\nu} + (\Lambda^2+1) B'_{2\nu}, \\
B'_{2\nu+1} &= \Lambda^2 (A'_{2\nu} + B'_{2\nu}).
\end{aligned} \tag{36}
$$

Durch Elimination von $B'_{2\nu-1}$ und $B'_{2\nu}$ aus den ersten drei dieser Gleichungen ergibt sich hieraus z. B.

$$A'_{2\nu+1} = 2\Lambda^2 A'_{2\nu} + A'_{2\nu-1}.$$

Analog erhält man die übrigen Gleichungen (34) für die Größen mit Strichen. Da überdies $A_0 = A'_0$, $B_0 = B'_0$, $A_1 = A'_1$ und $B_1 = B'_1$ ist, so sind die gestrichenen Größen mit den ungestrichenen identisch, was zu beweisen war.

§ 3.

Lösung einiger Tschebyscheffscher Approximationsprobleme[13]).

Problem Ia[14]): *Unter den Funktionen*

$$(1) \qquad y = \ln \sqrt{q} = \ln \frac{c\sqrt{u}\,(u-a_1)\,(u-a_3)\ldots(u-a_{2\nu-1})}{\sqrt{u-1}\,(u-a_2)\,(u-a_4)\ldots(u-a_{2\nu})}$$

soll diejenige bestimmt werden, welche mit $1 < k$ *im Intervall*

$$k^2 < u < \infty$$

die Null im Tschebyscheffschen Sinne am besten approximiert, d. h. für welche das Maximum des Betrages in diesem Intervall ein Minimum wird.

Die a_i werden alle als voneinander verschieden vorausgesetzt und sind ebenso wie c reelle Größen. Offenbar ist notwendig $a_i < k^2$, da andernfalls $y(a_i) = \pm\infty$, was sicher keine Approximation der Null ist. Ferner gilt $c > 0$, wenn die Bestimmung der Quadratwurzel so gewählt wird, daß sie für $u > 1$ positiv ist. Als Bedingung der Positivheit[14a]) wird weiter noch gefordert, daß

$$1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2\nu} > 0.$$

Doch soll diese Forderung zunächst unberücksichtigt bleiben. Am Resultat zeigt sich dann, daß diese Ungleichungen von selbst erfüllt sind.

Zur Diskussion der Anzahl und Art der Extremalstellen einer Lösung betrachten wir neben einem System von Parametern c, a_i ein variiertes System $c + \varepsilon c\lambda_0$, $a_1 + \varepsilon\lambda_1$, $a_2 - \varepsilon\lambda_2$, …; $\pm\lambda_i$ seien reelle Veränderliche, welche den Zuwächsen der Parameter a_i proportional sind, $c\lambda_0$ sei dem Zuwachs von c proportional. u_j $(k^2 < u_1 < u_2 < \ldots)$ seien diejenigen l Stellen, an denen y die größte Absolutabweichung von 0 annimmt $(y = \pm \ln H)$. Reelle Größen v_j, die lediglich der Bedingung unterliegen, daß sie im Vorzeichen mit $y(u_j)$ übereinstimmen, mögen als „zulässig" bezeichnet werden. Dann muß eine Lösung von Problem I a der Bedingung

---

[13]) Für Anregungen zur Behandlung der Approximationsprobleme des § 3 bin ich Herrn Th. Zech und besonders Herrn G. Herglotz zu Dank verpflichtet.

[14]) Dieses Problem geht durch eine lineargebrochene Transformation von u und x in das von Tschebyscheff, l. c. 5), behandelte Problem über. Doch ist die Partialbruchform der von Tschebyscheff gegebenen Lösung für die elektrotechnischen Anwendungen weniger verteilhaft als die hier mitgeteilte explizite Form der Lösung. Der Charakter der „Positivheit" drückt sich in der Tschebyscheffschen Lösung dadurch aus, daß seine Konstanten A, B_ν, C_ν positiv ausfallen.

[14a]) Für die physikalische Realisierbarkeit.

genügen, daß die folgenden Gleichungen für keine zulässigen v_j lösbar sind[15]):

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{2\nu} \frac{\lambda_i}{u_j - a_i} = v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, l). \tag{2}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit

$$\varphi(u_j) = \prod_{i=1}^{2\nu} (u_j - a_i) > 0$$

erhält man

$$f(u_j) \equiv \lambda_0 \varphi(u_j) + \varphi(u_j) \sum_{i=1}^{2\nu} \frac{\lambda_i}{u_j - a_i} = v_j' \quad (j = 1, 2, \ldots, l). \tag{2a}$$

Die v_j' genügen dann keinen anderen Bedingungen als die v_j. Eine Lösung von Problem Ia muß somit auch der Bedingung genügen, daß die Gleichungen (2a) für keine zulässigen v_j' lösbar sind.

$$f(u) = \varphi(u) \left(\lambda_0 + \sum_{i=1}^{2\nu} \frac{\lambda_i}{u - a_i} \right)$$

ist ein Polynom 2ν-ten Grades. Kämen unter den $y(u_j)$ nur höchstens 2ν Vorzeichenwechsel vor, so könnten die Verhältnisse der λ_i so bestimmt werden, daß in je einem Intervall mit Vorzeichenwechsel der $y(u_j)$ eine Nullstelle von $f(u)$ liegt. (Daß die λ_i sich in der Tat derart bestimmen lassen, sieht man so ein. Man wähle ein Polynom 2ν-ten Grades $f_1(u)$ mit höchstem Koeffizienten λ_0 und Nullstellen in den Intervallen, wo die v_j' ihre Vorzeichen wechseln, und bestimme seine Werte $f_1(a_i)$ an den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_{2\nu}$. Dann wähle man ein zweites Polynom 2ν-ten Grades der Form $f(u)$ so, daß es dieselben Werte $f_1(a_i)$ an den Stellen $u = a_i$ annimmt. Dies erfordert

$$\lambda_i (a_i - a_1)(a_i - a_2) \ldots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \ldots (a_i - a_{2\nu}) = f_1(a_i).$$

Hierdurch sind die λ_i bestimmt, da alle a_i als verschieden vorausgesetzt wurden. $f(u)$ und $f_1(u)$ müssen nun identisch sein, da ihre Differenz ein Polynom $(2\nu - 1)$-ten Grades ist, welches an 2ν Stellen, also identisch verschwindet.) Damit wäre die notwendige Bedingung der Unlösbarkeit von (2a) für zulässige v_j' verletzt.

Danach müssen in der Reihe der $v_1', v_2', \ldots, v_l'$ mindestens $2\nu + 1$ Vorzeichenwechsel vorhanden sein, d. h. die Extremalwerte $\pm \ln H$ von y müssen mindestens $2\nu + 2$-mal abwechselnd positiv und negativ an-

[15]) Tschebyscheff, „Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions", Oeuvres **1**, p. 271, insbesondere Théorème 1. p. 276. — P. Kirchberger, „Tschebyscheffsche Annäherungsmethoden". Diss. Göttingen 1902.

genommen werden. Also ist $l \geqq 2\nu + 2$. Für innere Extrema muß $\frac{d \ln q}{du} = 0$ sein. Nun hat

$$\frac{d \ln q}{du} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{2}{u-a_1} - \frac{2}{u-a_2} + - \ldots - \frac{2}{u-a_{2\nu}} \tag{26}$$

höchstens 2ν Nullstellen. Daher muß eine Lösung von Problem Ia genau 2ν innere Extrema und zwei Randextrema besitzen, von welchen letzteren das eine bei $u = k^2$, das andere bei $u = \infty$ liegt. Es gilt also

$$l = 2\nu + 2. \tag{3}$$

Für $u = k^2$ muß $q = H^2$ sein. Für $1 < u \leqq k^2$ ist nämlich $\frac{d \ln q}{du} < 0$, da die Nullstellen von $\frac{d \ln q}{du}$ im Intervall (k^2, ∞) liegen. Deshalb kann für $u = k^2$ nicht $q = H^{-2}$ sein. Da die Extremalwerte H^2 und H^{-2} von q einander eine ungerade Anzahl mal abwechseln, ist $q = H^{-2}$ für $u = \infty$. Demnach ist $c = H^{-1}$.

Der Ausdruck $V = (q - H^{-2})(H^2 - q)$ verschwindet an den inneren Extremalstellen doppelt und verschwindet außerdem für $u = k^2$ und $u = \infty$. Man kann daher ansetzen

$$(q - H^{-2})(H^2 - q) = \frac{q'^2}{q^2}(u - k^2) \cdot \psi(u). \tag{4}$$

q ist im Zähler und Nenner vom Grade $2\nu + 1$. V ist also im Zähler vom Grade $4\nu + 1$ (nicht $4\nu + 2$, da $V = 0$ für $u = \infty$). Denselben Grad hat der Zähler von

$$W = \frac{q'^2 (u - k^2)}{q^2}.$$

Der Nenner von V lautet:

$$l(u) = (u-1)^2 [(u-a_2)(u-a_4) \ldots (u-a_{2\nu})]^4,$$

der Nenner von W (vgl. den Ausdruck (26) für q'/q):

$$r(u) = [u(u-1)(u-a_1)(u-a_2) \ldots (u-a_{2\nu})]^2.$$

Daher ergibt sich für $\psi(u)$

$$\psi(u) = \text{const} \frac{r(u)}{l(u)} = M^2 q u (u-1),$$

wo M eine Konstante bedeutet. Hiernach wird aus (4)

$$\frac{dq}{\sqrt{q(q - H^{-2})(H^2 - q)}} = \frac{1}{M} \cdot \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-k^2)}}. \tag{5}$$

Bei gegebenem k sind hier nur diskrete Werte H und M zulässig, wenn q eine rationale Funktion von u werden soll. Mit der Substitution

$$q = H^{-2} p \tag{6}$$

schreibt sich die Relation (5) in Riemannscher Normalform

$$(7) \qquad \frac{dp}{\sqrt{C\,p\,(1-p)\,(1-H^{-4}\,p)}} = \frac{du}{\sqrt{D\,u\,(1-u)\,(1-k^{-2}\,u)}},$$

worin

$$\frac{D}{C} = -M^3\,k^3\,H^{-3}.$$

Ein gemeinsamer Faktor in C und D ist willkürlich. Wir können und wollen ihn so wählen, daß $C<0$ und $D>0$. Dann werden die Radikanden in (7) für $u>k^2$ positiv. Durch die weiteren Substitutionen

$$(7\,a) \qquad H^4 = \frac{\bar{e}_2-\bar{e}_1}{\bar{e}_3-\bar{e}_1}, \qquad C = 4\,(\bar{e}_2-\bar{e}_1) < 0, \qquad P = \frac{\bar{e}_2-\bar{e}_1}{p} + \bar{e}_1\,^{16})$$

und

$$(7\,b) \qquad k^2 = \frac{e_1-e_3}{e_3-e_2}, \qquad D = 4\,(e_1-e_2) > 0, \qquad U = \frac{e_1-e_2}{u} + e_2\,^{17})$$

folgt aus (7) die Weierstraßsche Normalform

$$(8) \qquad \frac{dP}{\sqrt{4\,P^3-\bar{g}_2\,P-\bar{g}_3}} = \frac{dU}{\sqrt{4\,U^3-g_2\,U-g_3}} = dt.$$

Danach ist

$$(8\,a) \qquad P = \overline{\wp}\,(t+\alpha_0), \qquad U = \wp\,t,$$

wo α_0 eine nachher zu bestimmende Integrationskonstante ist. Nach (6) wird für $u=k^2$ $p=H^4$ und für $u=\infty$ $p=1$. Um festzustellen, welche Transformation zwischen $\overline{\wp}$ und $\wp$ in Frage kommt, müssen die Beziehungen zwischen den zugehörigen Perioden[18]) $2\,\bar{\omega}_1$, $2\,\bar{\omega}_2$ und $2\,\omega_1$, $2\,\omega_2$ aufgesucht werden:

$$(9) \qquad \begin{aligned}
\bar{\omega}_1 &= \int_{\bar{e}_2}^{\bar{e}_3} \frac{dP}{\sqrt{4\,P^3-\bar{g}_2\,P-\bar{g}_3}} = \int_1^{H^4} \frac{dp}{\sqrt{C\,p\,(1-p)\,(1-H^{-4}\,p)}},\\
\omega_1 &= \int_{e_2}^{e_3} \frac{dU}{\sqrt{4\,U^3-g_2\,U-g_3}} = -\int_{k^2}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{D\,u\,(1-u)\,(1-k^{-2}\,u)}},\\
\bar{\omega}_2 &= \int_{\bar{e}_3}^{\bar{e}_1} \frac{dP}{\sqrt{4\,P^3-\bar{g}_2\,P-\bar{g}_3}} = \int_{H^4}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{C\,p\,(1-p)\,(1-H^{-4}\,p)}},\\
\omega_2 &= \int_{e_3}^{e_1} \frac{dU}{\sqrt{4\,U^3-g_2\,U-g_3}} = -\int_1^{k^2} \frac{du}{\sqrt{D\,u\,(1-u)\,(1-k^{-2}\,u)}}.
\end{aligned}$$

---

[16]) Die Querstriche hier und im folgenden bedeuten natürlich nicht konjugiert komplexe Werte.

[17]) Wegen $k>1$ ist $e_1>e_3>e_2$ und ebenso wegen $H>1$ $\bar{e}_1>\bar{e}_3>\bar{e}_2$.

[18]) Die ω dieses Paragraphen beziehen sich auf elliptische Funktionen und sind nicht zu verwechseln mit den ω der übrigen Paragraphen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann nach der zweiten dieser Gleichungen durch passende Bestimmung der Quadratwurzel ω_1 als positiv angenommen werden. Die Integration von (7) nach u über das Intervall (k^2, ∞) gibt auf der linken Seite $2\nu + 1$-mal die Integration nach p von 1 bis H^4 bzw. von H^4 bis 1, wobei die Teilintegrale stets dasselbe Zeichen haben. Es folgt:

$$\overline{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{n}, \qquad n = 2\nu + 1. \tag{9a}$$

Die Integration von (7) nach u über das Intervall $(1, k^2)$ gibt auf der linken Seite eine Integration nach p im Intervall (∞, H^4). Also folgt:

$$\overline{\omega}_2 = \omega_2. \tag{9b}$$

Die Konstante α_0 bestimmt sich (abgesehen von einer belanglosen additiven Periode $2\mu\overline{\omega}_1 + 2\nu\overline{\omega}_2$) aus der Forderung, daß $p = 1$ für $u = \infty$ werden soll, oder, was dasselbe ist, daß für $U = e_2$ $P = \bar{e}_2$ werden soll, indem man $t = \omega_2 = \overline{\omega}_2$ setzt, zu $\alpha_0 = 0$.

$\wp$ ist als gerade elliptische Funktion mit dem Periodenparallelogramm $2\omega_1, 2\omega_2$ eine rationale Funktion von $\wp$, und zwar ist wegen (9a) und (9b)

$$\overline{\wp}\, t - \bar{e}_\alpha = (\wp\, t - e_\alpha) \cdot \prod_{\mu=1}^{\nu} \left[\frac{\wp\, t - \wp\left(\frac{2\mu\omega_1}{n} + \omega_\alpha\right)}{\wp\, t - \wp\,\frac{2\mu\omega_1}{n}} \right]^2 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Die Richtigkeit dieser Formel sowie einiger später vorkommender Formeln, die hier nicht ausführlich abgeleitet werden, läßt sich leicht mit Hilfe des Liouvilleschen Satzes der Funktionentheorie einsehen (man hat die Übereinstimmung der Nullstellen und Pole beider Seiten der Gleichung in einem gemeinsamen Periodenparallelogramm festzustellen und nachzuweisen, daß beide Seiten für einen speziellen Wert von t übereinstimmen).

Für $\alpha = 1$ ändert sich das Produkt nicht, wenn $\wp\left(\frac{2\mu\omega_1}{n} + \omega_1\right)$ durch $\wp\,\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}$ ersetzt wird, weil ω_1 ein ungerades Vielfaches von $\frac{\omega_1}{n}$ ist, so daß man erhält:

$$\overline{\wp}\, t - \bar{e}_1 = (\wp\, t - e_1) \cdot \prod_{\mu=1}^{\nu} \left[\frac{\wp\, t - \wp\,\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}}{\wp\, t - \wp\,\frac{2\mu\omega_1}{n}} \right]^2. \tag{10a}$$

Führt man die Substitutionen (6), (7a), (7b), (8a) unter Berücksichtigung von $\alpha_0 = 0$ aus, und führt noch durch

$$snv = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{f_2 \sqrt{e_1 - e_2}}\, v \,^{19}), \tag{11}$$

---

[19]) Auch dann, wenn man den für die numerischen Anwendungen sehr maßgebenden Gesichtspunkt nicht gelten lassen will, daß die Jacobischen elliptischen

wo

$$f_\alpha x = \sqrt{\wp x - e_\alpha}\ ^{20}) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{11a}$$

gesetzt ist, die Jacobische elliptische Funktion sn mit dem Modul

$$k^{-1} = \sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}}\ ^{21}) \tag{12}$$

und dem „vollständigen Integral erster Gattung"

$$K = \omega_1 \sqrt{e_1 - e_2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^{-2}x^2)}} > 0 \tag{12a}$$

ein, so folgt aus (10a), abgesehen von einem konstanten Faktor

$$\sqrt{q} = H^{-1} \sqrt{\frac{u}{u-1}} \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{u - sn^2 \frac{2\mu K}{n}}{u - sn^2 \frac{(2\mu-1)K}{n}}. \tag{13}$$

Daß der konstante Faktor hier schon richtig gewählt ist, ergibt sich daraus, daß $q = H^{-2}$ für $u = \infty$ ist.

Als Modulargleichung, d. h. Beziehung zwischen H und k, eignet sich für den vorliegenden Zweck nicht eine algebraische, sondern eine transzendente Beziehung, die wir folgendermaßen erhalten. Durch Division von (10) für $\alpha = 2$ und (10a) ergibt sich

$$\sqrt{\frac{\wp t - e_3}{\wp t - e_1}} = \sqrt{\frac{\wp t - e_3}{\wp t - e_1}} \cdot \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{\wp t - \wp\left(\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n} + \omega_2\right)}{\wp t - \wp \frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}}. \tag{14}$$

Dies läßt sich mit den Abkürzungen (11a) unter Berücksichtigung von

$$\frac{\wp y - \wp(x + \omega_\alpha)}{\wp y - \wp x} = \frac{f_\alpha(x+y) f_\alpha(x-y)}{f_\alpha^2 x} \tag{15}$$

schreiben als

$$\frac{\bar{f}_3 t}{\bar{f}_1 t} = \frac{f_3 t}{f_1 t} \cdot \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{f_2\left(\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n} + t\right) f_2\left(\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n} - t\right)}{f_2^2 \frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}}. \tag{16}$$

Funktionen bequem tabuliert vorliegen, dürfte die von Mathematikern, welche den Anwendungen ferner stehen, vielfach geübte Kritik an der Benutzung der Jacobischen Funktionen — vgl. z. B. E. Study, „Die Zeichensprache der elliptischen Funktionen", Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 417—423 — etwas über das berechtigte Maß hinausgehen.

[20]) Bestimmung der Wurzel so, daß das Residuum für $x = 0$ den Wert $+1$ erhält.

[21]) Hier ist also nicht wie üblich der Modul mit k, sondern mit k^{-1} bezeichnet. Dies geschah mit Rücksicht auf die in den „Siebschaltungen" getroffenen, dort zweckmäßigen Bezeichnungsvereinbarungen.

Setzt man hierin $t = \omega_2 = \overline{\omega}_2$ und wendet die Umformung

$$f_2(x + \omega_2) = f_2(x - \omega_2) = -\frac{f_2\omega_1 f_2\omega_3}{f_2 x} \tag{17}$$

auf die Zählerfaktoren in dem Produkt von (16) an, so erhält man

$$\sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}} = \left(\sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}}\right)^{2\nu+1} \cdot \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{f_2 \dfrac{(2\mu-1)\,\omega_1}{n}}\right)^4. \tag{18}$$

Dies geht mit (18), (19), (19a), (7a) über in die gewünschte Beziehung zwischen H und k:

$$\frac{\sqrt{H^4 - 1}}{H^2} = k^{-n} \prod_{\mu=1}^{\nu} sn^4 \frac{(2\mu-1)\,K}{n} \qquad (n = 2\nu + 1.) \tag{19}$$

Problem Ib: *Unter den Funktionen*

$$y = \ln \sqrt{q} = \ln \frac{c\,(u-a_1)(u-a_3)\ldots(u-a_{2\nu-3})(u-a_{2\nu-1})}{\sqrt{u\,(u-1)\,(u-a_2)(u-a_4)\ldots(u-a_{2\nu-2})}} \tag{20}$$

mit reellen Parametern $c, a_1, \ldots, a_{2\nu-1}$, worin die a_i alle voneinander verschieden sind, soll diejenige bestimmt werden, welche mit $1 < k$ im Intervall

$$k^2 < u < \infty$$

die Null im Tschebyscheffschen Sinne am besten approximiert.

Analog wie beim Problem Ia müssen notwendig die $a_i < k^2$ und $c > 0$ sein, wenn die Wurzel so gewählt wird, daß sie für $u > 1$ positiv ist. Als Bedingung der „Positivheit“ [21a]) wird noch weiter gefordert

$$1 > a_1 > a_3 > \ldots > a_{2\nu-1} > 0.$$

Diese Bedingung soll wieder zunächst unberücksichtigt bleiben. Es wird sich an dem Resultat herausstellen, daß sie unter den übrigen Voraussetzungen notwendig miterfüllt ist. Die $\lambda_i\,(i = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1)$ u_j, v_j, l mögen dieselbe Bedeutung wie beim Problem Ia haben. Dann muß eine Lösung der Bedingung genügen, daß die Gleichungen

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{2\nu-1} \frac{\lambda_i}{u_j - a_i} = v_j \tag{21}$$

für kein zulässiges System der v_j lösbar sind. Jetzt sind durch passende Wahl der $\lambda_i : \lambda_0$ $2\nu - 1$ Nullstellen so wählbar, daß je eine in einem Intervall (u_j, u_{j+1}) liegt, in welchem $\operatorname{sgn} \dfrac{v_j}{v_{j+1}} = -1$, falls die Anzahl solcher Intervalle die Zahl $2\nu - 1$ nicht übersteigt. Demnach erfordert

[21a]) Physikalische Realisierbarkeit.

die Unlösbarkeit von (21), daß mindestens 2ν Vorzeichenwechsel in der Folge der $v_1, v_2, \ldots, v_l$ vorkommen, also

$$l \geqq 2\nu + 1.$$

Für innere Extremalstellen muß $\frac{d \ln q}{du}$ verschwinden. Wegen

$$\frac{d \ln q}{du} = -\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} + \frac{2}{u+a_1} - \frac{2}{u-a_2} + - \ldots + \frac{2}{u-a_{2\nu-1}}$$

kann dies an höchstens $2\nu - 1$ Stellen eintreten. Für eine Lösung von Problem Ib gibt es also genau $2\nu - 1$ innere und 2 Randextrema, und es ist

$$l = 2\nu + 1. \tag{22}$$

Da für $1 < u \leqq k^2$ $\frac{d \ln q}{du} < 0$ ist und die Extremalwerte H^2 und H^{-2} von q hier eine gerade Anzahl mal einander abwechseln, ist für $u = k^2$ und für $u = \infty$ $q = H^2$. Demnach ist $c = H$.

An den inneren Extremalstellen verschwindet $V = (q - H^{-2})(H^2 - q)$ doppelt, außerdem verschwindet dieser Ausdruck für $u = k^2$ und $u = \infty$. Setzt man wieder an

$$(q - H^{-2})(H^2 - q) = \frac{q'^2}{q^2}(u - k^2)\,\psi(u), \tag{23}$$

so bestimmt sich $\psi(u)$ analog wie beim Problem Ia. Zähler und Nenner von q sind je vom Grade 2ν, V ist vom Grade $4\nu - 1$ im Zähler. Der Grad des Zählers von $W = \frac{q'^2}{q^2}(u - k^2)$ ist ebenso groß. Der Nenner von V enthält die Faktoren

$$l(u) = u^2 (u-1)^2 [(u - a_3)(u - a_4) \ldots (u - a_{2\nu-2})]^4.$$

Der Nenner von W enthält die Faktoren

$$r(u) = [u(u-1)(u - a_1)(u - a_2) \ldots (u - a_{2\nu-1})]^2.$$

Hieraus folgt

$$\psi(u) = \text{konst.}\,\frac{r(u)}{l(u)} = M^2 q u (u-1),$$

worin M eine Konstante ist. Damit wird aus (23)

$$\frac{dq}{\sqrt{q(q - H^{-2})(H^2 - q)}} = \frac{1}{M}\frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u - k^2)}}, \tag{24}$$

in Übereinstimmung mit (5).

Damit q eine rationale Funktion von u wird, kommen bei gegebenem k nur diskrete Werte von M und H in Frage.

Die Substitutionen (6), (7a) und (7b) reduzieren (24) wieder auf die Riemannsche Normalform (7) und die Weierstraßsche Normalform (8), und es gilt (8a). Nach (6) wird jetzt für $u = k^2$ und für $u = \infty$ $p = \mathrm{H}^4$.

Daher folgen durch Integration von (7) nach u einmal über das Intervall (k^2, ∞), das andere Mal über das Intervall $(1, k^2)$ nach (9) die Periodenrelationen

$$\overline{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{n}, \qquad n = 2\nu \tag{25}$$

und

$$\overline{\omega}_2 = \omega_2. \tag{26}$$

Indem man $t = \omega_2$ setzt, findet man jetzt $\alpha_0 = \overline{\omega}_1$, da für $u = \infty\,(U = e_2)$ $p = H^4\,(P = \bar{e}_3)$ wird.

Wir haben also jetzt den Fall gerader Teilung $(n = 2\nu)$. Da entspricht der Formel (10a), die für ungerade Teilung gilt, die Formel

$$\overline{\wp}\, t - \bar{e}_1 = \frac{1}{\wp\, t - e_1} \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\wp\, t - \wp\, \frac{(2\mu-1)\,\omega_1}{n}\right)^2}{\prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\wp\, t - \wp\, \frac{2\mu\,\omega_1}{n}\right)^2}. \tag{27}$$

Führt man hier wieder die Substitutionen (6), (7a), (7b), (8a) aus und berücksichtigt, daß jetzt $\alpha_0 = \overline{\omega}_1$, sowie, daß aus (17) durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 die Beziehung

$$\sqrt{\overline{\wp}\, t - \bar{e}_1} = \frac{\text{const}}{\sqrt{\wp\,(t + \overline{\omega}_1) - e_1}}$$

folgt, so liefert die Einführung der Jacobischen Funktionen nach (11), (12), (12a) analog wie beim Problem I a

$$\sqrt{q} = \frac{H}{\sqrt{u\,(u-1)}} \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{\nu} \left(u - s n^2 \frac{(2\mu-1)\,K}{n}\right)}{\prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(u - s n^2 \frac{2\mu K}{n}\right)}. \tag{28}$$

Daß die Konstante $c = H$ ist, wurde schon vorher festgestellt.

Zur Ableitung einer für die praktische Rechnung brauchbaren Modulargleichung dividieren wir die zu (27) analoge Relation

$$\overline{\wp}\, t - \bar{e}_3 = \frac{1}{\wp\, t - e_1} \cdot \frac{\prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\wp\, t - \wp\left(\frac{(2\mu-1)\,\omega_1}{n} + \omega_2\right)\right)^2}{\prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\wp\, t - \wp\, \frac{2\mu\,\omega_1}{n}\right)^2} \tag{27a}$$

durch (27) und erhalten so die (14) entsprechende Beziehung für gerade Teilung:

$$\sqrt{\frac{\wp t - e_3}{\wp t - e_1}} = \prod_{\mu=1}^{\nu} \frac{\wp t - \wp\left(\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n} + \omega_2\right)}{\wp t - \wp\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}}. \tag{29}$$

Mit genau denselben Umformungen wie im Falle ungerader Teilung folgt hieraus

$$\sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}} = \left(\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}\right)^{\nu} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{f_2 \frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}}\right)^4 \tag{30}$$

und

$$\frac{\sqrt{H^4 - 1}}{H^2} = k^{-n} \prod_{\mu=1}^{\nu} s\, n^4 \frac{(2\mu-1)K}{n} \qquad (n = 2\nu). \tag{30 a}$$

Problem II: *Unter den Funktionen*

$$y = \ln \sqrt{q} = \frac{c\sqrt{\Omega+1}\,(\Omega+a_2)(\Omega+a_4)\ldots(\Omega+a_{2\nu'})}{\sqrt{\Omega-1}\,(\Omega+a_1)(\Omega+a_3)\ldots(\Omega+a_{2\nu'-1})} \tag{31}$$

mit reellen Parametern $c, a_1, \ldots, a_{2\nu'}$, wobei die a_i alle voneinander verschieden sein sollen, soll diejenige bestimmt werden, welche mit $1 < k$ in den Intervallen

$$-\infty < \Omega < -k$$

und

$$k < \Omega < \infty$$

die Null im Tschebyscheffschen Sinne am besten approximiert.

Dazu ist offenbar notwendig, daß $|a_i| < k$ ist. Wählt man diejenige Bestimmung der Quadratwurzel, welche für $|\Omega| > 1$ positiv ist, so muß $c > 0$ sein. Die „Positivheit“ [21a]) erfordert weiter

$$1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2\nu'} > -1.$$

Diese Einschränkungen machen wir nicht von vornherein. Es zeigt sich bei der Lösung, daß sie von selbst erfüllt sind.

Die $\lambda_i (i = 0, 1, \ldots, 2\nu')$, v_j, l mögen die analoge Bedeutung wie bei Problem I a haben. Ω_j sind diejenigen Ω-Werte, für welche eine Extremalabweichung angenommen wird. Dann muß eine Lösung der Bedingung genügen, daß die Gleichungen

$$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{2\nu'} \frac{\lambda_i}{\Omega_j + a_i} = v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, l) \tag{32}$$

für zulässige v_j unlösbar sind. Bei Multiplikation der Gleichung (32) mit $\prod_{i=1}^{2\nu'} (\Omega_j + a_i)$ wird das Vorzeichen der rechten Seite in (32) nicht geändert, da die $\Omega_j + a_i$ wegen $|a_i| < k$ und $|\Omega_\nu| > k$ für alle i dasselbe Vorzeichen besitzen. Die neuen linken Seiten sind Werte eines Polynoms vom 2ν-ten Grade in Ω an den Stellen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_l$. Da durch passende Wahl der $\lambda_i : \lambda_0$ die $2\nu'$ Nullstellen dieses Polynoms so wählbar sind, daß je eine in einem Intervall (Ω_j, Ω_{j+1}) liegt, in dem

$$\operatorname{sgn} \frac{\Omega_j}{\Omega_{j+1}} = -1$$

ist, falls die Anzahl solcher Intervalle $2\nu'$ nicht übersteigt, so erfordert die Nichtauflösbarkeit von (32), daß mindestens $2\nu' + 1$ Vorzeichenwechsel in der Folge der $v_1, v_2, \ldots, v_l$ vorkommen, d. h. $l \geqq 2\nu' + 2$. Für innere Extremalstellen muß $\frac{d \ln q}{d\Omega}$ verschwinden. Wegen

$$\frac{d \ln q}{d\Omega} = \frac{1}{\Omega + 1} - \frac{1}{\Omega - 1} - \frac{2}{\Omega + a_1} + \frac{2}{\Omega + a_2} - + \ldots + \frac{2}{\Omega + a_{2\nu'}} \tag{33}$$

kann das an höchstens $2\nu'$ Stellen eintreten. Daher sind bei einer Lösung genau $2\nu'$ innere und 2 Randextrema vorhanden, und es ist

$$l = 2\nu' + 2. \tag{34}$$

$\pm\infty$ ist hierbei als innerer Punkt zu zählen. Daher liegt je eine Extremalstelle bei $\Omega = \pm k$. Sind wieder $\pm \ln H$ die Extremalwerte von y, so wird $q = H^2$ für $\Omega = k$ und $q = H^{-2}$ für $\Omega = -k$. Denn für $1 < \Omega \leqq k$ ist $\frac{d \ln q}{d\Omega} < 0$ und für $-1 > \Omega \geqq -k$ ist $\frac{d \ln q}{d\Omega} > 0$.

An den inneren Extremalstellen verschwindet $V = (q - H^{-2})(H^2 - q)$ doppelt, außerdem verschwindet dieser Ausdruck für $\Omega = \pm k$. Man wird so auf den Ansatz

$$(q - H^{-2})(H^2 - q) = \frac{q'^2}{q^2} (\Omega^2 - k^2)\, \psi(\Omega)$$

geführt. q ist im Zähler und Nenner vom Grade $2\nu' + 1$. Der Zähler von V ist daher vom Grade $2(2\nu' + 1)$. Die Nullstellen links stimmen also genau mit denen von $W = \frac{q'^2}{q^2} (\Omega^2 - k^2)$ überein. Der Nenner von V hat die Faktoren

$$l(\Omega) = (\Omega - 1)^2 [(\Omega + a_1)(\Omega + a_3) \ldots (\Omega + a_{2\nu'-1})]^4$$

und der Nenner von W die Faktoren

$$r(\Omega) = [(\Omega^2 - 1)(\Omega + a_1)(\Omega + a_2) \ldots (\Omega + a_{2\nu'})]^2.$$

Daher wird

$$\psi(\Omega) = \text{const}\,\frac{r(\Omega)}{l(\Omega)} = M^2 q(\Omega^2 - 1),$$

wo M eine Konstante bedeutet. Damit ergibt sich die Differentialgleichung für q

$$\frac{dq}{\sqrt{q(q-H^{-2})(H^2-q)}} = \frac{1}{M}\cdot\frac{d\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)(1-k^{-2}\Omega^2)}}. \tag{35}$$

Die aus $y(-k) = -y(k) = -\ln H$ zusammen mit

$$\frac{d\left(\frac{1}{q}\right)}{\sqrt{\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}-H^{-2}\right)\left(H^2-\frac{1}{q}\right)}} = -\frac{dq}{\sqrt{q(H^2-q)(q-H^{-2})}} \tag{36}$$

folgende Antisymmetrie von y hat die Relationen

$$c = 1,\ a_{2\nu'} = -a_1,\ a_{2\nu'-1} = -a_2,\ \ldots,\ a_{\nu'+1} = -a_{\nu'} \tag{37}$$

zur Folge. Zur Riemannschen Normalform

$$\frac{dp}{\sqrt{Cp(1-p)(1-H^{-4}p)}} = \frac{du}{\sqrt{Du(1-u)(1-k^{-2}u)}},$$

die mit (7) übereinstimmt, gelangt man von (35) durch die Substitutionen

$$q = H^{-2}p,\quad \Omega^2 = u. \tag{38}$$

(7a) und (7b) geben dann wieder die Weierstraßsche Normalform (8), und für P und U gilt die Parameterdarstellung (8a). Die Bestimmung der Periodenrelationen und die Bestimmung von α_0 gestalten sich hier folgendermaßen. Nach den schon angegebenen Werten von q an den Randstellen $\Omega = \pm k$ $(u = k^2)$ wird p dort H^4 bzw. 1. Es genügt die Beschränkung auf $\Omega > 0$. Dann ist $p = H^4$ für $u = k^2$. Der Integration von (7) für u im Intervall (k^2, ∞) entspricht eine $\frac{n}{2}$-malige Integration $(n = 2\nu' + 1)$ von p im Intervall $(H^4, 1)$ bzw. $(1, H^4)$, weil die Gesamtzahl der Zeichenwechsel im vollen Ω-Intervall $(k, \infty, -\infty, -k)$ $n = 2\nu' + 1$ beträgt. Aus (9) folgt deshalb

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2\omega_1}{n} \qquad (n = 2\nu' + 1). \tag{39}$$

Ebenso folgt durch Integration von (7) nach u im Intervall $(1, k^2)$ analog wie bei den früheren Problemen

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2. \tag{39a}$$

Für α_0 ergibt sich, da für $u = 1$ $(U = e_1)$ $p = \infty$ $(P = \bar{e}_1)$ wird, mit $t = \omega_1$ der Wert $\alpha_0 = \frac{2-n}{n}\omega_1$.

Die in Frage kommende Transformation kann gefunden werden, indem man eine Transformation vom Grade 2:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\omega}}_1 &= 2\,\omega_1,\\ \overline{\overline{\omega}}_2 &= \omega_2\end{aligned}$$

mit einer solchen ungeraden Grades

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_1 &= \frac{\overline{\overline{\omega}}_1}{\nu},\\ \overline{\omega}_2 &= \overline{\overline{\omega}}_2\end{aligned}$$

zusammensetzt. Die für den hier verfolgten Zweck erforderliche explizite Zusammensetzung der Transformationen führt auf längere Umformungen, von denen nur das Resultat interessiert und wiederum durch Benutzung des Liouvilleschen Satzes bewiesen werden soll.

Man hat bei $n = 2\nu' + 1$ die Fälle von ungeradem und geradem ν' zu unterscheiden.

Problem IIa. Sei zuerst $\nu' = 2\nu + 1$, $n = 4\nu + 3$. Dann ist $\alpha_0 = -\frac{\overline{\omega}_1}{2} \pmod{2\,\overline{\omega}_1, 2\,\overline{\omega}_2}$, und es gilt

$$\frac{\overline{\wp}\left(t - \frac{\overline{\omega}_1}{2}\right) - \overline{e}_1}{\overline{\wp}\,\frac{\overline{\omega}_1}{2} - \overline{e}_1} \tag{40}$$

$$= \frac{f_2\,t - \sqrt{e_1 - e_2}}{f_2\,t + \sqrt{e_1 - e_2}} \cdot \prod_{\mu=1}^{2\nu+1} \left[\frac{f_2\,t - (-1)^{\mu} f_2 \frac{(2\mu-1)\,\omega_1}{n}}{f_2\,t + (-1)^{\mu} f_2 \frac{(2\mu-1)\,\omega_1}{n}}\right]^2 [22]).$$

Beide Seiten sind nämlich elliptische Funktionen der Perioden $4\,\omega_1$, $2\,\omega_2$ und stimmen für $t = 0$ überein. Der Ausdruck auf der linken Seite ist auch eine elliptische Funktion mit den Perioden $\frac{4\,\omega_1}{n}$, $2\,\omega_2$ und hat zu Nullstellen doppelte Nullstellen bei

$$t = \frac{3\,\overline{\omega}_1}{2} = \frac{3\,\omega_1}{n} \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{4\,\omega_1}{n}, 2\,\omega_2\right)$$

und zu Polen doppelte Pole bei

$$t = \frac{\overline{\omega}_1}{2} = \frac{\omega_1}{n} \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{4\,\omega_1}{n}, 2\,\omega_2\right).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (40) hat zu Nullstellen für $\mu = 1, 2, \ldots, 2\nu + 1$ doppelte Nullstellen bei

$$t = \omega_1, (-1)^{\mu} \frac{(2\mu-1)\,\omega_1}{n}; (-1)^{\mu+1} \frac{(2\mu-1)\,\omega_1}{n} + 2\,\omega_1 \pmod{4\,\omega_1, 2\,\omega_2},$$

[22]) Der Nenner der linken Seite kann gemäß (43) durch $\sqrt{(\overline{e}_1 - \overline{e}_2)(\overline{e}_1 - \overline{e}_3)}$ ersetzt werden.

und als Pole für $\mu = 1, 2, \ldots, 2\nu + 1$ doppelte Pole bei

$$t = -\omega_1, (-1)^{\mu+1}\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}, (-1)^{\mu}\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n} + 2\omega_1 \pmod{4\omega_1, 2\omega_2}.$$

Danach stimmen Pole und Nullstellen für beide Seiten von (40) überein, womit (40) bewiesen ist.

Problem IIb. Analog hat man für $\nu' = 2\nu$, $n = 4\nu + 1$, wo $\alpha_0 = \frac{\overline{\omega}_1}{2} \pmod{2\overline{\omega}_1, 2\overline{\omega}_2}$ ist, die Transformation

$$(41)\qquad \frac{\overline{\wp}\left(t+\frac{\overline{\omega}_1}{2}\right)-\overline{e}_1}{\overline{\wp}\frac{\overline{\omega}_1}{2}-\overline{e}_1} = \frac{f_2 t - \sqrt{e_1-e_2}}{f_2 t + \sqrt{e_1-e_2}} \cdot \prod_{\mu=1}^{2\nu}\left[\frac{f_2 t + (-1)^{\mu} f_2\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}}{f_2 t - (-1)^{\mu} f_2\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}}\right]^2 \text{[22]}.$$

Wieder sind beide Seiten elliptische Funktionen der Perioden $\frac{4\omega_1}{n}, 2\omega_2$ und stimmen für $t = 0$ überein. Der linke Ausdruck ist auch eine elliptische Funktion mit den Perioden $\frac{4\omega_1}{n}, 2\omega_2$ und hat zu Nullstellen doppelte Nullstellen bei

$$t = \frac{\overline{\omega}_1}{2} = \frac{\omega_1}{n} \qquad \left(\text{mod } \frac{4\omega_1}{n}, 2\omega_2\right)$$

und doppelte Pole bei

$$t = \frac{3\overline{\omega}_1}{2} = \frac{3\omega_1}{n} \qquad \left(\text{mod } \frac{4\omega_1}{n}, 2\omega_2\right).$$

Die rechte Seite von (41) aber hat zu Nullstellen für $\mu = 1, 2, \ldots, 2\nu$ die doppelten Nullstellen bei

$$t = \omega_1, (-1)^{\mu+1}\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}, (-1)^{\mu}\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n} + 2\omega_1 \pmod{4\omega_1, 2\omega_2}$$

und als Pole für $\mu = 1, 2, \ldots, 2\nu$ doppelte Pole bei

$$t = -\omega_1, (-1)^{\mu}\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n}, (-1)^{\mu+1}\frac{(2\mu-1)\omega_1}{n} + 2\omega_1 \pmod{4\omega_1, 2\omega_2}.$$

Danach stimmen Pole und Nullstellen für beide Seiten von (41) überein, womit auch (41) bewiesen ist.

Mit $U = \wp t$, $P = \overline{\wp}\left(t - \frac{\overline{\omega}_1}{2}\right)$ für $n = 4\nu + 3$ und $R = \overline{\wp}\left(t + \frac{\overline{\omega}_1}{2}\right)$ für $n = 4\nu + 1$ folgt aus (40) und (41) vermöge der Substitutionen (7a) und (7b) und der Einführung der Jacobischen elliptischen Funktion sn nach (11) unter Berücksichtigung von (36) allgemein für $n = 2\nu' + 1$

$$(42)\qquad \sqrt{q} = \sqrt{\frac{\Omega+1}{\Omega-1}} \cdot \prod_{\mu=1}^{\nu'} \frac{\Omega - (-1)^{\mu+\nu'} sn\frac{(2\mu-1)K}{n}}{\Omega + (-1)^{\mu+\nu'} sn\frac{(2\mu-1)K}{n}},$$

wobei der Modul k^{-1} ist.

Die Beziehung zwischen H und k (Modulargleichung) erhält man durch Zusammensetzung von (18) und (30), indem man die Transformation

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2\omega_1}{n}, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2$$

in

$$\bar{\bar{\omega}}_1 = \frac{\omega_1}{n}, \quad \bar{\bar{\omega}}_2 = \omega_2$$

und

$$\bar{\omega}_1 = 2\,\bar{\bar{\omega}}_1, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{\bar{\omega}}_2$$

zerlegt. Nach (18) ist für $n = 2\nu + 1$

$$\sqrt{\frac{\bar{\bar{e}}_3 - \bar{\bar{e}}_2}{\bar{\bar{e}}_1 - \bar{\bar{e}}_2}} = \left(\sqrt{\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}}\right)^n \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{f_2\,\frac{(2\mu-1)\,\omega_1}{n}}\right)^4$$

und nach (30) für $n = 2\nu$, $\nu = 1$

$$\sqrt{\frac{\bar{\bar{e}}_3 - \bar{\bar{e}}_2}{\bar{\bar{e}}_1 - \bar{\bar{e}}_2}} = \frac{\bar{e}_3 - \bar{e}_2}{\bar{e}_1 - \bar{e}_2} \cdot \left(\frac{\sqrt{\bar{e}_1 - \bar{e}_2}}{f_2\,\frac{\bar{\omega}_1}{2}}\right)^4 = \frac{\bar{e}_3 - \bar{e}_2}{\bar{e}_1 - \bar{e}_2} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\bar{e}_3 - \bar{e}_1}{\bar{e}_2 - \bar{e}_1}}\right)^{-2},$$

letzteres wegen (11a) und

$$\wp\,\frac{\omega_1}{2} - e_1 = \sqrt{(e_1 - e_2)\,(e_1 - e_3)}\,^{23}). \tag{43}$$

Wegen $\frac{\bar{e}_3 - \bar{e}_1}{\bar{e}_2 - \bar{e}_1} = H^{-4}$ (vgl. (7a)) wird somit

$$\sqrt{\frac{\bar{\bar{e}}_3 - \bar{\bar{e}}_2}{\bar{\bar{e}}_1 - \bar{\bar{e}}_2}} = \frac{H^2 - 1}{H^2 + 1},$$

und es ergibt sich als Beziehung zwischen k und H:

$$\frac{H^2 - 1}{H^2 + 1} = k^{-n} \prod_{\mu=1}^{\nu'} \left(sn\,\frac{(2\mu - 1)\,K}{n}\right)^4, \tag{44}$$

worin $n = 2\nu' + 1$ und K das zum Modul k^{-1} gehörige vollständige elliptische Integral erster Gattung ist.

Es wurde bisher nur gezeigt, daß, falls die Probleme Ia, Ib und II eine Lösung besitzen, diese notwendig die Form (13), (28) und (42) haben muß. Von vornherein steht ja nur die Existenz einer unteren Grenze für $\ln H$, nicht die Existenz einer Minimallösung fest. Daher muß noch der Nachweis geführt werden, daß die angegebenen Lösungen wirklich Lösungen der Extremalprobleme sind. Weiterhin muß auch noch gezeigt werden, daß die erwähnten Positivheitsbedingungen erfüllt sind, die bei der Problemstellung nicht berücksichtigt wurden, die aber wesentlich für die physikalische Brauchbarkeit der Lösungen sind.

---

[23]) Vgl. z. B. Jordan, Cours d'analyse, 3. Aufl., Bd. II, S. 575.

Nehmen wir z. B. für Problem Ia an, daß es neben der in (13) gegebenen Funktion $\sqrt{q}$ mit der Minimalabweichung H nach (19) eine weitere Funktion $\sqrt{q_1}$ gäbe, die allen Voraussetzungen des Problems genügt, und zu der eine kleinere Minimalabweichung H gehört. Dann gelangt man sofort auf einen Widerspruch durch Betrachtung der Differenz $\sqrt{q} - \sqrt{q_1}$. Sie ist nämlich vom Faktor $\sqrt{\frac{u}{u-1}}$ abgesehen eine rationale Funktion von u mit höchstens 2ν Nullstellen. Da aber $\sqrt{q}$ im Approximationsintervall (k^2, ∞) $2\nu+2$mal die Extremalwerte H und H^{-1} abwechselnd annimmt, so hat im gleichen Intervall $\sqrt{q} - \sqrt{q_1}$ mindestens $2\nu+1$ Vorzeichenwechsel oder Nullstellen, was einen Widerspruch ergibt. Gäbe es neben $\sqrt{q}$ eine weitere Funktion $\sqrt{q_1}$ mit gleicher Minimalabweichung H wie $\sqrt{q}$, so ergibt sich wiederum ein Widerspruch, wenn man berücksichtigt, daß an denjenigen inneren Extremalstellen von $\sqrt{q}$, an denen auch $\sqrt{q_1} = H$ bzw. H^{-1} ist, $\frac{d\sqrt{q}}{du} = \frac{d\sqrt{q_1}}{du} = 0$ ist, also $\sqrt{q} - \sqrt{q_1}$ eine mindestens doppelte Nullstelle besitzen muß.

Fast wörtlich dieselbe Schlußweise zeigt, daß auch die für die Probleme Ib und II angegebenen Lösungen tatsächlich Lösungen sind.

Die explizite Form der Lösungen (13), (28) und (42) zeigt fast unmittelbar, daß nun auch die bisher nicht berücksichtigten Forderungen der „Positivheit"

$$
\begin{aligned}
&1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2\nu} > 0 \quad \text{für Problem Ia} \\
&1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2\nu-1} > 0 \quad \text{für Problem Ib} \\
&1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2\nu'} > -1 \quad \text{für Problem II}
\end{aligned} \tag{45}
$$

befriedigt sind. Denn es gilt

$$
\begin{aligned}
&1 > sn^2\frac{2\nu K}{n} > sn^2\frac{(2\nu-1)K}{n} > \ldots > sn^2\frac{K}{n} > 0 \quad \text{für } n = 2\nu+1 \\
&1 > sn^2\frac{(2\nu-1)K}{n} > sn^2\frac{(2\nu-2)K}{n} > \ldots > sn^2\frac{K}{n} > 0 \quad \text{für } n = 2\nu \\
&1 > sn\frac{(2\nu'-1)K}{n} > sn\frac{(2\nu'-2)K}{n} > \ldots > sn\frac{K}{n} > -sn\frac{K}{n} > \ldots \\
&\qquad > -sn\frac{(2\nu'-1)K}{n} > -1 \quad \text{für } n = 2\nu'+1.
\end{aligned}
$$

Diese Aussagen sind nämlich gleichwertig mit der, daß

$$0 < sn\,x_1K < sn\,x_2K < 1 \quad \text{für} \quad 0 < x_1 < x_2 < 1.$$

Geht man nach (11) zur Weierstraßschen Funktion über, so entsprechen dem die Ungleichungen

$$(46) \qquad \infty > \wp\, x_1 \omega_1 > \wp\, x_2 \omega_1 > e_1 \quad \text{für} \quad 0 < x_1 < x_2 < 1,$$

welche aus $\wp' u > 0$ im Intervall $0 < u < \omega_1$ folgen.

Es ist noch von Interesse, die Lage der Extremalstellen $u_j = \Omega_j^2$, sowie derjenigen Stellen $\Omega_{j-1/2}$ festzustellen, für welche $y = \ln \sqrt{q} = 0$ wird.

Die Größen U_j mögen gemäß (7b) den u_j entsprechen. Es sei $u_0 = k^2 < u_1 < u_2 < \ldots$. Die größte Extremalstelle ist für die Probleme Ia und Ib $u_n = \infty$, dagegen für Problem II die sogleich zu bestimmende Stelle $u_{\nu'} = u_{\overline{n-1}}$. Durch Integration von (8) ergibt sich nach (9)

$$(47) \qquad j\,\overline{\omega}_1 = \int_{e_3}^{U_j} \frac{dU}{\sqrt{4\,U^3 - g_2\,U - g_3}}.$$

Da nach (7b)

$$U_0 = e_3 = \wp\, \omega_3,$$

so wird

$$U_j = \wp\,(\omega_3 + j\,\overline{\omega}_1) = \wp\,(\omega_2 + \omega_1 + j\,\overline{\omega}_1),$$

also

$$u_j = \frac{e_1 - e_2}{\wp\,(\omega_2 - \omega_1 + j\,\overline{\omega}_1) - e_2}.$$

Hieraus folgt nach (11a) und (17)

$$\Omega_j = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{f_2\,(\omega_2 - \omega_1 + j\,\overline{\omega}_1)} = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_3 - e_2}} \cdot \frac{f_2\,(\omega_1 - j\,\overline{\omega}_1)}{\sqrt{e_1 - e_2}}.$$

Führt man nun gemäß (11), (12) und (12a) die Jacobische elliptische Funktion sn ein, so erhält man für die Probleme Ia und Ib, wo $\overline{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{n}$,

$$(48) \qquad \Omega_j = \frac{k}{sn\,\frac{(n-j)\,K}{n}}$$

und für Problem II, wo $\overline{\omega}_1 = \frac{2\,\omega_1}{n}$,

$$(49) \qquad \Omega_j = \frac{k}{sn\,\frac{(n-2\,j)\,K}{n}}.$$

Danach ergibt sich mit Rücksicht auf (13), (28) und (42) der bemerkenswerte Satz:

Die inneren Extremalstellen $\Omega_j\,(=\sqrt{u_j})$ *der Lösungen der Probleme* Ia, Ib *und* II *lassen sich genau je einer Nullstelle oder einem Pol der betreffenden Lösung (als Funktion von* Ω*) zuordnen und umgekehrt, so daß das Produkt zweier zugeordneter Zahlen gleich* k *ist.*

Die Stellen $\Omega_{j-1/2}$, für welche $q=1$ wird, mögen so numeriert sein, daß

$$k<\Omega_{1/2}<\Omega_1<\Omega_{3/2}<\Omega_2<\ldots. \tag{50}$$

Aus der Beziehung

$$\frac{\text{const}\,dq}{\sqrt{q\,(q-H^{-2})\,(H^2-q)}}=\frac{dP}{\sqrt{4P^3-\bar{g}_2P-\bar{g}_3}}=\frac{dU}{\sqrt{4U^3-g_2U-g_3}},$$

wo das Integral der linken Seite zwischen den Grenzen $(1, H^2)$ wegen (36) denselben Wert hat wie dasselbe Integral zwischen den Grenzen $(H^{-2}, 1)$, folgt durch Integration nach U in den Grenzen $(e_3, U_{j-1/2})$ nach (9) analog zu (47)

$$(j-\tfrac{1}{2})\,\bar{\omega}_1=\int_{e_3}^{U_{j-1/2}}\frac{dU}{\sqrt{4U^3-g_2U-g_3}}. \tag{51}$$

Dieselbe Schlußweise wie vorher ergibt für die Probleme Ia und Ib das Resultat

$$\Omega_{j-1/2}=\frac{k}{sn\dfrac{(2n-2j+1)\,K}{2n}} \tag{52}$$

und für Problem II das Resultat

$$\Omega_{j-1/2}=-\frac{k}{sn\dfrac{(n-2j+1)\,K}{n}}. \tag{53}$$

§ 4.

Zurückführung der Approximationsprobleme für TP, HP, BP und BS auf § 3.

Durch geeignete Transformationen der unabhängigen Veränderlichen u bzw. Ω („Frequenztransformationen") lassen sich aus den im vorigen Abschnitt gefundenen Lösungen der normierten Interpolationsprobleme Ia, Ib und II Lösungen für die entsprechenden etwas allgemeineren Approximationsprobleme für die vier einfachsten Typen TP, HP, BP und BS herleiten. Es ist jedoch durchaus nicht selbstverständlich, daß die transformierten Funktionen wieder Approximationen im Tschebyscheffschen Sinne für das neue Problem darstellen. Diese Frage wird nachträglich vollständig diskutiert werden. Dabei stellt sich heraus, daß bei

den Approximationsproblemen der $\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}$ für BP bzw. $\sqrt{z_1 z_2}$ für BS die transformierten Funktionen nicht immer Lösungen im Tschebyscheffschen Sinne des betreffenden neuen Approximationsproblems sind.

Zur Vereinfachung sollen hier die reziproken Klassen (*Klassen, vgl. Anm. 8)) außer Betracht gelassen werden. Man erhält die zugehörigen Tschebyscheffschen Lösungen einfach durch Bildung der reziproken Werte der im folgenden mitgeteilten Lösungen.

a) Nach § 2 liegt für TP oder HP das Problem vor: *Eine Funktion w der Klasse $2\nu+1$ ((6) § 2) oder der Klasse 2ν ((5) § 2) soll so bestimmt werden, daß* $\ln w$ *im Intervall* $(\omega_{k_1}, \omega_{k_2})$, *wo* $\omega_1 < \omega_{k_1} < \omega_{k_2}$ *ist, die Null im Tschebyscheffschen Sinne approximiert.*

Man erhält die Lösung $w = \sqrt{q}$, indem man u in (13) § 3 bzw. (28) § 3 passend transformiert. Die Transformation, welche das Gewünschte leistet, ist von der Form

$$u = \frac{a_0 \omega^2 + b_0}{c_0 \omega^2 + d_0},$$

wo a_0, b_0, c_0, d_0 so zu bestimmen sind, daß 0, 1, ∞ bzw. in 0, ω_1^2, $\omega_{k_2}^2$ übergehen. Bedeutet D „Doppelverhältnis", so ergibt sich die Bedingung

$$D(u, 1, 0, \infty) = D(\omega^2, \omega_1^2, 0, \omega_{k_2}^2)$$

oder mit $u = \Omega^2$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \sqrt{\frac{\omega_{k_2}^2 - \omega_1^2}{\omega_{k_2}^2 - \omega^2}}. \tag{1}$$

Ferner hat man dafür zu sorgen, daß $u = k^2$ in $\omega^2 = \omega_{k_1}^2$ übergeht, also

$$k = \sqrt{\frac{\frac{\omega_{k_2}^2}{\omega_1^2} - 1}{\frac{\omega_{k_2}^2}{\omega_{k_1}^2} - 1}}. \tag{2}$$

Von speziellem Interesse ist der vereinfachte Fall $\omega_{k_2} = \infty$, wo man mit $\omega_{k_1} = \omega_k$ erhält: $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$, $k = \frac{\omega_k}{\omega_1}$.

Ersetzt man in (1) *und* (2) ω *durch* ω^{-1} *und schreibt* $\omega_{k_1}^{-1} = \omega_{z_1}$, $\omega_{k_2}^{-1} = \omega_{z_2}$, $z = k^{-1}$, *so erhält man die Lösung des analogen Approximationsproblems für das Intervall* $(\omega_{z_2}, \omega_{z_1})$ *für die Funktionen der Klasse* $\alpha_{2\nu+1}$ ((8) § 2) *oder* $\alpha_{2\nu}$ ((7) § 2) *bei TP und HP.*

b) Nach § 2 liegen ferner für ein BP oder BS folgende Approximationsprobleme vor: *Eine Funktion w der Klasse $4\nu+2$ ((11) § 2) oder der Klasse 4ν ((9) § 2) oder der Klassen $4\nu+1$ oder $4\nu+3$ ((10) oder (12) § 2) soll so bestimmt werden, daß* $\ln w$ *in den Intervallen* $(0, \omega_{-k})$ *und*

(ω_k, ∞), *wo* $0 < \omega_{-k} < \omega_{-1}, \omega_1 < \omega_k < \infty$ *ist, die Null im Tschebyscheffschen Sinne approximiert.*

Man erhält die Lösung[24]) für $w = \sqrt{q}$, indem man $\Omega = \sqrt{u}$ in (13) § 3, (28) § 3 und (42) § 3 in geeigneter Weise transformiert. Die passende Transformation ist von der Form

$$\Omega = \frac{a_0 \omega^2 + b_0}{c_0 \omega^2 + d_0},$$

wo a_0, b_0, c_0, d_0 jetzt so zu bestimmen sind, daß $-1, 1, k$ bzw. in ω_{-1}^2, ω_1^2, ω_k^2 übergehen. Also wird

$$D(-1, 1, k, \Omega) = D(\omega_{-1}^2, \omega_1^2, \omega_k^2, \omega^2).$$

Darin ist k durch $\omega_{-1}, \omega_1, \omega_{-k}, \omega_k$ festgelegt, da auch $-k$ in ω_{-k}^2 übergehen muß. Aus

$$\varrho^2 = D(\omega_{-1}^2, \omega_1^2, \omega_{-k}^2, \omega_k^2) = D(-1, 1, -k, k) = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2$$

folgt

$$k = \frac{1+\varrho}{1-\varrho}, \tag{3}$$

worin

$$\varrho = \sqrt{\frac{(\omega_k^2 - \omega_1^2)(\omega_{-1}^2 - \omega_{-k}^2)}{(\omega_k^2 - \omega_{-1}^2)(\omega_1^2 - \omega_{-k}^2)}} > 0. \tag{4}$$

Mit dem Wert (3) für k ergibt sich dann als gesuchte Transformation

$$\Omega = \frac{(\sigma+1)\omega^2 - \sigma\omega_{-1}^2 - \omega_1^2}{(\sigma-1)\omega^2 - \sigma\omega_{-1}^2 + \omega_1^2}, \tag{5}$$

worin

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\omega_k^2 - \omega_1^2)(\omega_1^2 - \omega_{-k}^2)}{(\omega_k^2 - \omega_{-1}^2)(\omega_{-1}^2 - \omega_{-k}^2)}} > 0. \tag{6}$$

c) Das eben gelöste Approximationsproblem b) ist zum Teil als Sonderfall in folgendem allgemeineren enthalten: *Für ein BP oder BS gerader Klasse* 2, 4, 6, ... *soll eine Funktion* w *der Form* (11) § 2 *oder* (9) § 2 *so bestimmt werden, daß* $\ln w$ *in den Intervallen* $(\omega_{-k_2}, \omega_{-k_1})$ *und* $(\omega_{k_1}, \omega_{k_2})$, *wo* $0 \leqq \omega_{-k_2} < \omega_{-k_1} < \omega_{-1}$ *und* $\omega_1 < \omega_{k_1} < \omega_{k_2}$ *ist, die Null im Tschebyscheffschen Sinne approximiert.*

Die Lösung kann dann durch passende Transformation von u in $w = \sqrt{q}$ aus (13) § 3 und (28) § 3 abgeleitet werden, wenn die nachher

---

[24]) Vgl. jedoch den schon zu Beginn dieses Paragraphen gemachten Hinweis auf eine nähere Untersuchung darüber am Schluß des Paragraphen.

angegebene Relation (13) zwischen $\omega_{-1}, \omega_1, \omega_{-k_1}, \omega_{k_1}, \omega_{-k_2}, \omega_{k_2}$ besteht. Die hier geeignete Transformation ist von der Form

$$u = \frac{a' v^2 + b'}{c' v^2 + d'},$$

worin wiederum

$$v = \frac{a'' \omega^2 + b''}{c'' \omega^2 + d''}.$$

Die erste dieser Transformationen soll aus der Forderung bestimmt werden, daß die u-Werte 0, 1, ∞ bzw. in die v^2-Werte 0, 1, $k_2^2 > 1$[25]) übergehen. Also wird

$$D(u, 1, 0, \infty) = D(v^2, 1, 0, k_2^2)$$

oder

$$u = \Omega^2 = \frac{v(k_2^2 - 1)}{k_2^2 - v^2}. \tag{7}$$

Die zweite lineargebrochene Transformation wird analog wie die Transformation

$$\Omega = \frac{a_0 \omega^2 + b_0}{c_0 \omega^2 + d_0}$$

bei der zuvor behandelten Aufgabe b) durch die Forderung festgelegt, daß $-1, 1, k_1$ bzw. in $\omega_{-1}^2, \omega_1^2, \omega_{k_1}^2$ übergehen soll. Das gibt die Beziehung

$$D(-1, 1, k_1, v) = D(\omega_{-1}^2, \omega_1^2, \omega_{k_1}^2, \omega^2).$$

Darin wiederum ist k_1 dadurch bestimmt, daß auch $v = -k_1$ in $\omega_{-k_1}^2$ übergehen soll, also

$$\varrho_1^2 = D(\omega_{-1}^2, \omega_1^2, \omega_{-k_1}^2, \omega_{k_1}^2) = D(-1, 1, -k_1, k_1) = \left(\frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}\right)^2,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{(\omega_{k_1}^2 - \omega_1^2)(\omega_{-1}^2 - \omega_{-k_1}^2)}{(\omega_{k_1}^2 - \omega_{-1}^2)(\omega_1^2 - \omega_{-k_1}^2)}} > 0 \text{ [26])}. \tag{8}$$

Daraus folgt

$$v = \frac{(\sigma + 1)\omega^2 - \sigma \omega_{-1}^2 - \omega_1^2}{(\sigma - 1)\omega^2 - \sigma \omega_{-1}^2 + \omega_1^2} \tag{9}$$

mit

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\omega_{k_1}^2 - \omega_1^2)(\omega_1^2 - \omega_{-k_1}^2)}{(\omega_{k_1}^2 - \omega_{-1}^2)(\omega_{-1}^2 - \omega_{-k_1}^2)}}. \tag{10}$$

Ferner soll $u = k^2$ dem Wert $v = \pm k_1$ entsprechen, also nach (7)

$$k^2 = \frac{k_1^2(k_2^2 - 1)}{k_2^2 - k_1^2} = \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 \left(\frac{1 - \varrho_1}{1 + \varrho_1}\right)^2 - 1}. \tag{11}$$

---

[25]) k_2 ist mit τ in Tabelle X der „Siebschaltungen" identisch.

[26]) ϱ_1 ist mit ϱ in Tabelle X, Z. 2, der „Siebschaltungen" identisch.

$v = k_2$ oll $\omega_{k_2}^2$ entsprechen, also

$$k_2 = \frac{(\sigma+1)\,\omega_{k_2}^2 - \sigma\,\omega_{-1}^2 - \omega_1^2}{(\sigma-1)\,\omega_{k_2}^2 - \sigma\,\omega_{-1}^2 + \omega_1^2}. \tag{12}$$

Die letzte Forderung, daß auch $v = -k_2$ in $\omega_{-k_2}^2$ übergehen soll, läßt sich nur erfüllen, wenn eine Relation zwischen $\omega_{-1}, \omega_1, \omega_{-k_1}, \omega_{k_1}, \omega_{-k_2}, \omega_{k_2}$ besteht. Diese Relation kann daraus gewonnen werden, daß man in der Ableitung von (10) die Indizes 1 und 2 vertauscht, woraus folgt:

$$\frac{(\omega_{k_1}^2 - \omega_1^2)(\omega_1^2 - \omega_{-k_1}^2)}{(\omega_{k_1}^2 - \omega_{-1}^2)(\omega_{-1}^2 - \omega_{-k_1}^2)} = \frac{(\omega_{k_2}^2 - \omega_1^2)(\omega_1^2 - \omega_{-k_2}^2)}{(\omega_{k_2}^2 - \omega_{-1}^2)(\omega_{-1}^2 - \omega_{-k_2}^2)}. \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich z. B. ω_{k_2} als Funktion von $\omega_{-1}, \omega_1, \omega_{-k_1}, \omega_{k_1}, \omega_{-k_2}$:

$$\omega_{k_2}^2 = \frac{\omega_1^4 - \sigma^2\,\omega_{-1}^4 + (\sigma\,\omega_{-1}^2 - \omega_1^2)\,\omega_{-k_2}^2}{\omega_1^2 - \sigma^2\,\omega_{-1}^2 + (\sigma^2-1)\,\omega_{-k_2}^2}\ ^{27}). \tag{13a}$$

d) Schließlich hat man für ein BP oder BS die folgende Aufgabe: *Es soll eine Funktion w der Klasse $a_{4\nu+2}$ ((14) § 2) oder der Klasse $a_{4\nu}$ ((13) § 2) so bestimmt werden, daß $\ln w$ im Intervall (ω_{-x}, ω_x), wo $\omega_{-1} < \omega_{-x} < \omega_x < \omega_1$ ist, die Null im Tschebyscheffschen Sinne approximiert.*

Durch Beschränkung der Aufgabe auf den Fall

$$\omega_{-x}\,\omega_x = \omega_{-1}\,\omega_1 \tag{14}$$

wird es wieder möglich, die Lösung in der Form $w = \sqrt{q}$ mit $\sqrt{q}$ aus (13) § 3 und (28) § 3 durch geeignete Transformation von $u = \Omega^2$ zu erhalten. Das Gewünschte leistet die Transformation

$$u = \frac{a'\,v^2 + b'}{c'\,v^2 + d'},$$

worin a', b', c', d' so bestimmt werden, daß $u = 0, 1, \infty$ bzw. in $v^2 = \delta^2, 1, 0$ übergehen, in Verbindung mit der weiteren Transformation

$$v = \frac{a''\,\omega^2 + b''}{c''\,\omega^2 + d''},$$

die so gewählt wird, daß $v = -\delta, -1, 1, \delta$ bzw. in $\omega = 0, \omega_{-1}, \omega_1, \infty$ übergeführt werden. δ ist dabei so zu bestimmen, daß die letzte Forderung erfüllbar ist, was die Bedingung gibt:

$$D(-1, 1, -\delta, \delta) = D(\omega_{-1}^2, \omega_1^2, 0, \infty)$$

oder

$$\delta = \frac{\omega_1 + \omega_{-1}}{\omega_1 - \omega_{-1}}.$$

---

27) Der Zähler dieses Ausdrucks ist in Tabelle X der „Siebschaltungen" versehentlich falsch angegeben worden.

Gemäß den beiden Forderungen zur Festlegung der beiden linear-gebrochenen Transformationen ergeben sich die Beziehungen

$$D(u, 1, 0, \infty) = D(v^2, 1, \delta^2, 0)$$

oder

$$u = \Omega^2 = \frac{\delta^2 - v^2}{v^2(\delta^2 - 1)}$$

und

$$D(-1, 1, \delta, v) = D(\omega_{-1}^2, \omega_1^2, \infty, \omega^2)$$

oder

$$v = \frac{\delta(\omega^2 - \omega_{-1}\omega_1)}{\omega^2 + \omega_{-1}\omega_1}$$

und schließlich

$$\Omega^{28}) = \frac{\omega(\omega_1 - \omega_{-1})}{\omega^2 - \omega_{-1}\omega_1}. \tag{15}$$

Damit den Werten $\omega_{-\varkappa}$ und $\omega_\varkappa$ derselbe Wert $u = k^2$ entspricht, bzw. damit ihnen die Werte $\Omega^{-1} = \pm\varkappa = \pm k^{-1}$ entsprechen, hat man die Gleichungen

$$\varkappa = \frac{\omega_\varkappa^2 - \omega_{-1}\omega_1}{\omega_\varkappa(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

und

$$-\varkappa = \frac{\omega_{-\varkappa}^2 - \omega_{-1}\omega_1}{\omega_{-\varkappa}(\omega_1 - \omega_{-1})}$$

zu befriedigen. Daraus folgt außer (14)

$$k^{-1} = \varkappa = \frac{\omega_\varkappa - \omega_{-\varkappa}}{\omega_1 - \omega_{-1}}. \tag{16}$$

Hiermit sind alle Fälle von Typen und Klassen symmetrischer Siebschaltungen diskutiert, deren Tschebyscheffsches Approximationsproblem auf die Differentialgleichung (5) § 3 und damit auf ein Transformationsproblem der elliptischen Funktionen zurückgeführt werden kann.

Man überzeugt sich leicht davon, daß infolge (46) § 3 alle transformierten Funktionen die für die Positivheit maßgebenden Ungleichungen wie z. B. (12a) § 2 erfüllen. Dasselbe gilt offenbar unter der allgemeineren Voraussetzung der Gültigkeit der Ungleichungen (45) § 3. Man erhält also stets aus irgendwelchen den Ungleichungen (45) genügenden approximativen Lösungen der normierten Probleme des § 3 durch die eben diskutierten Frequenztransformationen Approximationsfunktionen der Klasse $\mathfrak{Q}$ für TP, HP, BP oder BS. Doch bleibt noch die Frage

---

[28]) Gemäß den Bezeichnungen der „Siebschaltungen“ ist hierfür $\widetilde{\Omega}^{-1}$ zu schreiben.

offen, ob und inwieweit die transformierten Funktionen Approximationen im Tschebyscheffschen Sinne sind, falls von den Tschebyscheffschen Lösungen (13) § 3, (28) § 3 und (42) § 3 ausgegangen wird. Diese Frage soll jetzt untersucht werden. Dabei soll auch der Fall c_1) mit in Betracht gezogen werden, der sich aus c) ergibt, wenn dort unter der Voraussetzung $0 \leqq \omega_{-k_2} < \omega_{-k_1} < \omega_{-1}, \omega_1 < \omega_{k_1}$ die nach (13a) berechnete Größe $\omega_{k_2}^2$ kleiner als $\omega_{-k_2}^2$ ausfällt, was vorkommen kann, oder, wenn unter der Voraussetzung $0 < \omega_{-k_1} < \omega_{-1}, \omega_1 < \omega_{k_1} < \omega_{k_2}$ die nach (13) berechnete Größe $\omega_{-k_2}^2$ negativ oder größer als $\omega_{k_2}^2$ ausfällt. *Als Approximationsintervalle sind im Fall* c_1) $(\omega_{-k_2}, \omega_{-k_1})$ *und* (ω_{k_1}, ∞) *oder* $(0, \omega_{-k_1})$ *und* $(\omega_{k_1}, \omega_{k_2})$ *anzusehen.* Die Frage ist dann, ob und wieweit die aus (13) § 3 und (28) § 3 durch die Transformation (7), (9) abgeleiteten Funktionen Approximationen im Tschebyscheffschen Sinne für die eben genannten Approximationsintervalle liefern.

Der Beweis dafür, daß neben w keine bessere oder gleich gute Approximation w_1 mit $\operatorname{Max}(|\ln w_1|) \leqq H$ existiert, kann ganz nach dem Muster des analogen Beweises für $\sqrt{q}$ in § 3 geführt werden. Dabei genügt es nach § 3, sich beim Beweis auf die Annahme $\operatorname{Max}(|\ln w_1|) < H$ zu beschränken. Für BP und BS (zwei getrennte Approximationsintervalle) kommt es aber vor, daß ein solcher Beweis versagt. Um dann mit Sicherheit sagen zu können, daß keine Approximation im Tschebyscheffschen Sinne vorliegt, ist es noch erforderlich, zu untersuchen, ob diejenigen notwendigen Bedingungen erfüllt sind, welche der Unlösbarkeit des Gleichungssystems (2) § 3 entsprechen.

Es sei l_1 die Höchstzahl derjenigen Extrema von w, die ins Innere und auf den Rand der Approximationsintervalle fallen können, und es sei l_2 die Gesamtzahl der Faktoren $(\lambda^2 + \omega_s^2)$ in Zähler und Nenner von w. Dann ist für a) und b), Klasse $2\nu' + 1$ $l_1 = l$, für c) $l_1 = 2l$, für b), Klassen $4\nu + 2$ und 4ν, c_1) und d) $l_1 = 2l - 1$, wobei die Werte l aus (3) § 3, (22) § 3 und (34) § 3 zu entnehmen sind. Die Zahl l_2 ergibt sich sofort aus (5) bis (14) § 2. Die so ermittelten Werte l_1 und l_2 sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

TP, HP			BP, BS				
	a		b	c	c_1	d	
Klassen	$\begin{vmatrix} 2\nu+1 \\ \alpha_{2\nu+1} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2\nu \\ \alpha_{2\nu} \end{vmatrix}$	$4\nu+2$ 4ν $2\nu'+1$	$4\nu+2$ 4ν	$4\nu+2$ 4ν	$a_{4\nu+2}$	$a_{4\nu}$
l_1	$2\nu+2$	$2\nu+1$	$4\nu+3$ $4\nu+1$ $2\nu'+2$	$4\nu+4$ $4\nu+2$	$4\nu+3$ $4\nu+1$	$4\nu+3$	$4\nu+1$
			b, c, c_1				
l_2	2ν	$2\nu-1$	Klassen $4\nu+2$ 4ν $2\nu'+1$ $4\nu+1$ $4\nu-1$ $2\nu'$			4ν	$4\nu-2$

Die Höchstzahl l_1 der Extrema wird stets angenommen in den Fällen a), c) und d). Für b) und c_1) wird sie nur dann angenommen, wenn — von ω_{k_2} bzw. ω_{-k_2} für c_1) abgesehen — alle Extrema der Approximationsintervalle von $\sqrt{q}$ in § 3 vermöge der Frequenztransformation ins Innere oder auf den Rand der neuen Approximationsintervalle fallen. Die Anzahl der Nullstellen von $w - w_1$ als Funktion von ω^2 ist mindestens gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel von w in den polfreien Intervallen. Diese ist $l_1 - 1$ für a) und d), $l_1 - 2$ für c), dagegen für b) und c_1) nur dann $l_1 - 1$, wenn die Höchstzahl der Maxima l_1 erreicht wird, sonst eine kleinere Zahl. Die Zahl $l_1 - 1$ ergibt sich für b) und c_1), wenn man berücksichtigt, daß hier $\ln w$ an den beiden äußersten Extremalstellen der Approximationsintervalle entgegengesetztes Vorzeichen hat. Die Maximalzahl der Nullstellen von $w - w_1$ — die Faktoren λ, $\sqrt{\lambda^2 + \omega_{-1}^2}$, $\sqrt{\lambda^2 + \omega_1^2}$ werden hier nicht mitgezählt — ist offenbar l_2. Daraus folgt *in den Fällen* a), c) *und* d) *und den Fällen* b) *und* c_1) *mit maximaler Zahl der Extrema in den Approximationsintervallen ein Widerspruch. Bessere oder gleich gute Approximationen* w_1 *als* w *kann es dann nicht geben.*

Es bleibt noch übrig festzustellen, daß in den Fällen b) *und* c_1) w *sicher keine Approximation im Tschebyscheffschen Sinne darstellt, wenn die Höchstzahl der Extrema nicht erreicht wird.* Der Beweis ergibt sich daraus, daß dann die zu (2a) § 3 analogen Ungleichungen

$$f(\omega_{(j)}^2) \equiv \lambda_0 \varphi(\omega_{(j)}^2) + \varphi(\omega_{(j)}^2) \cdot \sum_{i=1}^{l_2} \frac{\lambda_i}{\omega_{(j)}^2 - \omega_i^2} = v_j', \tag{17}$$

worin

$$\varphi(\omega^2) = \prod_{i=1}^{l_2} (\omega^2 - \omega_i^2)$$

gesetzt ist, ω_i für die ω_{-a_j} und ω_{a_j} steht und $\omega_{(j)}$ die Extremalstellen bedeuten, für zulässige (im Vorzeichen mit $\varphi(\omega_{(j)}^2) \ln w(i\omega_{(j)})$ übereinstimmende) v_j eine Lösung besitzen. Nur diejenigen Extremalstellen sind in das Gleichungssystem (17) aufzunehmen, welche im Innern oder am Rande der beiden Approximationsintervalle liegen. Da

$$\operatorname{sgn} \frac{\varphi(\omega_{-k}^2) \ln w(i\omega_{-k})}{\varphi(\omega_k^2) \ln w(i\omega_k)} = -1$$

bzw.

$$\operatorname{sgn} \frac{\varphi(\omega_{-k_1}^2) \ln w(i\omega_{-k_1})}{\varphi(\omega_{k_1}^2) \ln w(i\omega_{k_1})} = -1$$

ist, ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel der v'_j, wenn die $\omega_{(j)}$ der Größe nach geordnet sind, um 1 kleiner als die Anzahl der $\omega_{(j)}$, also höchstens $l_1 - 2$. Der Grad von $f(x)$ ist nach (17) aber l_2, also nach obiger Tabelle stets $l_1 - 2$ für die Fälle b) und c_1). Daher sind die Gleichungen (17) in den zur Diskussion stehenden Fällen stets lösbar.

Liegt der Fall vor, wo die Frequenztransformation (5), (6) für die Probleme b) eine Lösung gibt, fallen also alle Extremalstellen ins Innere oder auf den Rand der beiden Approximationsintervalle $(0, \omega_{-k})$ und (ω_k, ∞) wobei $\omega_{(l)}$ die Extremalstelle am weitesten links, $\omega_{(r)}$ diejenige am weitesten rechts sein möge, so ändert sich offenbar an der Lösung des Approximationsproblems nichts, wenn die untere Grenze des linken Approximationsintervalls durch irgendeinen Wert aus dem abgeschlossenen Intervall $(0, \omega_{(l)})$ und die obere Grenze durch irgendeinen Wert aus dem abgeschlossenen Intervall $(\omega_{(r)}, \infty)$ ersetzt wird. Analoges gilt für den Fall c_1).

Ist bei den auf BP und BS bezüglichen Approximationsproblemen b), wie es praktisch oft vorkommt, der echte Bruch $\frac{\omega_{-1}}{\omega_1}$ sehr nahe an 1 gelegen, d. h. hat man es mit relativ sehr engen BP oder BS zu tun, so ist es „sehr unwahrscheinlich", daß die Transformation (5), (6) keine Tschebyschefflösung ergibt, d. h. eine Extremalstelle nach der Transformation außerhalb der Approximationsintervalle fällt. Wenn dies doch sein sollte, so folgt aus einer Stetigkeitsbetrachtung, daß die durch die Transformation (5), (6) gefundene Approximationsfunktion w der Tschebyschefflösung eng benachbart ist. Präziser ist das so zu verstehen: wir fragen nach denjenigen Werten Ω_0, Ω_∞, die $\omega = 0$ und $\omega = \infty$ entsprechen. Es sind dies nach (5) die Werte

$$\Omega_0 = \frac{\sigma \frac{\omega_{-1}^2}{\omega_1^2} + 1}{\sigma \frac{\omega_{-1}^2}{\omega_1^2} - 1}, \qquad \Omega_\infty = \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1}. \tag{18}$$

Das Intervall $(-\infty, 0)$ für ω entspricht dem Intervall $(\Omega_0^{-1}, \Omega_\infty^{-1})$ für Ω^{-1}. Die Länge dieses Intervalls beträgt

$$\Omega_\infty^{-1} - \Omega_0^{-1} = \frac{2\sigma}{(\sigma+1)\left(\sigma \frac{\omega_{-1}^2}{\omega_1^2} + 1\right)} \cdot \left(1 - \frac{\omega_{-1}^2}{\omega_1^2}\right),$$

geht also gegen 0, wenn ω_{-1}/ω_1 gegen 1 strebt. Es ist also bei Werten ω_{-1}/ω_1 nahe an 1 „unwahrscheinlich", daß gerade eine Extremalstelle

Ω_j^{-1} in dieses Intervall fällt. Tatsächlich liegt aber z. B. keine Tschebyschefflösung im strengen Sinne vor, wenn σ der Bedingung

$$\sigma > 1 > \sigma \frac{\omega_{-1}^2}{\omega_1^2} \tag{19}$$

genügt.

Um in den Fällen b) oder c_1) stets eine genaue Aussage darüber machen zu können, ob die Frequenztransformation (5), (6) oder (7), (9), (10) eine Tschebyschefflösung liefert oder nicht, hat man nur die Frequenztransformation auf die in (48) § 3 und (49) § 3 berechneten Werte Ω_j auszuüben und festzustellen, ob die transformierten $\omega_{(j)}$ alle in die Approximationsintervalle fallen oder nicht.

(Eingegangen am 17. August 1932.)

Zur differentiellen Liniengeometrie einer zwölfgliedrigen Gruppe.

Von

Herbert Knothe in Bremen.

In dieser Arbeit sollen die Strahlensysteme und Regelflächen auf Eigenschaften hin untersucht werden, die gegenüber den Transformationen des Strahlenraumes durch die zwölfgliedrige Gruppe der reell-dualen Kollineationen, die die reell-duale Einheitskugel in sich überführen, invariant sind. Stellt man eine Gerade des Raumes als dualen Punkt der Einheitskugel dar (Studysches Übertragungsprinzip)[1]), projiziert die Einheitskugel stereographisch auf die komplex-duale Zahlenebene und ordnet so die Geraden des Raumes eineindeutig den dual-komplexen Punkten der Gaußschen Zahlenebene zu, so haben die Transformationen der eben genannten Gruppe folgende Gestalt (die dual-komplexen Punkte der Gaußschen Zahlenebene seien mit $T = r + i\,s + \varepsilon\,(\bar{r} + i\,\bar{s})$ bezeichnet):

$$T^* = \frac{A\,T + B}{C\,T + D}, \quad \varepsilon^2 = 0.$$

Hierin bedeuten A, B, C, D dual-komplexe Konstanten von der Form $a + i\,b + \varepsilon\,(\bar{a} + i\,\bar{b})$, wobei a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$ reelle Konstanten sind. Dieselben Transformationen lassen sich auch so deuten[2]): Die reellen gerichteten Geraden des Raumes lassen sich bekanntlich eineindeutig den durch sie hindurchgehenden Minimalebenen zuordnen. Unterwirft man die Minimalebenen komplexen Bewegungen, so induzieren diese Bewegungen eben unsere zwölfgliedrige Gruppe von Geradentransformationen. Die Geometrie dieser Transformationen ist in algebraischer Hinsicht insbesondere von Blaschke untersucht worden in seiner zitierten Abhandlung[2]), in der man sich auch über die übrige unseren Gegenstand betreffende Literatur

[1]) Vgl. E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903.

[2]) Vgl. W. Blaschke, Monatshefte für Mathematik und Physik 21 (1910), S. 201—308.

orientieren kann[3]). In der eben erwähnten Arbeit sind auch die hier besondere Verwendung findenden Gebilde behandelt, die durch die Transformationen der zwölfgliedrigen Gruppe wieder in gleichartige Gebilde übergeführt werden. Auch die Invarianten zweier Garben sind in der Blaschkeschen Arbeit gegeben und geometrisch gedeutet worden. Auf diese Deutung stützt sich vornehmlich die ganze vorliegende Arbeit. Auch die Terminologie habe ich vollkommen aus der Blaschkeschen Abhandlung übernommen. Die Definitionen der Begriffe „Garbe", „Speerkette", „Speerkugel" seien hier kurz wiederholt. *Garbe*: Unter Garbe versteht man die Gesamtheit der reellen Geraden, die auf den durch einen festen Punkt hindurchgehenden Minimalebenen liegen. *Speerkette*: Greift man aus einer Garbe ∞^1 Geraden von der Art heraus, daß ihre Einheitsvektoren, vom Ursprung aus abgetragen, auf der Einheitskugel einen Kreis liefern, so bildet die Gesamtheit dieser Geraden eine Speerkette. *Speerkugel*: Die Gesamtheit aller Geraden, die von einer festen Geraden einen gleichen kürzesten Abstand haben und mit dieser Geraden einen festen Winkel einschließen, bildet eine Speerkugel.

Die speziellen Geradentransformationen der zwölfgliedrigen Gruppe, die durch eine rein imaginäre Translation der Minimalebenen entstehen, bezeichnen wir mit Blaschke als Querschiebungen.

§ 1.

Beziehungen zwischen Regelflächen und isotropen Kurven.

Das Studium gegenüber G_{12} invarianter Eigenschaften einer reellen Regelfläche läßt sich im allgemeinen zurückführen auf die Untersuchung isotroper Kurven im komplexen Raum. Unter isotroper Raumkurve ist eine Raumkurve mit identisch verschwindender Bogenlänge gemeint. In der Einleitung wurde schon betont, daß unsere zwölfgliedrige Gruppe von Strahlentransformationen isomorph ist mit der Gruppe von komplexen Bewegungen der Minimalebenen, auf die wir die reellen gerichteten Geraden des Raumes eineindeutig abbilden können. Da die den Geraden einer Regelfläche zugeordneten Minimalebenen im allgemeinen eine isotrope Kurve umhüllen (die Regelflächen, bei denen diese isotrope Kurve auf einen Punkt zusammenschrumpft, wollen wir zunächst ausschließen) und umgekehrt jeder von einem reellen Parameter abhängenden isotropen Raumkurve eine reelle Regelfläche entspricht, deren Minimalebenen die vor-

[3]) Die „Vorlesungen über Differentialgeometrie" von Blaschke zitiere ich kurz als „Blaschke, Dffg.". Die beigesetzte Ziffer gibt den Band des Werkes an. Bei dem ersten und zweiten Bande beziehe ich mich auf die zweite, bei dem dritten auf die erste Auflage.

gegebene isotrope Kurve einhüllen, ist jede reelle Regelfläche hinsichtlich der G_{12} äquivalent einer isotropen Raumkurve. Nennen wir unsere isotrope Raumkurve $\mathfrak{Z}(t)$, so ist die Schmiegebene von $\mathfrak{Z}(t)$ im Punkte $\mathfrak{Z}(t_0)$ identisch mit der zu dem Strahl $\mathfrak{a}(t_0)$ gehörigen Minimalebene, wenn wir kurz unsere reelle Regelfläche durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{a}(t)$ ihrer Strahlen darstellen. Die zu dem Punkte $\mathfrak{Z}(t_0)$ gehörige Garbe geht durch $\mathfrak{a}(t_0)$ und zwei benachbarte Geraden der Regelfläche hindurch. Eine Garbe mit diesen Eigenschaften wollen wir Schmieggarbe nennen. Explizit läßt sich $\mathfrak{Z}$ so darstellen:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{x} - i\vartheta\,\mathfrak{a} + \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}' - i\vartheta'}{\mathfrak{a}'^2}(\mathfrak{a}' + i\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}'); \tag{1}$$

$\mathfrak{x}(t)$ bedeutet die Kehllinie, ϑ den Drall[4]) unserer Regelfläche $\mathfrak{R}$.

§ 2.

Einfachste Regelfläche, die gegenüber G_{12} invariant mit $\mathfrak{R}$ verknüpft ist.

Es sei $f(t)$ eine Funktion von t. Unter $\hat{f}'(t)$ wollen wir die folgende Größe

$$\frac{f'(t)}{\sqrt[4]{\mathfrak{Z}''^2(t)}}$$

verstehen und als invariante Ableitung von $f(t)$ bezeichnen (vgl. Blaschke, Dffg. **3**, S. 127). Weiter wollen wir fordern:

$$\hat{\mathfrak{Z}}''\,\mathfrak{a} = 1. \tag{2}$$

Diese Normierung legt ebenso wie die Vessiotsche das Vorzeichen von

$$\sqrt{\hat{\mathfrak{Z}}''^2}$$

fest, dürfte aber für unsere Zwecke angemessener sein, da sie es, wie wir später sehen werden, gestattet, den Sinn, in dem der Ausdruck Kehlpunktabstand $- i \cdot$ Dralldifferenz zu bilden ist, ohne große Mühe zu bestimmen. Der Begriff Kehlpunktabstand $- i \cdot$ Dralldifferenz weist in dieser Arbeit eine vollkommene Analogie zu dem Begriff des Winkels auf. Die Invarianz unserer Normierung wird noch augenfälliger, wenn wir die gleichwertige Forderung aufstellen, daß die den Schmiegebenen unserer Kurve $\mathfrak{Z}(t)$ entsprechenden Minimalvektoren eine Richtung haben sollen, die proportional ist

$$\mathfrak{v}' + i\,\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}'$$

(vgl. (3)).

Die Vektoren

$$\hat{\mathfrak{Z}}' = \mathfrak{r}, \quad \hat{\mathfrak{Z}}'' = \mathfrak{v}, \quad \hat{\mathfrak{Z}}''' = \mathfrak{w} \tag{3}$$

---

[4]) Über die Begriffe Kehlpunkt, Kehllinie, Drall und den später Verwendung findenden Begriff Asymptotenebene vgl. Blaschke, Dffg. **1**, S. 195.

bilden das sogenannte begleitende Dreibein der Kurve $\mathfrak{Z}(t)$. Da das Quadrat ihrer Determinante -1 ist, kann jeder Vektor aus ihnen linear kombiniert werden. $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ genügen den bekannten Beziehungen:

$$\text{(4a)} \qquad \mathfrak{r}^2 = 0, \quad \mathfrak{v}^2 = 1, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{v} = 0, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{w} = -1, \quad \mathfrak{v}\mathfrak{w} = 0,$$

$$\text{(4b)} \qquad \hat{\mathfrak{w}}' = \frac{\hat{\mu}'}{2}\mathfrak{r} + \mu\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{w}^2 = -\mu.$$

Alle Garben, die den Punkten der komplexen Geraden $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{Z} + \Lambda\mathfrak{v}$$

($\mathfrak{B}$ ist der laufende Punkt der Geraden, dargestellt mit Hilfe des Parameters Λ) entsprechen, gehen durch zwei feste Geraden hindurch, von denen die eine die dem Punkte $\mathfrak{Z}$ zugeordnete reelle Gerade ist. Die andere der beiden Geraden liefert uns die angekündigte gegenüber der G_{12} invariant mit $\mathfrak{R}$ verbundene reelle Gerade $\mathfrak{E}$. Sie liegt in derjenigen der beiden durch $\mathfrak{B}$ gehenden Minimalebenen, die nicht Schmiegebene von $\mathfrak{Z}$ ist.

§ 3.

Invarianten einer Regelfläche gegenüber der G_{12}.

Real- und Imaginärteil der Größe μ sowie der Quotient

$$\frac{R(\mathfrak{Z}''^2)}{J(\mathfrak{Z}''^2)},$$

wobei $\Re(\mathfrak{Z}''^2)$ den Real-, $J(\mathfrak{Z}''^2)$ den Imaginärteil der Größe $\mathfrak{Z}''^2$ bedeutet, liefern uns das vollständige Invariantensystem der Regelfläche $\mathfrak{R}$. Dabei ist vorausgesetzt

$$J(\mathfrak{Z}''^2) \neq 0.$$

Sind die eben genannten drei Invarianten als Funktionen eines natürlichen Parameters der isotropen Kurve gegeben (als natürlichen Parameter kann man etwa den nehmen, der zur Folge hat, daß $R(\mathfrak{Z}'^2) = \pm 1$ oder $J(\mathfrak{Z}''^2) = \pm 1$), so sind alle in der Ableitungsgleichung auftretenden Koeffizienten bekannt. Das heißt aber: Die Kenntnis dieser drei Invarianten als Funktionen eines natürlichen Kurvenparameters zieht die Kenntnis aller anderen Invarianten nach sich.

§ 4.

Geometrische Deutung von $\mathfrak{E}$.

Zu der hier benutzten Bezeichnungsweise ist folgendes zu bemerken: Zwei Garben haben im allgemeinen zwei Geraden gemeinsam. Sie sollen Schnittgeraden der beiden Garben genannt werden. Die Gesamtheit der ∞^2 Garben, die durch zwei feste Geraden hindurchgehen, soll Garben-

büschel heißen. Die den Garben des Büschels zugeordneten komplexen Punkte liegen auf einer komplexen Geraden. Wenn diese Gerade in eine Minimalgerade ausartet, so haben die zu den Punkten der Minimalgeraden gehörigen Garben nur eine Gerade gemeinsam. Die Garben berühren sich in dieser Geraden, d. h. sie haben in der gemeinsamen Geraden alle den gleichen Drall und den gleichen Kehlpunkt.

Um $\mathfrak{E}$ geometrisch zu deuten, bestimmen wir ein Garbenbüschel von folgender Eigenschaft: *Die vier benachbarten Garben des Büschels, die* $\mathfrak{a}(t_0)$ *bzw. drei zu* $\mathfrak{a}(t_0)$ *benachbarte Geraden der Regelfläche enthalten, sollen die Regelfläche in diesen Geraden unter gleichem Kehlpunktabstand und gleicher Dralldifferenz schneiden. Die Garbe des Büschels, die durch* $\mathfrak{a}(t_0)$ *hindurchgeht, schneidet die Schmieggarbe* $\mathfrak{Z}(t_0)$ *außer in* $\mathfrak{a}(t_0)$ *noch in* $\mathfrak{e}(t_0)$[5]). Um das zu beweisen, setzen wir die Garben $\mathfrak{Y}$ des Büschels, die die Regelfläche schneiden, in der Form an:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(t).$$

Dann gilt die Beziehung:

$$\mathfrak{Y}(t) = \mathfrak{Z}(t) + \sigma(t)\,\mathfrak{r}(t) + \Lambda(t)\,\mathfrak{v}(t). \tag{5}$$

In $\mathfrak{a}(t)$ habe die Garbe $\mathfrak{Y}(t)$ den Drall $\overline{\vartheta}(t)$ und den Kehlpunkt $\overline{\mathfrak{x}}(t)$; $\Lambda(t)$ hat dann offenbar die Bedeutung:

$$\Lambda(t) = \mathfrak{a}(\overline{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}) - i(\overline{\vartheta} - \vartheta) \qquad \text{(vgl. (2))}.$$

Nun sollen $\mathfrak{Y}(t_0)$ und die drei zu $\mathfrak{Y}(t_0)$ benachbarten Garben des Büschels die Regelfläche $\mathfrak{R}$ unter gleicher Dralldifferenz und gleichem Kehlpunktabstand schneiden. An der Stelle t_0 muß daher gelten:

$$\Lambda' = 0, \quad \Lambda'' = 0, \quad \Lambda''' = 0.$$

Darauf leiten wir (5) dreimal invariant nach t ab:

$$\hat{\mathfrak{Y}}' = (1 + \hat{\sigma}')\,\mathfrak{r} + \sigma\,\mathfrak{v} + \Lambda\,\mathfrak{w},$$

$$\hat{\mathfrak{Y}}'' = \left(\hat{\sigma}'' + \frac{\Lambda}{2}\,\hat{\mu}'\right)\mathfrak{r} + (1 + 2\,\hat{\sigma}' + \Lambda\,\mu)\,\mathfrak{v} + \sigma\,\mathfrak{w},$$

$$\hat{\mathfrak{Y}}''' = \left(\hat{\sigma}''' + \frac{\Lambda}{2}\,\hat{\mu}'' + \sigma\,\frac{\hat{\mu}'}{2}\right)\mathfrak{r} + \left(3\,\hat{\sigma}'' + \frac{3\,\Lambda}{2}\,\hat{\mu}' + \sigma\,\mu\right)\mathfrak{v} + (1 + 3\,\hat{\varrho}' + \Lambda\,\mu)\,\mathfrak{w}.$$

Jetzt ist zu beachten, daß die Garben $\mathfrak{Y}$ einem Büschel angehören sollen. $\hat{\mathfrak{Y}}''$, $\hat{\mathfrak{Y}}'''$ müssen also bis auf Proportionalitätsfaktoren mit $\hat{\mathfrak{Y}}'$ zusammenfallen.

---

[5]) Wir haben die Geraden der Regelfläche $\mathfrak{E}$ wieder durch ihre Einheitsvektoren $\mathfrak{e}(t)$ gekennzeichnet.

$\hat{\mathfrak{Y}}'' = p\,\hat{\mathfrak{Y}}'$ liefert:

$$\frac{\sigma}{\Lambda} + \frac{\sigma\,\hat{\sigma}'}{\Lambda} = \hat{\sigma}'' + \frac{\Lambda}{2}\hat{\mu}', \tag{6a}$$

$$1 + 2\,\hat{\sigma}' + \Lambda\,\mu = \frac{\sigma^2}{\Lambda}. \tag{6b}$$

(6b) invariant abgeleitet lautet:

$$2\,\hat{\sigma}'' + \Lambda\,\hat{\mu}' = \frac{2\,\sigma\,\hat{\sigma}'}{\Lambda}.$$

Diese Gleichung ist mit (6a) nur unter der Bedingung $\sigma = 0$ verträglich. Wenn $\sigma = 0$, kann auch der Forderung

$$\hat{\mathfrak{Y}}''' = q\,\hat{\mathfrak{Y}}'$$

genügt werden. $\sigma = 0$ sagt aus, daß die Garbe $\mathfrak{Y}(t_0)$ durch $\mathfrak{e}(t_0)$ hindurchgeht, womit der Beweis für die gegebene geometrische Deutung erbracht ist.

§ 5.

Geometrische Deutung von μ.

Durch $\mathfrak{a}(t_0)$ und zwei zu $\mathfrak{a}(t_0)$ benachbarte Geraden der Regelfläche $\mathfrak{R}$ seien drei Garben gelegt, die zwei Geraden gemeinsam haben sollen und die Regelfläche $\mathfrak{R}$ in der Geraden $\mathfrak{a}(t_0)$ und ihren zwei benachbarten unter gleicher Dralldifferenz L und gleichem Kehlpunktabstand E schneiden sollen. Außerdem sollen die Garben, die durch die Gerade $\mathfrak{a}(t_0)$ bzw. die zu ihr von erster Ordnung benachbarte hindurchgehen, noch die Gerade $\mathfrak{e}(t_0)$ bzw. die zu ihr von erster Ordnung benachbarte enthalten. Dann ist

$$E - i\,L = -\frac{1}{\mu}.$$

Das folgt unmittelbar aus (6b), wenn man darin setzt $\sigma = 0$, $\hat{\sigma}' = 0$.

§ 6.

Zweite Deutung von μ.

Alle Garben $\mathfrak{G}$, die die Regelfläche $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{e}(t_0)$ berühren, schneiden die Schmieggarbe $\mathfrak{Z}(t_0)$ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{e}(t_0)$ so, daß

$$\overline{E} - i\,\overline{L} = \frac{2}{\mu}.$$

$\overline{E}$ bedeutet den Kehlpunktabstand, $\overline{L}$ die Dralldifferenz von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{Z}$ in der Schnittgeraden $\mathfrak{e}(t_0)$. *Die Differenz L ist dabei in demselben Sinne wie $\mathfrak{G} - \mathfrak{Z}$ zu bilden.* Beweis: Die komplexen Punkte $\mathfrak{G}$ liegen auf der

Schnittgeraden (Minimalgerade) der durch $\mathfrak{e}(t_0)$ und ihre benachbarte Gerade gehenden Minimalebenen, die nicht Schmiegebenen von $\mathfrak{Z}(t)$ sind. Die Gleichungen dieser Minimalebenen lassen sich so ansetzen:

$$(\mathfrak{G} - \mathfrak{Z})\,\mathfrak{p} = 0. \tag{7}$$

$\mathfrak{p}$ muß die Bedingung befriedigen:

$$\mathfrak{p}^2 = 0, \quad \mathfrak{p}\,\mathfrak{v} = 0. \tag{8}$$

$\mathfrak{p}$ werde aus $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ linear kombiniert:

$$\mathfrak{p} = \lambda\,\mathfrak{r} + \varrho\,\mathfrak{v} + \sigma\,\mathfrak{w}.$$

(8) bestimmt die Koeffizienten in folgender Weise:

$$\varrho = 0, \quad \lambda = -\frac{\sigma\,\mu}{2}.$$

$\mathfrak{E}$ läßt sich daher in der Form schreiben:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} + \nu\,\mathfrak{v} + \sigma\left(-\frac{\mu}{2}\,\mathfrak{r} + \mathfrak{w}\right). \tag{8a}$$

Daß die Garben $\mathfrak{G}$ die Regelfläche $\mathfrak{E}$ berühren, findet darin seinen Ausdruck, daß die linke Seite von (7), bei festem $\mathfrak{G}$ invariant abgeleitet, verschwindet. Das gibt die Beziehung

$$\nu = -\frac{2}{\mu}.$$

Entsinnen wir uns jetzt der im § 2 gegebenen Normierung, aus der wir $\mathfrak{v}\,\mathfrak{e} = -1$ entnehmen, so folgt aus (8a):

$$(\mathfrak{G} - \mathfrak{Z})\,\mathfrak{e} = \frac{2}{\mu}.$$

w. z. b. w.

Wenn $\mu = \text{const}$, liefert die Gleichung (4b) durch zweimalige Integration:

$$\mu\,\mathfrak{Z} = \mathfrak{v} + \int_a^t \sqrt[4]{\mathfrak{Z}''^2}\,d\tau\,\bar{\mathfrak{g}} + \bar{\mathfrak{e}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Z} - \frac{1}{\mu}\,\mathfrak{v} = \int_a^t \sqrt[4]{\mathfrak{Z}''^2}\,d\tau\,\mathfrak{g} + \mathfrak{e}. \tag{9}$$

$\bar{\mathfrak{e}}$, $\bar{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$ bedeuten konstante komplexe Vektoren, a ist eine reelle Konstante. τ durchläuft natürlich reelle Werte. Reell-geometrisch besagt die Beziehung (9): *Wenn $\mu = \text{const}$, so ist die Regelfläche isogonale Trajektorie eines Garbenbüschels. Man hat nur den Begriff Winkel durch den Ausdruck Kehlpunktabstand $- i \cdot$ Dralldifferenz zu ersetzen.*

§ 7.

Komplexe Regelflächen.

Vorgelegt sei eine komplexe Regelfläche, deren Geraden von dem reellen Parameter t abhängen mögen. $\mathfrak{y}$ sei der Einheitsvektor der Geraden der komplexen Regelfläche. Es werde vorausgesetzt, daß

$$\mathfrak{y}'^2 \neq 0.$$

Unsere komplexe Regelfläche besitzt drei reelle Invarianten erster Ordnung, nämlich erstens:

$$\frac{R(\mathfrak{y}'^2)}{J(\mathfrak{y}'^2)},$$

zweitens und drittens Real- und Imaginärteil des Dralles Θ.

Diese Invarianten lassen auch im Reellen sehr anschauliche geometrische Deutungen zu. Die Deutung unserer ersten Invarianten läßt sich so formulieren: *Jeder Geraden der komplexen Regelfläche ordnen wir zwei reelle gerichtete Geraden zu, nämlich diejenigen, die auf den durch* $\mathfrak{y}$ *gehenden Minimalebenen liegen. Auf diese Weise entsprechen unserer komplexen Regelfläche zwei reelle Regelflächen, deren Geraden durch ihre Einheitsvektoren charakterisiert werden sollen, die wir mit* $\mathfrak{x}(t)$, $\bar{\mathfrak{x}}(t)$ *bezeichnen werden. Jetzt legen wir eine Speerkette so, daß sie durch* $\mathfrak{x}(t)$ *sowie durch* $\bar{\mathfrak{x}}(t)$ *und die zu ihr von erster Ordnung benachbarte hindurchgeht. Analog der ersten legen wir eine zweite Speerkette so, daß sie aus der ersten durch Vertauschung von* $\mathfrak{x}(t)$ *und* $\bar{\mathfrak{x}}(t)$ *hervorgeht. Der Winkel, den die Asymptotenebenen dieser beiden Speerketten in ihren gemeinsamen Geraden miteinander bilden, heiße* α. *Dann besteht folgende Beziehung:*

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{R(\mathfrak{y}'^2)}{J(\mathfrak{y}'^2)}. \tag{10}$$

Der Winkel α muß nun noch näher definiert werden. Denken wir uns das reelle sphärische Bild unserer Regelflächen $\mathfrak{x}(t)$, $\bar{\mathfrak{x}}(t)$ mit den oben beschriebenen Speerketten auf der Einheitskugel aufgezeichnet. Bei den Transformationen der G_{12} wird die Einheitskugel nur gleichsinnig winkeltreuen Abbildungen unterworfen. Wir können daher den Sinn, in dem wir die Winkel auf der Einheitskugel messen wollen, ein für allemal festlegen. Wir wollen ihn hier so annehmen, daß wir in der stereographischen Projektion der Einheitskugel auf die Gaußsche Ebene den *Antiuhrzeigersinn* wählen. Der Winkel, den die beiden unseren Speerketten entsprechenden Kreise in $\mathfrak{x}$ bilden, *und zwar gemessen von dem die Kurve* $\bar{\mathfrak{x}}(t)$ *berührenden Kreise nach dem zweiten der beiden Kreise, ist unser Winkel* α. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich wohl am bequemsten folgendermaßen: Ein Paar einparametriger Minimalvektorenscharen $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{g}$

(dabei sollen beide Scharen auf den gleichen reellen Parameter bezogen sein) besitzt eine einzige absolute Invariante erster Ordnung, nämlich:

$$\frac{R\left(\frac{\mathfrak{e}\,\mathfrak{g}}{\sqrt{\mathfrak{e}'^2\,\mathfrak{g}'^2}}\right)}{J\left(\frac{\mathfrak{e}\,\mathfrak{g}}{\sqrt{\mathfrak{e}'^2\cdot\mathfrak{g}'^2}}\right)}. \tag{11}$$

Setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} \mathfrak{e} &= \mathfrak{y}' + i\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}' \quad \text{prop.} \quad \mathfrak{r}' + i\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}', \\ \mathfrak{g} &= \mathfrak{y}' - i\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}' \quad \text{prop.} \quad \bar{\mathfrak{r}}' + i\,\bar{\mathfrak{r}}\times\bar{\mathfrak{r}}', \end{aligned} \tag{12}$$

d. h.: Identifizieren wir die Minimalvektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{g}$ mit den Minimalvektoren, die den durch $\mathfrak{y}$ gehenden Minimalebenen zugeordnet sind, so haben wir den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{y}$ und unseren reellen Kurven $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ hergestellt. Setzen wir nunmehr in die absolute Invariante (11) einmal für $\mathfrak{e}, \mathfrak{g}$ die Vektoren $\mathfrak{y}' + i\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{y}' - i\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}'$, ein andermal die Vektoren $\mathfrak{r} + i\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}'$, $\bar{\mathfrak{r}}' + i\,\bar{\mathfrak{r}}\times\bar{\mathfrak{r}}'$ ein, und setzen die so entstehenden Ausdrücke einander gleich, so erfordert die Bestätigung der Gleichung (10) nur noch einige kurze Rechnungen. Am einfachsten bringen wir die Kurven auf der Einheitskugel in eine spezielle Lage, in der die Verhältnisse besonders einfach zu durchschauen sind. Z. B. können wir immer durch eine Transformation unserer G_{12} erreichen, daß die Schnittpunkte der beiden Kreise in den Nord- bzw. Südpol der Einheitskugel fallen und die Tangente der einen Kurve der x-Achse parallel wird. Die Deutung des komplexen Dralles unserer komplexen Regelfläche ist der des Winkels α sehr ähnlich. Wir wollen folgende Bezeichnungen einführen: $\bar{\mathfrak{x}}$ = Kehlpunkt der durch $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ hindurchgehenden und $\bar{\mathfrak{r}}$ berührenden Speerkette (über den hier angewandten Begriff Berührung vgl. § 4), und zwar auf der Geraden $\mathfrak{r}$; $\mathfrak{x}$ = Kehlpunkt der $\mathfrak{r}$ berührenden Speerkette, die durch $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ läuft, genommen auf der Geraden $\mathfrak{r}$; $\bar{\vartheta}, \vartheta$ seien die entsprechenden Dralle der Speerketten; $\mathfrak{X}$ sei der Kehlpunkt der komplexen Regelfläche. Ferner sei $\mathfrak{B}$ der Brennpunkt der komplexen Regelfläche, bezogen auf die Minimalebenen, auf denen die Geraden $\mathfrak{r}(t)$ liegen; $\bar{\mathfrak{B}}$ sei der Brennpunkt, bezogen auf die andere der beiden Minimalebenenscharen. Entsprechend den Beziehungen (12) gilt:

$$\mathfrak{y}\,\mathfrak{r} = 1, \quad \mathfrak{y}\,\bar{\mathfrak{r}} = -1.$$

Da weiter die Brennpunkte die Darstellung zulassen:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{X} - i\Theta\,\mathfrak{y}, \quad \bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{X} + i\Theta\,\mathfrak{y},$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{x} - i\vartheta\,\mathfrak{r} + \lambda(\mathfrak{r}' + i\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}'), \quad \bar{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{x}} - i\bar{\vartheta}\,\mathfrak{r} + \bar{\lambda}(\mathfrak{r}' + i\,\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}'),$$

können wir jetzt die Beziehung aufstellen

$$2i\Theta = (\bar{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x})\,\mathfrak{r} - i(\bar{\vartheta} - \vartheta),$$

die die geometrische Deutung des Dralles Θ ausspricht. Wir haben also gefunden: *Legen wir durch zwei entsprechende Geraden der Regelflächen* $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ *zwei Speerketten (wir können genau so gut sagen: Garben) so, daß die eine die Regelfläche* $\mathfrak{r}$, *die andere die Regelfläche* $\bar{\mathfrak{r}}$ *berührt, so ist der Ausdruck Kehlpunktabstand* $- i \cdot$ *Dralldifferenz in der Schnittgeraden* $\mathfrak{r}$ *gleich* $2 i \Theta$. *Der Sinn, in dem der Ausdruck Kehlpunktabstand* $- i \cdot$ *Dralldifferenz zu bilden ist, läßt sich, wenn wir die* $\mathfrak{r}$ *berührende Speerkette als Speerkette I, die andere als Speerkette II bezeichnen, symbolisch so ausdrücken: „Speerkette II minus Speerkette I".*

§ 8.

Geometrische Deutung der Invarianten $\frac{R(\mathfrak{Z}''^2)}{J(\mathfrak{Z}''^2)}$ bei reellen Regelflächen.

Setzen wir an die Stelle der im vorigen Paragraphen betrachteten Regelflächen $\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{r}}$ die Regelflächen $\mathfrak{R}, \mathfrak{E}$ und legen genau so, wie wir es im § 7 gemacht haben, zwei Speerketten an unsere beiden Regelflächen, so läßt sich

$$\frac{R(\mathfrak{Z}''^2)}{J(\mathfrak{Z}''^2)}$$

durch μ und den Schnittwinkel φ der Kreise, die unseren Speerketten auf der Einheitskugel entsprechen, folgendermaßen ausdrücken:

$$\frac{R(\mathfrak{Z}''^2)}{J(\mathfrak{Z}''^2)} = \frac{p - q \operatorname{ctg} 2\varphi}{q + p \operatorname{ctg} 2\varphi}, \quad p = R(\mu^2), \quad q = J(\mu^2).$$

Es folgt dies unmittelbar daraus, daß:

$$\mathfrak{w}^2 = \frac{\mathfrak{v}'^2}{\mathfrak{Z}''^2} = -\mu.$$

§ 9.

Transformation der Minimalflächen.

Nach Ribaucour umhüllen die in den Mittelpunkten eines isotropen Strahlensystems senkrecht zu den Strahlen errichteten Ebenen eine Minimalfläche, die allerdings auf einen Punkt zusammenschrumpft, wenn das isotrope Strahlensystem eine Garbe ist. Es sei jetzt folgende Frage vorgelegt: Wie verhält sich diese Minimalfläche, wenn man das zugehörige isotrope Strahlensystem einer Transformation der G_{12} unterwirft? Zunächst bemerke man, daß die Ribaucoursche Minimalfläche identisch ist mit derjenigen, die von dem Realteil der isotropen Kurve geliefert wird, auf der

die den Schmieggarben des zugehörigen isotropen Strahlensystems entsprechenden komplexen Punkte liegen. Hieraus ersieht man z. B. auch folgendes: Ist eine Minimalfläche vorgelegt und nach den isotropen Strahlensystemen gefragt, deren Mittelebenen die gegebene Minimalfläche einhüllen, so heißt das: Der Realteil der isotropen Kurve, auf der die komplexen Punkte der Schmieggarben des gesuchten Strahlensystems liegen, ist gegeben. Der zugehörige Imaginärteil ist zu finden. Er ist natürlich nur bis auf einen additiven konstanten Vektor bestimmt. Damit ist dann auch das gesuchte isotrope Strahlensystem bis auf Querschiebungen festgelegt[6]).

Wenn wir einen gegenüber komplexen Bewegungen invarianten Parameter auf unserer isotropen Kurve einführen, so wird diesem Parameter auf der Ribaucourschen Minimalfläche ein invariantes Parameternetz entsprechen. Es bedeute wieder $\mathfrak{Z}(t)$ unsere isotrope Kurve. Der Parameter t werde so gewählt, daß

$$\mathfrak{Z}''^2 = 1.$$

Diese Normierung ist im wesentlichen die Vessiotsche. Der Real- bzw. Imaginärteil der isotropen Kurve werde mit $\mathfrak{x}$ bzw. $\bar{\mathfrak{x}}$ bezeichnet. Unter Beachtung unserer Normierung und der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nehmen die Ableitungsgleichungen für unsere Flächen $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}$ folgende Gestalt an ($t = u + iv$):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{uu} &= \frac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{x}_u - \frac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{x}_v + \xi,\\
\mathfrak{x}_{uv} &= \frac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{x}_u + \frac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{x}_v,\\
\mathfrak{x}_{vv} &= -\frac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{x}_u + \frac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{x}_v - \xi,
\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{x}}_{uu} &= \frac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{x}_u + \frac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{x}_v,\\
\bar{\mathfrak{x}}_{uv} &= -\frac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{x}_u + \frac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{x}_v - \xi,\\
\bar{\mathfrak{x}}_{vv} &= -\frac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{x}_u - \frac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{x}_v,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\mathfrak{x}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2 = \bar{\mathfrak{x}}_u^2 = \bar{\mathfrak{x}}_v^2 = \lambda^2,\\
&\frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{\lambda^2} = \xi.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen besagen folgendes: Wählt man den komplexen Parameter unserer isotropen Kurve so, daß er unserer oben gegebenen Normierung genügt, so stellen die u- und v-Kurven auf der Ribaucourschen Minimalfläche die Krümmungslinien dar. *Unterwirft man also ein iso-*

[6]) Vgl. A. Ribaucour, Étude des Élassoïdes ..., Bruxelles, Mémoires couronnées par l'Académie de Belgique **44** (1881), S. 44.

tropes Strahlensystem einer Transformation der G_{12}, so gehen die Krümmungslinien der Ribaucourschen Minimalfläche wieder in die Krümmungslinien der zu dem transformierten System gehörigen Minimalfläche über. Diese Abbildung von Minimalflächen aufeinander ist, wie man ohne weiteres aus den Gleichungen (13) entnehmen kann, *winkeltreu. Daher gehen auch Asymptotenlinien wieder in Asymptotenlinien über,* da auf einer Minimalfläche die Asymptotenlinien die Winkel, die die Krümmungslinien miteinander bilden, halbieren. Unsere Transformationen einer Minimalfläche lassen sich leicht explizit angeben. Man braucht nur die Bewegungstransformationen von $\mathfrak{Z}$ in Real- und Imaginärteil zu spalten. Auch die Invarianten einer Minimalfläche gegenüber unseren Transformationen können wir jetzt angeben; wir haben nämlich zu diesem Zwecke die komplexe Invariante μ unserer isotropen Kurve so zu schreiben, daß sie nur von dem Realteil $\mathfrak{x}(u, v)$ abhängt. Aus den Gleichungen (13) läßt sich die zugleich parameterinvariante Darstellung entnehmen:

$$R(\mu) = -\frac{1}{4}\overline{\triangle}\log(-K) - \frac{1}{16}\overline{\nabla}\log(-K),$$

$$J(\mu) = -\frac{1}{4}\overline{\overline{\triangle}}\log(-K) + \frac{1}{16}\overline{\overline{\nabla}}\log(-K).$$

Dabei bedeutet K das Gaußsche Krümmungsmaß, ∇, $\triangle$; $\overline{\nabla}$, $\overline{\triangle}$, $\overline{\overline{\nabla}}$, $\overline{\overline{\triangle}}$ bedeuten den ersten bzw. zweiten Beltramischen Differentiator bezüglich der Grundformen:

$$d\mathfrak{x}^2, \quad -d\mathfrak{x}\,d\xi,$$

$$(\mathfrak{x}_u\,\xi_u\,\xi)\,du^2 + \{(\mathfrak{x}_u\,\xi_v\,\xi) + (\mathfrak{x}_v\,\xi_u\,\xi)\}\,du\,dv + (\mathfrak{x}_v\,\xi_v\,\xi)\,dv^2.$$

§ 10.

Geometrische Deutung der Beziehungen $J(\sqrt{\mathfrak{Z}''^2}) \equiv 0$, $R(\sqrt{\mathfrak{Z}''^2}) \equiv 0$ bei reellen Regelflächen.

Setzen wir die Kurve $\mathfrak{Z}(t)$ in das Gebiet komplexer Parameterwerte analytisch fort, so können wir sagen, daß man jedenfalls in einer gewissen Umgebung unserer reellen t-Werte eindeutig ein isotropes Strahlensystem angeben kann, in dem ein gewisser Bereich unserer vorgelegten Regelfläche ganz enthalten ist.

$$J(\sqrt{\mathfrak{Z}''^2}) \equiv 0$$

besagt nun nach dem, was wir im vorigen Paragraphen über die Minimalflächen gesagt haben, daß die in den Kehlpunkten der Regelfläche senkrecht zu ihren Strahlen errichteten Ebenen die zu der analytischen

Fortsetzung von $\mathfrak{Z}(t)$ gehörige Ribaucoursche Minimalfläche in einer Krümmungslinie berühren. Wenn

$$R(\sqrt{\mathfrak{Z}''^2}) \equiv 0,$$

berühren diese Ebenen die Minimalfläche in einer Asymptotenlinie. Das ist unmittelbar daraus zu ersehen, daß die Asymptotenlinien der Ribaucourschen Minimalfläche der Normierung $\mathfrak{Z}''^2 = -1$ entsprechen (vgl. § 9). Noch anschaulicher lassen diese Ergebnisse sich so aussprechen: *Ist*

$$J(\sqrt{\mathfrak{Z}''^2}) \equiv 0,$$

so umhüllen die Mittelgeraden der Schmieggarben der Regelfläche eine Kurve. Ist

$$R(\sqrt{\mathfrak{Z}''^2}) \equiv 0,$$

so sind die Mittelebenen der Schmieggarben die Schmiegebenen der Kurve, die die Mittelpunkte der Schmieggarben beschreiben.

Strahlensysteme.

§ 11.

Invarianz der Hauptflächen. Differentialinvariante erster Ordnung eines Strahlensystems.

Unterwirft man ein Strahlensystem einer Transformation der G_{19}, so gehen die Hauptflächen[7]) wieder in Hauptflächen über. Das ist leicht ohne Rechnung zu beweisen. Bei einer Transformation der G_{12} nämlich wird das reelle sphärische Bild des Strahlensystems einer winkeltreuen projektiven Transformation, die die Einheitskugel in sich überführt, unterworfen. Die erste Eigenschaft der Hauptflächen, daß ihr reelles Bild ein Orthogonalnetz darstellt, bleibt also erhalten. Jetzt erinnere man sich an die Tatsache, daß bei zwei Regelflächen, die einen Strahl gemeinsam haben, die Differenz der Dralle und der Abstand der Kehlpunkte, die die Regelflächen in dem gemeinsamen Strahl besitzen, durch die Transformationen der G_{12} nicht verändert werden. Die zweite Eigenschaft der Hauptflächen, in jedem Strahle einen gemeinsamen Kehlpunkt zu besitzen, ist daher ebenfalls invariant. Diese beiden Eigenschaften zusammen kennzeichnen aber die Hauptflächen.

Der eben gegebene Beweis für die Invarianz der Hauptflächen gibt uns die einzige Differentialinvariante erster Ordnung eines Strahlensystems

---

[7]) Die Hauptflächen sind definiert bei Blaschke, Dffg. 1, S. 204.

gegenüber der G_{12}: Die Differenz der Extremwerte der Dralle (Hauptdralle). Diese Invariante soll fernerhin immer mit $J(u, v)$ bezeichnet werden. Ihr identisches Verschwinden kennzeichnet bekanntlich die isotropen Strahlensysteme.

§ 12.

Über die Schmieggarben in einem Strahlensystem.

Wir wollen jetzt einen Satz herleiten, der eine eigentümliche Analogie mit folgendem Satz von Cesàro aufweist:

Die Krümmungskreise, die in einem Punkte der Kugel an die Kurven gelegt werden, die ein orthogonales Kurvennetz isogonal schneiden, gehen alle durch einen zweiten festen Punkt hindurch. Der Satz, der jetzt bewiesen werden soll, lautet folgendermaßen: *In jedem Strahlensystem gibt es ∞^1 Regelflächenpaare, deren reelle sphärische Bilder orthogonale Kurvennetze liefern, die das reelle Netz der Hauptflächen isogonal schneiden. Legt man in einem Strahl des Systems an beide Flächen eines solchen Paares die Schmieggarben, so haben diese beiden Garben noch einen zweiten Strahl gemeinsam. Diese ∞^1 Geraden, die zu den durch unseren Systemstrahl hindurchgehenden Regelflächenpaaren gehören, sind alle einander parallel.* Aus der Formel (1) nämlich folgt unter Benutzung der Formeln von Hamilton und Mannheim (vgl. Blaschke, Dffg. , S. 208) für die Schmieggarben $\mathfrak{Z}^*$, $\overline{\mathfrak{Z}}^*$ eines solchen Paares:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{x} + \frac{J}{2}\sin 2\varphi\,\mathfrak{a} - i(\vartheta_1\cos^2\varphi + \vartheta_2\sin^2\varphi)\,\mathfrak{a}\\ + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_u\cos\varphi + \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_v\sin\varphi - i(\vartheta_{1u}\cos^3\varphi\\ + \vartheta_{1v}\sin\varphi\cos^2\varphi + \vartheta_{2u}\cos\varphi\sin^2\varphi + \vartheta_{2v}\sin^3\varphi)\\ + \frac{J_u}{2}\cos\varphi\sin 2\varphi + \frac{J_v}{2}\sin\varphi\sin 2\varphi]\cdot e^{-i\varphi}(\mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}_v),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{Z}}^* = \mathfrak{x} - \frac{J}{2}\sin 2\varphi\,\mathfrak{a} - i(\vartheta_1\sin^2\varphi + \vartheta_2\cos^2\varphi)\,\mathfrak{a}\\ + [\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_u\sin\varphi - \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_v\cos\varphi - i(\vartheta_{1u}\sin^3\varphi\\ - \vartheta_{1v}\cos\varphi\sin^2\varphi + \vartheta_{2u}\sin\varphi\cos^2\varphi - \vartheta_{2v}\cos^3\varphi)\\ - \frac{J_u}{2}\sin\varphi\sin 2\varphi + \frac{J_v}{2}\cos\varphi\sin 2\varphi]\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}(\mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}_v).\end{aligned}$$

Als Parameter u, v sind die Hauptflächen genommen, und zur Abkürzung $\mathfrak{a}_u^2 = 1$, $\mathfrak{a}_v^2 = 1$ gesetzt. Ferner ist von den Beziehungen Gebrauch gemacht:

$$\mathfrak{a}_u\times\mathfrak{a}_v = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_u = \mathfrak{a}_v, \quad \mathfrak{a}_v\times\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_u.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{x}$ den Mittelpunkt des Strahlensystems; ϑ_1, ϑ_2 sind die Hauptdralle. $\vartheta_2 - \vartheta_1 = J$; φ ist der Winkel, unter dem das reelle sphärische Bild der Regelfläche mit der Schmieggarbe $\mathfrak{Z}^*$ das Bild der Hauptfläche mit dem Drall ϑ_1 schneidet. Für die Schmieggarben der Hauptflächen folgt speziell:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{x} - i\vartheta_1 \mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_u - i\vartheta_{1u})(\mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_u), \\ \bar{\mathfrak{Z}} &= \mathfrak{x} - i\vartheta_2 \mathfrak{a} + (\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_v - i\vartheta_{2v})(\mathfrak{a}_v + i\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_v). \end{aligned} \tag{14}$$

Nach einfacher Rechnung ergibt sich:

$$\mathfrak{Z}^* - \bar{\mathfrak{Z}}^* = e^{-2i\varphi}(\mathfrak{Z} - \bar{\mathfrak{Z}}),$$

d. h. die komplexen Geraden, die die Punkte $\mathfrak{Z}^*$ und $\bar{\mathfrak{Z}}^*$ verbinden, sind alle einander parallel. Durch jede dieser Geraden gehen zwei Minimalebenen hindurch, von denen die eine immer identisch ist mit derjenigen, auf die wir den reellen Strahl unseres Systems abgebildet haben. Die reellen Geraden, die auf den anderen der eben erwähnten Minimalebenen liegen, sind die zweiten Schnittgeraden der Schmieggarben $\mathfrak{Z}^*, \bar{\mathfrak{Z}}^*$. Sie sind natürlich auch einander parallel, w. z. b. w.

§ 13.

Kennzeichnende geometrische Eigenschaften der Strahlensysteme mit konstanter Hauptdralldifferenz.

Es liegt jetzt die Frage nahe, unter welcher Bedingung diese Schnittgeraden alle in eine einzige zusammenfallen. Das wird dann und nur dann der Fall sein, wenn der komplexe Vektor $\mathfrak{Z}^* - \mathfrak{Z}$ immer dieselbe Richtung hat, unabhängig von dem Winkel φ. Da

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}^* - \mathfrak{Z} = \sin\varphi \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)}(\mathfrak{Z} - \bar{\mathfrak{Z}}) \\ + \frac{\sin 2\varphi}{2} e^{-2i\varphi}(J_u + iJ_v)(\mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}_v), \quad \mathfrak{a}_u^2 = \mathfrak{a}_v^2 = 1, \end{aligned}$$

muß also J_u und J_v verschwinden, d. h.: *Die Strahlensysteme mit konstanter Hauptdralldifferenz haben die kennzeichnende Eigenschaft, daß die Schmieggarben, die in einem Systemstrahl an die Regelflächen gelegt werden, deren reelles Bild das reelle Netz der Hauptflächen isogonal schneidet, durch eine zweite feste Gerade hindurchgehen. Durch dieselbe Gerade gehen dann auch die entsprechenden Schmiegspeerkugeln hindurch.* Um das zu beweisen, ist nur zu zeigen, daß die Richtung der zweiten Schnittgeraden der Schmieggarben $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}'$ zusammenfällt mit der Richtung, die der zweite

Schnittpunkt der Schmiegkreise auf der Einheitskugel an die u- und v-Kurven der Hauptflächen angibt. Wir formen zu diesem Zwecke die Formeln für die Schmieggarben $\mathfrak{Z}, \overline{\mathfrak{Z}}$ etwas um. Nach Blaschke, Dffg. 1, S. 197 bestehen für die Mittelpunktsfläche $\mathfrak{x}$ die Beziehungen:

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{a} + \vartheta_1\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_u,$$
$$\mathfrak{x}_v = \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{a} + \vartheta_2\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_v.$$

Die erste Gleichung differenzieren wir nach v, die zweite nach u, subtrahieren und beachten folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{a}_u\times\mathfrak{a}_v = \sqrt{eg}\,\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_u = \sqrt{\frac{e}{g}}\,\mathfrak{a}_v,$$
$$\mathfrak{a}_v\times\mathfrak{a} = \sqrt{\frac{g}{e}}\,\mathfrak{a}_u\,(\mathfrak{a}_u^2 = e,\ \mathfrak{a}_v^2 = g), \quad \mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_{uv} = -\frac{g_u}{2\sqrt{eg}}\,\mathfrak{a}_u + \frac{e_v}{2\sqrt{eg}}\,\mathfrak{a}_v,$$
$$\vartheta_1 = \frac{\mathfrak{a}_v\,\mathfrak{x}_u}{\sqrt{eg}}, \qquad \vartheta_2 = \frac{-\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{x}_v}{\sqrt{eg}}.$$

Dann folgt:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_u)\mathfrak{a}_v - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_v)\,\mathfrak{a}_u + \vartheta_{1v}\sqrt{\frac{e}{g}}\,\mathfrak{a}_v + \vartheta_{2u}\sqrt{\frac{g}{e}}\,\mathfrak{a}_u + J\frac{g_u}{2\sqrt{eg}}\,\mathfrak{a}_u - J\frac{e_v}{2\sqrt{eg}}\,\mathfrak{a}_v = 0.$$

Die Koeffizienten von $\mathfrak{a}_u$, $\mathfrak{a}_v$ müssen verschwinden:

$$-\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_v + \vartheta_{2u}\cdot\sqrt{\frac{g}{e}} + J\frac{g_u}{2\sqrt{eg}} = 0,$$
$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_u + \vartheta_{1v}\sqrt{\frac{e}{g}} - J\frac{e_v}{2\sqrt{eg}} = 0.$$

Für die geodätischen Krümmungen der u- und v-Kurve des Richtungsbildes der Hauptflächen sollen die Abkürzungen $\varkappa$ bzw. $\bar{\varkappa}$ gebraucht werden. Jetzt setzen wir die Werte, die hieraus für $\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_v$ folgen, in die Formeln für $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}$ ein [vgl. (14)]:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{x} - i\,\vartheta_1\,\mathfrak{a} + \left(-\frac{\vartheta_{1v}}{\sqrt{g}} - i\,\frac{\vartheta_{1u}}{\sqrt{e}} - J\varkappa\right)\left(\frac{\mathfrak{a}_u}{\sqrt{e}} + i\,\frac{\mathfrak{a}_v}{\sqrt{g}}\right),$$
$$\overline{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{x} - i\,\vartheta_2\,\mathfrak{a} + \left(-\frac{\vartheta_{2v}}{\sqrt{g}} - i\,\frac{\vartheta_{2u}}{\sqrt{e}} - iJ\bar{\varkappa}\right)\left(\frac{\mathfrak{a}_u}{\sqrt{e}} + i\,\frac{\mathfrak{a}_v}{\sqrt{g}}\right).$$

Hieraus folgt:

$$(15)\qquad \mathfrak{Z} - \overline{\mathfrak{Z}} = iJ\,\mathfrak{a} + \left[\frac{J_v}{\sqrt{g}} + i\,\frac{J_u}{\sqrt{e}} + J\,(i\bar{\varkappa} - \varkappa)\right]\left(\frac{\mathfrak{a}_u}{\sqrt{e}} + i\,\frac{\mathfrak{a}_v}{\sqrt{g}}\right).$$

Wenn $J = \text{const}$ gesetzt wird, vereinfacht sich $\mathfrak{Z} - \overline{\mathfrak{Z}}$ zu:

$$\mathfrak{Z} - \overline{\mathfrak{Z}} = J\,\{i\,\mathfrak{a} + (i\bar{\varkappa} - \varkappa)\}\left(\frac{\mathfrak{a}_u}{\sqrt{e}} + i\,\frac{\mathfrak{a}_v}{\sqrt{g}}\right).$$

Die eine der durch die Verbindungsgeraden von $\mathfrak{Z}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$ gehenden Minimalebenen ist natürlich das Abbild unseres Systemstrahls mit der Richtung $\mathfrak{a}$, die zweite $\mathfrak{Z}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$ verbindende Minimalebene enthält die zweite Schnittgerade der Garben $\mathfrak{Z}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$. Ihre Richtung bestimmt man leicht zu:

$$\mathfrak{w} = \frac{\varkappa^2 + \bar{\varkappa}^2 - 1}{\varkappa^2 + \bar{\varkappa}^2 + 1}\mathfrak{a} + \frac{2\bar{\varkappa}}{\varkappa^2 + \bar{\varkappa}^2 + 1}\frac{\mathfrak{a}_u}{\sqrt{e}} - \frac{2\varkappa}{\varkappa^2 + \bar{\varkappa}^2 + 1}\frac{\mathfrak{a}_v}{\sqrt{g}}.$$

Dieser Punkt auf der Einheitskugel ist aber der zweite Schnittpunkt der an die u- und v-Kurven der Hauptflächen gelegten Schmiegkreise. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 14.

Vollständiges Invariantensystem eines Strahlensystems gegenüber G_{12}.

Der komplexe Einheitsvektor

$$\frac{-i}{J}(\mathfrak{Z} - \bar{\mathfrak{Z}})$$

werde mit $\mathfrak{y}$ bezeichnet. Die Tatsache, daß zu seiner Kenntnis nur das reelle Bild der Hauptflächen und die Invariante J gegeben zu sein braucht (vgl. Formel (15)), gestattet es, den folgenden Satz herzuleiten: *Durch Angabe des reellen sphärischen Netzes der Hauptflächen, der Invarianten dritter Ordnung ist das Strahlensystem bis auf reelle Translationen und Querschiebungen bestimmt.*

Zum Beweise betrachten wir das komplexe Strahlensystem, das durch die $\mathfrak{Z}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$ verbindenden Geraden geliefert wird. Der Richtungsvektor dieser Geraden ist, wie schon erwähnt, gegeben durch

$$\mathfrak{y} = -\frac{i}{J}(\mathfrak{Z} - \bar{\mathfrak{Z}}).$$

Für $\mathfrak{y}_u^2$, $\mathfrak{y}_v^2$, $\mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v$ wollen wir die Abkürzungen E, G, F einführen und *solche Strahlensysteme ausschließen, bei denen eine der Größen E, G verschwindet. Geometrisch betrachtet, besagt dies folgendes: Wir wollen die Strahlensysteme ausschließen, bei denen das reelle sphärische Bild des Strahlensystems, das aus den zweiten Schnittgeraden der an die Hauptflächen des ursprünglichen Systems gelegten Schmieggarben besteht, auf eine Kurve zusammenschrumpft.* Der Kürze halber wollen wir das eben beschriebene System als B-System, das komplexe System (Verbindungsgeraden von $\mathfrak{Z}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$) als K-System, das ursprüngliche System als A-System bezeichnen. Es seien $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ die Kehlpunkte des K-Systems in der u- und v-Richtung, $\Theta, \bar{\Theta}$ die entsprechenden Dralle. Die Schmieggarben $\mathfrak{Z}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$ sind die Brennpunkte des K-Systems in der u- und v-Richtung, und zwar

bezogen auf die Minimalebenen, auf denen die Geraden des A-Systems liegen. Zugleich sind sie auch die Schnittpunkte dreier konsekutiver Minimalebenen in der u- und v-Richtung. Erinnern wir uns jetzt der Formel (1), so erhalten wir die Beziehungen:

$$\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_u = i\Theta_u, \quad \mathfrak{y}\,\bar{\mathfrak{x}}_v = i\bar{\Theta}_v, \tag{16}$$

$$\mathfrak{x}_u = i\Theta_u\,\mathfrak{y} + \Theta\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}_u, \tag{17}$$

$$\mathfrak{x}_v = i\Theta_v\,\mathfrak{y} + i(\Theta-\bar{\Theta})\,\mathfrak{y}_v + \bar{\Theta}\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}_v + iJ_v\,\mathfrak{y} + iJ\,\mathfrak{y}_v. \tag{18}$$

Die Gleichung (17) differenzieren wir nach v, die Gleichung (18) nach u und subtrahieren. Darauf multiplizieren wir die Differenz nacheinander mit $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$. Es entsteht so:

$$\Theta(-W+iF) = \bar{\Theta}(W+iF) + iJ_{uv} - iJF, \tag{19}$$

$$(\Theta-\bar{\Theta})(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_{uv}\,\mathfrak{y}_u) + \bar{\Theta}_u(W+iF) - i\Theta_v E - \frac{i}{2}(\Theta-\bar{\Theta})E_v - iJ_vE - iJ_uF - \frac{i}{2}JE_v = 0, \tag{20}$$

$$(\Theta-\bar{\Theta})(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_{uv}\,\mathfrak{y}_v) + \Theta_v(W-iF) + i\bar{\Theta}_uG - \frac{i}{2}(\Theta-\bar{\Theta})G_u - iJ_uG - iJ_vF - \frac{i}{2}JG_u = 0. \tag{21}$$

Als neue Invarianten führen wir den Real- und Imaginärteil der Größe $\Theta-\bar{\Theta}$ ein. Nunmehr denken wir uns das reelle sphärische Bild der Hauptflächen des A-Systems, ebenso die Invariante J und unsere neue Invariante $\Theta-\bar{\Theta}$ gegeben. Es lassen sich dann die Größen $\bar{\Theta}$, Θ berechnen, wie Gleichung (19) zeigt. Nach (17), (18) ist dann $\mathfrak{x}$ bis auf einen additiven konstanten komplexen Vektor bestimmt. Das ist aber gerade der Inhalt der zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Behauptung. Der Vektor $\mathfrak{y}$ muß natürlich die Gleichung

$$-\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v-F_u}{W} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F_v-G_u}{W}\right) = 1 \tag{22}$$

befriedigen, die bekanntlich ausdrückt, daß das Krümmungsmaß der Fläche, die $\mathfrak{y}$ vom Ursprung aus abgetragen beschreibt, gleich 1 ist. Aus den Gleichungen (20), (21) lassen sich Θ, $\bar{\Theta}$ eliminieren, so daß eine Gleichung entsteht, die nur noch die Größen enthält:

$$J_vEG + J_uFG + \frac{J}{2}E_vG = -iJ_uG(W+iF) - iJ_vF(W+iF) - \frac{i}{2}JG_u(W+iF). \tag{23}$$

Setzen wir J_u, J_v als nicht identisch verschwindend voraus, so läßt sich nunmehr leicht ein vollständiges Invariantensystem eines reellen Strahlensystems angeben, das in dem gegebenen reellen System nur von Ableitungen bis zur dritten Ordnung abhängt:

$$J,\ \frac{E}{J_u^2},\ \frac{F}{J_u J_v},\ \frac{G}{J_v^2},\ \Theta - \bar{\Theta}.$$

Durch die Gleichungen (20), (21), (22) sind die Beziehungen, die zwischen diesen absoluten Invarianten bestehen, noch nicht erschöpft. Es fehlt noch die Beziehung, die die Orthogonalität des reellen sphärischen Bildes der Hauptflächen unseres reellen Strahlensystems ausdrückt. Um zu dieser Beziehung zu gelangen, ist es am bequemsten, von der Beziehung auszugehen:

$$\mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_u \text{ prop. } \mathfrak{y}_u + i\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}_u. \tag{24}$$

Der Ausdruck:

$$\frac{R\left(\frac{\mathfrak{v}_u^2}{\mathfrak{v}_v^2}\right)}{J\left(\frac{\mathfrak{v}_u^2}{\mathfrak{v}_v^2}\right)},\quad \mathfrak{v} \text{ prop. } \mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_u$$

ist eine absolute Invariante der zweiparametrigen unnormierten Schar von Minimalvektoren $\mathfrak{v}(u, v)$. Er bleibt also ungeändert, wenn wir in ihm $\mathfrak{a}_u + i\,\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}_u$ und $\mathfrak{y}_u + i\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}_u$ vertauschen. Hieraus läßt sich dann nach einfacher Rechnung entnehmen, daß *die Gleichung*

$$R\left(\frac{F + iW}{E}\right) = 0 \tag{25}$$

die Orthogonalität des reellen sphärischen Bildes der Hauptflächen ausdrückt. Es bedeute $\mathfrak{w}(u, v)$ das reelle sphärische Bild des zu unserem vorgelegten reellen System gehörigen B-Systems.

Aus

$$\mathfrak{y}_u - i\,\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}_u \text{ prop. } \mathfrak{w}_u + i\,\mathfrak{w}\times\mathfrak{w}_u$$

leiten wir durch eine der vorhergehenden ganz analoge Betrachtung die Beziehung her:

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{R\left(\frac{F - iW}{E}\right)}{J\left(\frac{F - iW}{E}\right)}. \tag{26}$$

Hierin bedeutet ψ den Winkel, unter dem sich die Asymptotenebenen der Regelflächen des B-Systems schneiden, die den Hauptflächen des A-Systems entsprechen. Der Winkel ψ ist folgendermaßen zu verstehen: Wir betrachten das reelle sphärische Bild des A- und B-Systems. Den Sinn, in dem wir die Winkel auf der Einheitskugel messen wollen, wählen

wir wieder genau so wie im § 7. Der Winkel ψ ist dann der Winkel, den wir beschreiben, wenn wir von der u-Kurve des B-Systems zur v-Kurve gehen. Die Betrachtungen in § 7 liefern uns auch sofort die geometrischen Deutungen der Invarianten:

$$\frac{R(E)}{J(E)}, \quad \frac{R(G)}{J(G)}.$$

Auch die Deutung der Invarianten Θ, $\bar{\Theta}$ läßt sich leicht angeben: *Legen wir durch einen Strahl des A-Systems und den ihm zugeordneten des B-Systems zwei Garben so, daß die eine die u-Hauptfläche des A-Systems, die andere die der u-Hauptfläche im B-System entsprechende Regelfläche berührt, so schneiden diese beiden Garben sich unter einem Kehlpunktabstand $-i\cdot$Dralldifferenz, der gleich $2i\Theta$ ist.* Ebenso läßt sich $\bar{\Theta}$ deuten (vgl. § 7). *Die u- und v-Regelflächen des B-Systems haben in ihren Schnittgeraden einen Kehlpunktabstand $-i\cdot$Dralldifferenz, der gleich ist dem Ausdruck*

$$2i(\Theta - \bar{\Theta}) + iJ. \tag{27}$$

Den Sinn, in dem dieser Kehlpunktabstand $-i\cdot$Dralldifferenz zu bilden ist, geben wir symbolisch so an: „*v-Regelfläche minus u-Regelfläche*“ des B-Systems. Das ersehen wir daraus, daß die Brennpunkte des K-Systems in der u- und v-Richtung, und zwar bezogen auf die Minimalebenen, auf denen die Geraden des B-Systems liegen, die Darstellung gestatten:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{x} + i\Theta\mathfrak{y}, \quad \bar{\mathfrak{B}} = \bar{\mathfrak{x}} + i\bar{\Theta}\mathfrak{y}.$$

Bei der geometrischen Besprechung der absoluten Invarianten des sphärischen Bildes des K-Systems haben wir die Invarianten:

$$\frac{R(E)}{J(E)}, \quad \frac{R(G)}{J(G)}, \quad \frac{R\left(\frac{F - iW}{E}\right)}{J\left(\frac{F - iW}{E}\right)}$$

deswegen bevorzugt, weil sie die einzigen im A-System nur von Ableitungen bis zur dritten Ordnung abhängenden Invarianten des sphärischen Bildes des K-Systems sind, die sich durch Winkelbeziehungen deuten lassen.

§ 15.

Über einige spezielle Strahlensysteme.

Aus der Formel (16) und den Beziehungen:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{x} - i\Theta\mathfrak{y}, \quad \bar{\mathfrak{Z}} = \bar{\mathfrak{x}} - i\bar{\Theta}\mathfrak{y}$$

können wir für $\mathfrak{Z}_u$ und $\bar{\mathfrak{Z}}_v$ die Darstellungen entnehmen:

$$\mathfrak{Z}_u = \Theta(\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}_u - i\mathfrak{y}_u), \quad \bar{\mathfrak{Z}}_v = \bar{\Theta}(\mathfrak{y}\times\mathfrak{y}_v - i\mathfrak{y}_v).$$

Das identische Verschwinden von Θ oder $\overline{\Theta}$ besagt hiernach folgendes: *Jede Regelfläche der einen der beiden Hauptflächenscharen ist ganz in einer Garbe enthalten.*

Als Beispiel hierzu sei folgendes Strahlensystem angeführt, bei dem jede Hauptfläche eine Speerkette ist:

$$\mathfrak{a} = (\sin v \cos u,\ \sin v \sin u,\ \cos v)$$
$$\bar{\mathfrak{a}} = (-\cos^2 v \cos u,\ -\cos^2 v \sin u,\ \cos v \sin v).$$

(Über die Bedeutung von $\bar{\mathfrak{a}}$ vgl. Blaschke, Dffg. 1, S. 192). In den Klammern für die Ausdrücke von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$ stehen an erster Stelle die x-Komponenten, an zweiter und dritter die bezüglichen y- und z-Komponenten von $\mathfrak{a}$ und $\bar{\mathfrak{a}}$.

Wenn das sphärische Bild des K-Systems orthogonal ist, F also identisch verschwindet, so fließt aus der Formel (25) die Beziehung

$$\frac{R(E)}{J(E)} = \frac{R(G)}{J(G)}.$$

Bezeichnen wir mit ds^2 die quadratische Differentialform

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

so finden wir demnach

$$R(ds^2) = \lambda(u, v)\,J(ds^2).$$

Entsinnen wir uns jetzt der im vorigen Paragraphen erwähnten geometrischen Deutungen unserer Invarianten, so können wir diese Beziehung so ausdrücken: *Verschwindet F identisch, so geht das reelle sphärische Bild des B-Systems durch eine ungleichsinnig winkeltreue Abbildung aus dem reellen sphärischen Bilde des A-Systems hervor.* Daß die Bedingung $F \equiv 0$ *hierfür nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist,* läßt sich aus dem Beweise des eben genannten Satzes ersehen. Ist außer $F \equiv 0$ noch vorgeschrieben, daß das reelle sphärische Bild der Hauptflächen des A-Systems isotherm sein soll, so findet man hierfür aus der Beziehung (24) die Bedingung $E = G$. Die Gleichung (23) sagt unter diesen Umständen aus, daß

$$J^2 E = J^2 G = \varphi(u - iv),$$

wo φ eine analytische Funktion von $u - iv$ ist.

Gehen wir mit der letzten Gleichung in die Beziehung (22) hinein, so folgern wir leicht, daß $\varphi(u - iv)$ eine reelle Konstante sein muß, denn in der Gleichung

$$J J_{uu} + J J_{vv} - J_u^2 - J_v^2 = \varphi(u - iv) \tag{28}$$

sind der Voraussetzung nach alle Größen bis auf $\varphi(u - iv)$ reell. Aus der hieraus sich ergebenden Formel:

$$E = G = \frac{C}{J^2}, \quad C = \text{reelle Konstante}$$

läßt sich folgender Schluß ziehen: *Das reelle sphärische Bild irgendeiner Hauptfläche des A-Systems und die ihr im reellen sphärischen Bilde des B-Systems entsprechende Kurve stellen die beiden Einhüllenden einer einparametrigen Kreisschar dar.* (28) können wir in folgender Weise schreiben:

$$J^2\left\{\left(\log\frac{1}{J^2}\right)_{uu}+\left(\log\frac{1}{J^2}\right)_{vv}\right\}=-2C. \tag{29}$$

Es ist das im wesentlichen die bekannte Liouvillesche Differentialgleichung:

$$(\log z)_{uv}=\text{const}\cdot z.$$

Wir können demnach J die Gestalt geben:

$$J=\frac{i\sqrt{C}}{2}\,\frac{f(\zeta)+g(\bar\zeta)}{\sqrt{f'(\zeta)\cdot g'(\bar\zeta)}}.$$

Hierbei ist gesetzt: $\zeta=u+iv$, $\bar\zeta=u-iv$, es haben natürlich nur die Lösungen der Differentialgleichung (29) einen Sinn, die reelle Werte für J liefern.

Verschwindet F zusammen mit $\Theta-\bar\Theta$ identisch, so läßt sich daraus, daß das reelle sphärische Bild des B-Systems aus dem des A-Systems durch eine konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel entsteht, sowie aus den Bemerkungen zu (27) folgender Schluß ziehen: $F\equiv 0$, $\Theta-\bar\Theta\equiv 0$ *besagt, daß das duale sphärische Bild des B-Systems aus dem des A-Systems durch eine ungleichsinnig dual-konforme Abbildung hervorgeht* (über dualkonforme Abbildung vgl. Blaschke, Dffg. **1**, S. 223). *Die Invariante J hat noch die besondere Bedeutung, daß sie auch gegenüber beliebigen gleichsinnig dual-konformen Abbildungen invariant ist.*

Wie lautet nun die charakteristische Bedingung dafür, daß das reelle sphärische Bild des B-Systems aus dem des A-Systems durch eine gleichsinnig winkeltreue Abbildung entsteht? Entsinnen wir uns der Bedeutung der Formeln (25), (26), so finden wir hierfür die notwendige und hinreichende Beziehung:

$$\frac{R\left(du+\frac{F+iW}{E}dv\right)}{J\left(du+\frac{F+iW}{E}dv\right)}=\frac{R\left(du+\frac{F-iW}{E}dv\right)}{J\left(du+\frac{F-iW}{E}dv\right)}$$

bei beliebigen reellen du und dv. Da das reelle sphärische Bild des B-Systems in unserem Falle orthogonal sein muß, gelten die Gleichungen:

$$R\left(\frac{F}{E}\right)\equiv 0,\quad R\left(\frac{iW}{E}\right)\equiv 0,\quad J\left(\frac{iW}{E}\right)\equiv 0.$$

Wir finden demnach, *daß die Bedingung* $W \equiv 0$ *notwendig und hinreichend dafür ist, daß eine gleichsinnig winkeltreue Abbildung das reelle sphärische Bild des A-Systems in das des B-Systems überführt.* Soll das reelle Netz der Hauptflächen des A-Systems außerdem noch isotherm sein, so muß gelten: $G = -E$, $F = iE$. $\mathfrak{y}$ läßt sich dann nebenbei bemerkt so darstellen:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u + iv),$$

wo $\mathfrak{y}$ eine analytische Funktion von $u + iv$ ist. Die Bemerkungen zu (27) liefern uns jetzt weiter den Satz:

$$W \equiv 0, \quad \bar{\Theta} - \Theta \equiv J$$

sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß das duale sphärische Bild des B-Systems aus dem des A-Systems durch eine gleichsinnig dual-konforme Abbildung hervorgeht.

J muß in diesem Falle, wie Gleichung (19) lehrt, die Form haben:

$$J = f(u) + g(v).$$

Aber auch die Umkehrung gilt: *Dann und nur dann, wenn* $W \equiv 0$, $J = f(u) + g(v)$, *läßt sich das A-System vermittelst einer gleichsinnig dual-konformen Abbildung in das B-System überführen.* Daß solche Strahlensysteme tatsächlich existieren, läßt sich besonders einfach einsehen, wenn wir noch fordern, daß das reelle Netz der Hauptflächen isotherm sein soll, d. h., daß die Gleichungen gelten sollen: $E = -G$, $F = iE$. Da $\mathfrak{y}$ unter dieser Bedingung eine analytische Funktion von $z = u + iv$ ist, wird (23) zu einer Identität. (20) dient dann zur Bestimmung von Θ. Noch ein spezieller Fall unseres letzten Satzes sei erwähnt: *Ist in einem Strahlensystem mit konstanter Hauptdralldifferenz das reelle Netz der Hauptflächen isotherm, so geht das B-System aus dem A-System durch eine gleichsinnig dual-konforme Abbildung hervor* (über isotherme Netze vgl. Blaschke, Dffg. **3**, S. 120—124).

§ 16.

Parameterinvariante Darstellung des K-Systems.

Wir wollen zum Schluß für unser K-System eine solche Darstellung geben, daß wir, sollte uns ein reelles Strahlensystem in beliebigen Parametern vorgelegt sein, ohne weiteres unser zugehöriges K-System analytisch konstruieren können, ohne erst das A-System auf die Hauptflächen als Parameterflächen zu transformieren. Wir führen zu diesem Zwecke folgende drei im allgemeinen linear unabhängigen quadratischen Diffe-

rentialformen ein (wir lehnen uns, was die Symbolik anbelangt, an die Darstellungsweise in Blaschke, Dffg. 2, Abschnitt Tensorrechnung an):

$$\mathfrak{a}_u^2\,du^2 + 2\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v\,du\,dv + \mathfrak{a}_v^2\,dv^2 = g_{ik}\,du^i\,du^k,$$

$$(\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_u - h\,\mathfrak{a}_u^2)\,du^2 + (\mathfrak{a}_u\,\bar{\mathfrak{a}}_v + \mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_u - 2\,h\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)\,du\,dv + (\mathfrak{a}_v\,\bar{\mathfrak{a}}_v - h\,\mathfrak{a}_v^2)\,dv^2 = \bar{g}_{ik}\,du^i\,du^k,$$

$$\left(\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{x}\times\mathfrak{a}, \quad h = \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\right)$$

$$(\mathfrak{a}_v\,\mathfrak{x}_v)\,dv^2 + (\mathfrak{a}_v\,\mathfrak{x}_u + \mathfrak{a}_u\,\mathfrak{x}_v)\,du\,dv + (\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{x}_u)\,du^2 = \hat{g}_{ik}\,du^i\,du^k.$$

Wir haben dabei die Bezeichnungen des § 12 wieder aufgenommen. Die parameterinvariante Darstellung der Mittelpunktsfläche $\mathfrak{x}$ ist aus Blaschke, Dffg. 1, S. 207 zu entnehmen. Die metrischen Tensoren $g_{ik}, \bar{g}_{ik}, \hat{g}_{ik}$ haben die Eigentümlichkeit, sich bei Transformationen der G_{12} bis auf einen auch allen ihren Komponenten gemeinsamen Faktor zu reproduzieren. Definieren wir jetzt den parameterinvarianten Raumvektor ξ durch

$$\xi = \hat{g}^{ik}\,\mathfrak{a}_{ik},$$

wo $\mathfrak{a}_{ik}$ die zweite kovariante Ableitung von $\mathfrak{a}$ bezüglich der Grundform $\hat{g}_{ik}\,du^i\,du^k$ bedeutet, so stellen sich $\mathfrak{y}$ und $\frac{3+\bar{3}}{2}$ folgendermaßen dar:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{a} + g^{ik}(\log J)_i\,\mathfrak{a}_k + \frac{J^2}{8}\,\hat{g}^{ik}(\xi\,\mathfrak{a}_i)\,\mathfrak{a}_k + i\left\{\alpha^{ik}(\log J)_i\,\mathfrak{a}_k - \frac{J^2}{8}\,\bar{g}^{ik}(\xi\,\mathfrak{a}_i)\,\mathfrak{a}_k\right\},$$

$$\frac{3+\bar{3}}{2} = \mathfrak{x} + \alpha^{ik}\,h_i\,\mathfrak{a}_k - \frac{J^2}{4}\,g^{ik}(\xi\,\mathfrak{a}_i)\,\mathfrak{a}_k + i\left\{-h\mathfrak{a} - g^{ik}\,h_i\,\mathfrak{a}_k + \frac{J^2}{4}\,\alpha^{ik}(\xi\,\mathfrak{a}_k)\,\mathfrak{a}_i\right\},$$

$$\alpha^{11} = 0, \quad \alpha^{12} = |g_{ik}|^{-1/2}, \quad \alpha^{21} = -|g_{ik}|^{-1/2}, \quad \alpha^{22} = 0.$$

Anhang zu § 13.

Beziehungen zur Möbiusgeometrie.

Wie wir in § 13 gesehen haben, führt bei Strahlensystemen mit $J = \text{const}$ die Theorie der Einheitsvektoren $\mathfrak{y}$ der komplexen Geraden, die die Punkte $3, \bar{3}$ verbinden (vgl. § 14), auf die hyperbolische Geometrie der orthogonalen Kurvennetze auf der Einheitskugel zurück. Es müssen sich also die absoluten hyperbolischen Invarianten eines orthogonalen Kurvennetzes auf der Einheitskugel durch bewegungsgeometrische Invarianten der Vektoren $\mathfrak{y}$ ausdrücken lassen. Es sei hier nur kurz angeführt, daß die von Blaschke aufgestellten, in seinem Werke Dffg. 3, S. 130 mit R und $\bar{R}$ bezeichneten Invarianten identisch sind mit den Invarianten

$$\frac{J(\mathfrak{y}_u^3)}{R(\mathfrak{y}_u^2)}, \qquad -\frac{J(\mathfrak{y}_v^3)}{R(\mathfrak{y}_v^2)}.$$

Die Invarianten H, $\overline{H}$ lassen sich leicht unter Berücksichtigung der Beziehungen:

$$(\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_v) = R(\mathfrak{y}_v^2), \quad (\bar{\mathfrak{x}}_u\,\bar{\mathfrak{x}}_u) = R(\mathfrak{y}_u^2)^{8})$$

und der Gleichungen 155 bei Blaschke, Dffg. 3, S. 131, bewegungsgeometrisch durch $\mathfrak{y}$ ausdrücken.

Später werden wir sehen, daß wir von den Strahlensystemen mit konstanter Hauptdralldifferenz nicht zu einem beliebig vorgegebenen Kurvennetze auf der Einheitskugel gelangen können.

[8]) $\mathfrak{x}$, $\bar{\mathfrak{x}}$ sind die Vierervektoren der Schmiegkreise an die u- bzw. v-Kurve des orthogonalen Netzes.

(Eingegangen am 17. November 1932.)

Über den Differential- und Differenzenquotient von regulären analytischen Funktionen, insbesondere von Polynomen[1]).

Von

Georg Aumann in München.

I. Einleitung, Probleme und Resultate.

1. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt für die reellwertige, im Intervall $a \leqq x \leqq b$ einmal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$, die den Bedingungen $f(a) = a$, $f(b) = b$ genügt, daß es wenigstens eine Stelle x_0 im obigen Intervall gibt mit $f'(x_0) = 1$. Läßt man nun bei $f(x)$ auch komplexe Werte zu, so kann man zwar nicht mehr das letztere behaupten, wohl aber, daß es im obigen Intervall mindestens eine Stelle gibt, wo der absolute Betrag der Ableitung nicht kleiner ist als 1; denn aus der Abschätzung von

$$b - a = \int_a^b f'(x)\, dx$$

folgt unmittelbar

$$1 \leqq \operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Diese kleine Überlegung gibt Anlaß, das folgende allgemeine *Abschätzungsproblem* zu stellen:

Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen z-Ebene, das die Punkte $z = a$, $z = b$ $(a \neq b)$ im Innern enthält; $f(z)$ sei eine in G reguläre analytische Funktion, und

$$f(a) = a, \quad f(b) = b. \tag{1}$$

Die Frage ist: Welches ist die beste, von $f(z)$ unabhängige untere Schranke von $\operatorname{Max} |f'(z)|$ auf irgendeinem innerhalb G verlaufenden, die Punkte a und b verbindenden einfachen Kurvenbogen C? Bezeichnet man diese Schranke mit $\mathsf{A}_G(a, b)$, die Gesamtheit der in G regulären, durch (1)

[1]) Habilitationsschrift, Universität München, 1933.

normierten Funktionen $f(z)$ mit $\mathfrak{R}_{a\,b}$, die Gesamtheit der a und b innerhalb G verbindenden einfachen Kurvenbogen C mit $\mathfrak{C}$, dann ist

$$\mathsf{A}_G(a,b) = \underset{\substack{C \prec \mathfrak{C} \\ f(z) \prec \mathfrak{R}_{a\,b}}}{\text{unt. Gr.}} \left(\underset{z \prec C}{\text{Max}} |f'(z)|\right).$$

Man kann diese Abschätzungsaufgabe in der Weise verfeinern, daß man nicht alle in G regulären Funktionen zuläßt, sondern nur eine gewisse Familie $\mathfrak{F}$ von in G regulären, nicht identisch konstanten Funktionen in Betracht zieht. Diese Familie $\mathfrak{F}$ besitze dabei die Eigenschaft, daß sie mit $f(z)$ allemal auch die Funktion

$$c f(z) + d \qquad (c \neq 0,\ d \text{ beliebige Zahlen})$$

enthalte. Mit $\mathfrak{F}_{a\,b}$ bezeichne ich dann die durch (1) normierte Teilfamilie von $\mathfrak{F}$. Man hat dann die Schranke

$$\mathsf{A}_G(a,b;\mathfrak{F}) = \underset{\substack{C \prec \mathfrak{C} \\ f(z) \prec \mathfrak{F}_{a\,b}}}{\text{unt. Gr.}} \left(\underset{z \prec C}{\text{Max}} |f'(z)|\right).$$

Von Interesse ist weiter die Zahl

$$\mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}} = \underset{a \neq b \prec G}{\text{unt. Gr.}}\, \mathsf{A}_G(a,b;\mathfrak{F}).$$

Mit diesen Zahlen A stehen die auf folgende Weise definierten Zahlen α in engstem Zusammenhang:

Vorgegeben sei eine zusammenhängende Punktmenge B der z-Ebene. Auf B betrachte ich eine reguläre, nicht identisch konstante Funktion $f(z)$ einer Familie $\mathfrak{F}$, welche die oben erwähnte Vollständigkeitseigenschaft besitze. Dann ist auch der Differenzenquotient

$$f'(z_1, z_2) = \begin{cases} \dfrac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} & \text{für } z_1 \neq z_2, \\ f'(z_1) & \text{für } z_1 = z_2 \end{cases}$$

eine für alle Werte z_1, z_2 aus B reguläre analytische Funktion. Ist dann K ein beschränktes Teilkontinuum von B, so bilde ich

$$\alpha_{B,\mathfrak{F}} = \underset{\substack{K \prec B \\ f(z) \prec \mathfrak{F}}}{\text{unt. Gr.}} \left(\frac{\underset{z \prec K}{\text{Max}} |f'(z)|}{\underset{z_1, z_2 \prec K}{\text{Max}} |f'(z_1, z_2)|} \right);$$

K durchläuft dabei alle beschränkten Teilkontinuen von B, $f(z)$ alle Funktionen von $\mathfrak{F}$. Ist B ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und $\mathfrak{F}$ eine Familie, die auch die Funktion z enthält, so ist, wie wir zeigen werden: $\alpha_{B,\mathfrak{F}} = \mathsf{A}^*_{B,\mathfrak{F}}$. Die Zahl $\alpha_{B,\mathfrak{F}}$ gibt offenbar einen gewissen Aufschluß über das Wachstumsverhältnis von Differential- und Differenzenquotient einer Funktion der Familie $\mathfrak{F}$ auf der Punktmenge B.

Noch eine Abart unseres Problems gibt es, und zwar nach der *konformen Invarianz* hin: Man betrachtet in G zwei reguläre Funktionen $f(z)$, $g(z)$ mit $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, wobei außerdem $g(z)$ in G schlicht ist. Man soll für

$$\operatorname*{Max}_{z \prec C} \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right|$$

auf einem die Punkte a und b innerhalb G verbindenden einfachen Kurvenbogen C eine untere Schranke bestimmen, die nur von G, a, b, nicht aber von $f(z)$, $g(z)$ und der Verbindungskurve C abhängt. Nennen wir diese Schranke $\mathsf{B}_G(a, b)$; sie ist die untere Grenze obigen Ausdrucks, und ihre konforme Invarianz besteht in folgendem: Bildet man G schlicht und konform ab auf ein Gebiet G', wobei die Punkte a, b in a' bzw. b' übergehen, dann ist $\mathsf{B}_{G'}(a', b') = \mathsf{B}_G(a, b)$. Diese konforme Invarianz erweist sich allerdings als eine Trivialität; denn wir werden zeigen, daß für jedes einfach zusammenhängende Gebiet G bei jeder Wahl der Punkte $a \neq b$ in G stets $\mathsf{B}_G(a, b)$ verschwindet.

Die Bestimmung der oben definierten Zahlen — und sei es nur implizit — dürfte in den meisten Fällen ganz erhebliche Schwierigkeiten bereiten; die vorliegende Arbeit kann in Anbetracht der Fülle der Aufgaben, zu welchen unsere Abschätzungsprobleme herausfordern, nur ein bescheidener Anfang sein. Hauptsächlich werden wir uns mit dem Spezialfall befassen, daß das fragliche Gebiet die ganze Ebene ist. Ich führe noch einige Ergebnisse an:

Ist B ein Kreisbogen mit dem Öffnungswinkel φ $(0 < \varphi < 2\pi)$, $\mathfrak{R}$ die Gesamtheit aller auf B regulären Funktionen, dann ist $\alpha_{B,\mathfrak{R}} = \dfrac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi}$. Enthält die zusammenhängende Menge B innere Punkte, und bezeichnet $\mathfrak{R}$ die Gesamtheit aller auf B regulären Funktionen, so ist $\alpha_{B,\mathfrak{R}} = 0$. Sind E die ganze endliche Ebene, a und b zwei verschiedene Punkte, $\mathfrak{F}$ eine Familie ganzer Funktionen, welche mit $f(z)$ allemal auch alle Funktionen $c' f(cz + d) + d'$ $(c \neq 0, c' \neq 0)$ mitenthält, dann ist

$$\mathsf{A}_E(a, b; \mathfrak{F}) = \alpha_{E,\mathfrak{F}}.$$

Außerdem ist

$$\mathsf{A}_E(a, b) = 0.$$

Bedeutet $\mathfrak{F}^n$ $(n \geqq 1)$ die Gesamtheit der Polynome von mindestens erstem, aber höchstens n-tem Grad und setzt man

$$\mathsf{A}_n = \mathsf{A}_E(a, b; \mathfrak{F}^n),$$

dann ist

$$1 = \mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_2, \ \tfrac{12}{13} = \mathsf{A}_3 \geqq \mathsf{A}_4 \geqq \ldots, \ \lim_{n \to \infty} \mathsf{A}_n = 0.$$

Die Gleichung $\mathsf{A}_3 = \frac{12}{13}$ besagt z. B. soviel wie der

Satz: *Ist $P(z)$ irgendein Polynom höchstens dritten Grades mit $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, dann gibt es auf jedem die Punkte 0 und 1 verbindenden einfachen Kurvenbogen mindestens einen Punkt, wo die Ableitung $P'(z)$ dem Betrage nach nicht kleiner ist als $\frac{12}{13}$. Diese Zahl ist scharf.*

Setzt man $a = \frac{3}{12} + \frac{\sqrt{15}}{12} i$, so ist $|1 + 3a^2| = 1$ und

$1 + a^2 + a\bar{a} + \bar{a}^2 = \frac{13}{12}$. Bei $P(z) = \frac{12}{13}\left(z + \frac{[a + (\bar{a} - a)z]^3 - a^3}{\bar{a} - a}\right)$

mit $P'(a) = \frac{12}{13}(1 + 3[a + (\bar{a} - a)z]^2)$ wird auf der Kurve $|P'(z)| = \frac{12}{13}$ die Grenze erreicht.

Für $n \geqq 4$ ist der Wert von A_n noch unbekannt. Ich konnte nur eine positive untere Schranke der A_n angeben.

II. Über das Wachstumsverhältnis von Differential- und Differenzenquotient.

2. Es sei B eine zusammenhängende Punktmenge der z-Ebene, $\mathfrak{F}$ eine Familie von auf B regulären, nicht identisch konstanten Funktionen $f(z)$. Mit $f'(z_1, z_2)$ bezeichne ich den Differenzenquotient von $f(z)$ (siehe **1.**). Ist dann K ein beschränktes Teilkontinuum von B, so bilde ich

$$\gamma_{f,K} = \frac{\underset{z \prec K}{\text{Max}} \; |f'(z)|}{\underset{z_1, z_2 \prec K}{\text{Max}} \; |f'(z_1, z_2)|},$$

und dann

$$\beta_{f,B} = \underset{K \prec B}{\text{unt. Gr.}} \; \gamma_{f,K}.$$

Die Zahlen $\gamma_{f,K}$ besitzen die folgenden Eigenschaften: Sind $c \neq 0$, d beliebige Zahlen, dann ist

$$\gamma_{cf+d,K} = \gamma_{f,K}.$$

Die Transformation

$$z = c\zeta + d \qquad (c \neq 0) \tag{2}$$

bilde K auf K_1 ab; setzt man dann $f(c\zeta + d) = \varphi(\zeta)$, so ist $\gamma_{\varphi,K_1} = \gamma_{f,K}$. Entsprechend ist $\beta_{cf+d,B} = \beta_{f,B}$ und $\beta_{\varphi,B_1} = \beta_{f,B}$, wobei B_1 das Bild von B vermöge der Abbildung (2) ist. Schließlich bilde ich noch

$$\alpha_B = \underset{\{f\}}{\text{unt. Gr.}} \; \beta_{f,B},$$

worin $f(z)$ alle in B regulären, nicht identisch konstanten Funktionen zu durchlaufen hat. Die Zahl α_B ist wegen $0 < \gamma_{f,K} \leqq 1$ nicht-negativ und nicht größer als 1. Sie hängt nur von der Punktmenge B ab und gibt *ein Maß für das Wachstumsverhältnis von Differential- und Differenzenquotient* einer in B regulären analytischen Funktion. Wegen der erwähnten Eigenschaft von $\beta_{f,B}$ hat α_B für zwei ähnliche Punktmengen

denselben Wert. Wir werden zeigen, daß α_B für jede Punktmenge mit inneren Punkten verschwindet, für gewisse andere Punktmengen aber jeden Wert zwischen 0 und 1 wirklich annehmen kann.

3. Wir beweisen

Satz 1. *Ist $\mathfrak{F}'$ eine Teilfamilie einer gewissen Familie $\mathfrak{F}$ von auf B regulären Funktionen mit der Eigenschaft, daß der Differenzenquotient jeder Funktion $f(z)$ der Familie $\mathfrak{F}$ auf jedem beschränkten Teilkontinuum von B durch die Differenzenquotienten einer Folge von Funktionen $\varphi(z)$ der Familie $\mathfrak{F}'$ gleichmäßig approximiert werden kann, dann gilt:*

$$\underset{\varphi \prec \mathfrak{F}'}{\text{unt. Gr.}}\, \beta_{\varphi, B} = \underset{f \prec \mathfrak{F}}{\text{unt. Gr.}}\, \beta_{f, B}.$$

Beweis. Zunächst folgt aus $\mathfrak{F}' < \mathfrak{F}$

$$\varrho' = \underset{\varphi \prec \mathfrak{F}'}{\text{unt. Gr.}}\, \beta_{\varphi, B} \geqq \underset{f \prec \mathfrak{F}}{\text{unt. Gr.}}\, \beta_{f, B} = \varrho.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein beschränktes Teilkontinuum K von B und eine Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{F}$, so daß

$$\gamma_{f, K} \leqq \varrho + \frac{\varepsilon}{2},$$

außerdem ein $\varphi(z)$ aus $\mathfrak{F}'$, welches $f(z)$ auf K so gut approximiert, daß

$$\gamma_{\varphi, K} \leqq \gamma_{f, K} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Hieraus folgt

$$\varrho' \leqq \gamma_{\varphi, K} \leqq \varrho + \varepsilon,$$

und durch Grenzübergang

$$\varrho' \leqq \varrho,$$

was mit obiger Ungleichung zusammen unsere Behauptung $\varrho' = \varrho$ liefert. Satz 1 gilt insbesondere dann, wenn $\mathfrak{F}$ die Gesamtheit aller auf B regulären Funktionen ist; dann steht für ϱ die Zahl α_B. Ganz ähnlich beweist man, wenn man beachtet, daß sich jede auf einem beschränkten Kontinuum reguläre Funktion durch Polynome gleichmäßig approximieren läßt

Satz 2. *Ist B_1 eine zusammenhängende Teilmenge der zusammenhängenden Menge B, dann ist*

$$\alpha_B \leqq \alpha_{B_1}.$$

4. Nun berechnen wir für zwei einfache Fälle von zusammenhängenden Punktmengen die Zahlen α_B.

Satz 3. a) *Ist S eine Strecke oder Halbgerade, oder eine ganze Gerade, so ist*

$$\alpha_S = 1.$$

b) *Ist K_φ ein Kreisbogen mit dem Öffnungswinkel φ, wobei $0 < \varphi < 2\pi$, dann gilt*

$$\alpha_{K_\varphi} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi}.$$

Beweis. Im Falle a) sind die einzigen beschränkten Teilkontinuen von S die abgeschlossenen Teilstrecken; sei S_1 eine solche Strecke. Für irgend zwei Punkte z_1 und z_2 von S_1 und eine auf S reguläre Funktion $f(z)$ gilt

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\int_{z_1}^{z_2} f'(z)\,dz\right| \leqq |z_1 - z_2| \cdot \operatorname*{Max}_{z \prec S_1} |f'(z)|.$$

Hieraus folgt zunächst $\gamma_{f,S_1} \geqq 1$, und nach einer in 2. stehenden Ungleichung

$$\gamma_{f,S_1} = 1.$$

Somit ist

$$\alpha_S = 1.$$

Im Falle b) sind die einzigen beschränkten Teilkontinuen von K_φ die abgeschlossenen Teilkreisbogen. Sei C ein solcher. Für zwei verschiedene Punkte z_1 und z_2 desselben und für eine auf K_φ reguläre Funktion $f(z)$ folgt wie oben nach der bekannten Ungleichung der Integralrechnung

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \leqq \frac{l(z_1, z_2)}{|z_1 - z_2|} \operatorname*{Max}_{z \prec C} |f'(z)|,$$

wobei $l(z_1, z_2)$ die Bogenlänge desjenigen Teilbogens von K_φ ist, der z_1 und z_2 zu Endpunkten hat. Weiter ist

$$\operatorname*{Max}_{z_1, z_2 \prec C} |f'(z_1, z_2)| \leqq \operatorname*{Max}_{z_1, z_2 \prec C} \frac{l(z_1, z_2)}{|z_1 - z_2|} \cdot \operatorname*{Max}_{z \prec C} |f'(z)|.$$

Ist ψ der Öffnungswinkel von C, so ergibt eine elementare Überlegung

$$\operatorname*{Max}_{z_1, z_2 \prec C} \frac{l(z_1, z_2)}{|z_1 - z_2|} = \frac{\psi}{2 \sin \frac{\psi}{2}}.$$

Es ist also

$$\gamma_{f,C} \geqq \frac{2 \sin \frac{\psi}{2}}{\psi} \geqq \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi},$$

somit

$$\alpha_{K_\varphi} \geqq \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi}.$$

Andererseits zeigt das folgende Beispiel, daß in letzterer Ungleichung das Gleichheitszeichen auftreten kann:

Sei K_φ^* der Bogen

$$z = e^{i\vartheta} \quad \left(-\frac{\varphi}{2} \leqq \vartheta \leqq \frac{\varphi}{2}\right)$$

des Einheitskreises. Für die auf K_φ^* reguläre Funktion

$$f^*(z) = \log z = i\vartheta$$

ist, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$\gamma_{f^*, C} = \frac{2 \sin \frac{\psi}{2}}{\psi},$$

und daher

$$\beta_{f^*, K_\varphi^*} = \underset{0 < \psi \leqq \varphi}{\text{unt. Gr.}} \frac{2 \sin \frac{\psi}{2}}{\psi} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi},$$

womit wegen $\alpha_{K_\varphi^*} \leqq \beta_{f^*, K_\varphi^*}$ unsere Behauptung nachgewiesen ist.

Bemerkung: α_{K_φ} kann jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen.

5. Nun folgt leicht

Satz 4. *Enthält B innere Punkte, dann ist $\alpha_B = 0$.*

Beweis. Für jeden Öffnungswinkel φ $(0 < \varphi < 2\pi)$ gibt es nach Voraussetzung einen ganz in B enthaltenen abgeschlossenen Kreisbogen K_φ. Nach Satz 2 ist

$$0 \leqq \alpha_B \leqq \alpha_{K_\varphi}.$$

Für $\varphi \to 2\pi$ folgt dann die Behauptung.

Als Spezialfall erwähnen wir

Satz 5. *Ist E die ganze (endliche) Ebene, dann ist $\alpha_E = 0$.*

6. Jetzt können wir die in **1.** genannte konforminvariante Abschätzungsaufgabe erledigen. Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene; die Punkte $a \neq b$ seien im Innern von G. $f(z)$, $g(z)$ seien in G regulär, $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, und außerdem $g(z)$ in G schlicht. Man bildet

$$\mathfrak{B}_G(a, b) = \underset{\substack{\{f, g\} \\ C < G}}{\text{unt. Gr.}} \left(\underset{z < C}{\text{Max}} \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| \right),$$

worin $f(z)$, $g(z)$ die Gesamtheit der durch obige Bedingungen bestimmten Funktionenklasse, und C die Gesamtheit der a und b innerhalb G verbindenden einfachen Kurvenbogen durchlaufen. Stellt $z = \varphi(\zeta)$ eine schlichte konforme Abbildung von G auf das Gebiet G_1 der ζ-Ebene dar, so mögen dadurch a, b, C in a_1, b_1, C_1 bzw. übergehen. Setzt man dann $f_1(\zeta) = f(\varphi(\zeta))$, $g_1(\zeta) = g(\varphi(\zeta))$, so ist $f_1(a_1) = g_1(a_1)$, $f_1(b_1) = g_1(b_1)$ und $g_1(\zeta)$ in G_1 schlicht. Außerdem ist

$$\frac{f_1'(\zeta)}{g_1'(\zeta)} = \frac{f'(z)}{g'(z)},$$

daher

$$\underset{\zeta < C_1}{\text{Max}} \left| \frac{f_1'(\zeta)}{g_1'(\zeta)} \right| = \underset{z < C}{\text{Max}} \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right|.$$

Hieraus folgt

$$\mathsf{B}_{G_1}(a_1, b_1) = \mathsf{B}_G(a, b),$$

d. h. die konforme Invarianz der Zahlen B. Diese folgt aber auch (trivialerweise) aus

Satz 6. *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und sind a, b zwei verschiedene Punkte in dessen Innern, dann ist* $\mathsf{B}_G(a, b) = 0$.

Beweis. $\varepsilon > 0$. Wir werden ein Funktionenpaar $f(z), g(z)$ konstruieren, welches den obigen Bedingungen genügt, und dazu eine a und b verbindende Kurve C, so daß

$$\operatorname*{Max}_{z \prec C} \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| < \varepsilon.$$

Es gibt eine konforme Abbildung

$$\zeta = g(z) \tag{3}$$

von G auf eine Halbebene G' der ζ-Ebene, die durch

$$\Im \zeta > -\varrho, \quad \varrho > 0$$

definiert ist, wobei $z = a$ in $\zeta = 0$ und $z = b$ in $\zeta = 1$ übergeht. Setzt man $\zeta_0 = \frac{1}{2} + it$, $t > 0$, so kann auf dem Kreisbogen K

$$|\zeta - \zeta_0| = |\zeta_0|, \ \Im \zeta \geqq 0$$

ein Zweig $\chi(\zeta)$ der Funktion

$$c \log(\zeta - \zeta_0) + d, \quad c \neq 0,$$

eindeutig erklärt, und durch geeignete Wahl von c und d erreicht werden, daß $\chi(0) = 0$, $\chi(1) = 1$ ist. Wie in **4.** folgt

$$\operatorname*{Max}_{\zeta \prec K} |\chi'(\zeta)| = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi};$$

φ ist der Öffnungswinkel von K. Nun läßt sich t so groß wählen, daß

$$\frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\varphi} < \frac{\varepsilon}{2},$$

und außerdem ein Polynom $P(\zeta)$ mit $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ angeben, welches $\chi(\zeta)$ auf K so gut approximiert, daß

$$\operatorname*{Max}_{\zeta \prec K} |P'(\zeta)| < \operatorname*{Max}_{\zeta \prec K} |\chi'(\zeta)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist

$$\operatorname*{Max}_{\zeta \prec K} |P'(\zeta)| < \varepsilon.$$

Durch (3) wird K auf einen a, b verbindenden Kurvenbogen C in G abgebildet. Setzt man $f(z) = P(g(z))$, so ist $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ und

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = P'(\zeta);$$

daher

$$\operatorname*{Max}_{z<C} \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} \right| = \operatorname*{Max}_{\zeta<K} |P'(\zeta)| < \varepsilon.$$

7. Man kann die an die Zahlen α_B (siehe **2.**) anschließenden Untersuchungen in der Weise verfeinern, daß man von den Größen $\beta_{f,B}$ nicht zu α_B übergeht, sondern zu

$$\alpha_{B,\mathfrak{F}} = \operatorname*{unt.\,Gr.}_{f<\mathfrak{F}} \beta_{f,B},$$

wobei $\mathfrak{F}$ eine gewisse Familie von auf B regulären, nicht identisch konstanten Funktionen ist. Es gilt wieder $0 \leqq \alpha_{B,\mathfrak{F}} \leqq 1$. Auf Grund einer in **2.** erwähnten Eigenschaft der Zahlen $\beta_{f,B}$ bleibt $\alpha_{B,\mathfrak{F}}$ ungeändert, wenn man darin $\mathfrak{F}$ durch diejenige Familie ersetzt, die man aus $\mathfrak{F}$ erhält, wenn man zu den Funktionen $f(z)$ von $\mathfrak{F}$ noch alle Funktionen der Form

$$(4) \qquad c f(z) + d \qquad (c \neq 0,\ d \text{ beliebig})$$

hinzunimmt. Eine Funktionenfamilie $\mathfrak{F}$, welche mit $f(z)$ allemal auch die Funktionen (4) mitenthält, werde für das Folgende eine *volle Familie* genannt.

Der Zusammenhang zwischen den Zahlen $\alpha_{B,\mathfrak{F}}$ und den in **1.** definierten Größen $\mathsf{A}_G(a, b; \mathfrak{F})$ und $\mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}}$ wird durch die folgenden Sätze hergestellt:

Satz 7. *Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\mathfrak{F}$ eine volle Familie von in G regulären, nicht identisch konstanten Funktionen $f(z)$, welche auch die Funktion $f(z) = z$ enthält, dann ist*

$$\mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}} = \alpha_{G,\mathfrak{F}}.$$

Satz 8. *Ist E die ganze endliche Ebene, $\mathfrak{F}$ eine volle Familie von nicht identisch konstanten ganzen Funktionen, die auch die Funktion z enthält, und außerdem mit jedem $f(z)$ auch die Funktion $f(cz + d)$ $(c \neq 0)$, dann ist $\alpha_{E,\mathfrak{F}} = \mathsf{A}_E(a, b; \mathfrak{F})$.*

Beweis von Satz 7. Ist C ein die Punkte a, b von G verbindender Kurvenbogen, $f(z)$ eine Funktion der Familie $\mathfrak{F}_{ab}$, d. h. derjenigen Teilfamilie von $\mathfrak{F}$, für deren Funktionen $f(a) = a$, $f(b) = b$ ist, dann hat man

$$\alpha_{G,\mathfrak{F}} \leqq \gamma_{f,C} = \frac{\operatorname*{Max}_{z<C} |f'(z)|}{\operatorname*{Max}_{z_1, z_2 < C} |f'(z_1, z_2)|} \leqq \frac{\operatorname*{Max}_{z<C} |f'(z)|}{\left| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right|} = \operatorname*{Max}_{z<C} |f'(z)|.$$

Hieraus folgt durch Übergang zur unteren Grenze [es variiert der Verbindungsbogen C in G und $f(z)$ in $\mathfrak{F}_{ab}$]

$$\alpha_{G,\mathfrak{F}} \leqq \mathsf{A}_G(a,b;\mathfrak{F}),$$

und hieraus ergibt sich durch einen weiteren Übergang zur unteren Grenze (jetzt variieren die Endpunkte $a \neq b$ in G)

$$\alpha_{G,\mathfrak{F}} \leqq \mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}}.$$

Da $\mathfrak{F}$ die Funktion z enthält, so ist $\mathsf{A}_G(a,b;\mathfrak{F}) \leqq 1$, daher auch

$$\mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}} \leqq 1.$$

Nun unterscheide ich zwei Fälle:

1. $\alpha_{G,\mathfrak{F}} = 1$, dann ist wegen obiger Ungleichung $1 \leqq \mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}}$, daher auch $\mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}} = 1$, und unsere Behauptung für diesen Fall bewiesen.

2. Es sei $\alpha_{G,\mathfrak{F}} < 1$, $\varepsilon > 0$, und $\alpha_{G,\mathfrak{F}} + \varepsilon < 1$. Dann gibt es ein $f(z)$ aus $\mathfrak{F}$ und ein beschränktes, ganz im Innern von G liegendes Kontinuum K, so daß

$$\gamma_{f,K} < \alpha_{G,\mathfrak{F}} + \varepsilon.$$

Man kann K in ein Polygon einschließen, das ganz im Innern von G liegt. Mit L bezeichne ich die abgeschlossene Hülle des Polygoninnern. Es ist $\underset{z \prec K}{\mathrm{Max}} |f'(z)| = \sigma > 0$. Vom Durchschnitt der Punktmenge

$$|f'(z)| \leqq \sigma$$

mit der Menge L nehme ich diejenige größte zusammenhängende Teilmenge M, welche K enthält; man hat $\underset{z \prec M}{\mathrm{Max}} |f'(z)| = \sigma$. Wegen $M > K$ ist dann

$$\gamma_{f,M} \leqq \gamma_{f,K} < \alpha_{G,\mathfrak{F}} + \varepsilon.$$

Nun kann man auf M Punkte $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ angeben, so daß

$$\underset{z \prec M}{\mathrm{Max}} |f'(z)| = |f'(\zeta_0)|,$$

$$\underset{z_1, z_2 \prec M}{\mathrm{Max}} |f'(z_1, z_2)| = |f'(\zeta_1, \zeta_2)| > 0.$$

Wäre $\zeta_1 = \zeta_2$, dann hätte man $\gamma_{f,M} = 1$, was unserer Voraussetzung widerspricht; also ist $\zeta_1 \neq \zeta_2$ und dann auch $f(\zeta_1) \neq f(\zeta_2)$. Es gibt zwei Zahlen $c \neq 0, d$, so daß für die Funktion

$$cf(z) + d = g(z)$$

unserer Familie $g(\zeta_1) = \zeta_1$, $g(\zeta_2) = \zeta_2$ und $\gamma_{f,M} = \gamma_{g,M}$, außerdem

$$\underset{z \prec M}{\mathrm{Max}} |g'(z)| = |g'(\zeta_0)|,$$

$$\underset{z_1, z_2 \prec M}{\mathrm{Max}} |g'(z_1, z_2)| = |g'(\zeta_1, \zeta_2)| = 1$$

ist. Man kann ζ_1 über ζ_0 mit ζ_2 durch einen Kurvenbogen C verbinden, der ganz in M verläuft. Es ist

$$\gamma_{g,M} = \gamma_{g,C} = \operatorname*{Max}_{z \prec C} |g'(z)| \geqq \mathsf{A}_G(\zeta_1, \zeta_2; \mathfrak{F}) \geqq \mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}}.$$

Hieraus folgt

$$\mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}} \leqq \alpha_{G,\mathfrak{F}} + \varepsilon,$$

für $\varepsilon \to 0$ schließlich

$$\mathsf{A}^*_{G,\mathfrak{F}} \leqq \alpha_{G,\mathfrak{F}}.$$

Dies liefert mit obiger Ungleichung zusammen die Behauptung unseres Satzes.

Beweis von Satz 8. Alles, was im vorigen Beweis steht, gilt auch im jetzigen Falle, nur ist statt G der Buchstabe E zu setzen. Dementsprechend knüpfen wir an die Ungleichung

$$\gamma_{g,C} \leqq \alpha_{E,\mathfrak{F}} + \varepsilon$$

an, wobei $g(z)$ die obige Funktion ist. Die Transformation $\zeta = cz + d$ führt die Punkte $z = a$, $z = b$ in $\zeta = \zeta_1$, $\zeta = \zeta_2$, und die Kurve C der ζ-Ebene in die Kurve C' der z-Ebene über. Für die Funktion

$$h(z) = \frac{g(cz+d) - d}{c}$$

ist dann

$$h(a) = a, \quad h(b) = b$$

und

$$\operatorname*{Max}_{z_1, z_2 \prec C'} |h'(z_1, z_2)| = |h'(a, b)| = 1.$$

Sodann ist

$$\gamma_{g,C} = \gamma_{h,C'} = \operatorname*{Max}_{z \prec C'} |h'(z)| \geqq \mathsf{A}_E(a, b; \mathfrak{F}),$$

also

$$\mathsf{A}_E(a, b; \mathfrak{F}) \leqq \alpha_{E,\mathfrak{F}} + \varepsilon$$

und mit $\varepsilon \to 0$

$$\mathsf{A}_E(a, b; \mathfrak{F}) \leqq \alpha_{E,\mathfrak{F}},$$

was mit einer Ungleichung, die schon im vorigen Beweis steht ($G = E$), zusammen die Behauptung von Satz 8 ergibt.

Ist speziell $\mathfrak{F}$ die Gesamtheit aller nicht identisch konstanten ganzen Funktionen, dann ist nach dem eben bewiesenen Satz

$$\alpha_E = \alpha_{E,\mathfrak{F}} = \mathsf{A}_E(a, b; \mathfrak{F}) = \mathsf{A}_E(a. b),$$

und aus Satz 5 folgt

Satz 5a: $$\mathsf{A}_E(a, b) = 0.$$

Das Ergebnis von Satz 5a ist nicht besonders überraschend; es besagt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine ganze Funktion $g(z)$ mit $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, und dazu einen die Punkte 0 und 1 verbindenden einfachen Kurvenbogen, auf dem $|g'(z)| < \varepsilon$. Wie man eine solche ganze Funktion findet — es läßt sich sogar ein Polynom mit diesen Eigenschaften angeben —, ist dem Beweis von Satz 6 zu entnehmen.

Die ungemein wichtige Frage, ob es überhaupt einfach zusammenhängende Gebiete G gibt, für welche $\mathsf{A}_G(a, b)$ positiv ausfällt, lasse ich an dieser Stelle unbeantwortet; vermutlich ist sie zu bejahen, obwohl für jedes Gebiet G die untere Grenze von $\mathsf{A}_G(a, b)$, wobei $a \neq b$ in G variieren, auf Grund der Sätze 7 und 4 verschwindet. Daß natürlich $\mathsf{A}_G(a, b; \mathfrak{F})$ positiv sein kann, wenn man nur die Familie $\mathfrak{F}$ geeignet eng wählt, ist klar; das geht auch aus den nachfolgenden Untersuchungen hervor, wo $\mathfrak{F}$ eine gewisse Familie von Polynomen und G die ganze Ebene ist.

III. Polynome.

8. Die vorausgehenden Untersuchungen zeigen, daß die genaue Kenntnis des Verhaltens der Polynome hinsichtlich unserer Probleme hinreicht, alle Fragen zu beantworten. Es ist daher ganz natürlich, daß wir unser Augenmerk auf Polynome lenken.

Es sei E die ganze endliche Ebene, n eine natürliche Zahl, $\mathfrak{F}^n$ die Gesamtheit der Polynome von mindestens erstem, aber höchstens n-tem Grad. Sind $c \neq 0, d$, $c' \neq 0, d'$ beliebige Zahlen, $P(z)$ ein Polynom der Familie $\mathfrak{F}^n$, dann gehört auch das Polynom

$$c' P(cz + d) + d' = Q(z)$$

zu $\mathfrak{F}^n$; wir nennen es zu $P(z)$ *äquivalent*. Offenbar ist auch $P(z)$ zu $Q(z)$ äquivalent. Die Familie $\mathfrak{F}^n$ besitzt die in Satz 8 verlangten Eigenschaften; daher ist

$$\alpha_{E, \mathfrak{F}^n} = \mathsf{A}_E(a, b; \mathfrak{F}^n).$$

Diese der Familie $\mathfrak{F}^n$ zugeordnete Größe bezeichnen wir mit A_n. Wegen $\mathfrak{F}^n \prec \mathfrak{F}^{n+1}$, und da $\mathfrak{F}^1$ die Funktion z enthält, ist

$$1 \geqq \mathsf{A}_1 \geqq \mathsf{A}_2 \geqq \ldots \geqq \mathsf{A}_n \geqq \ldots,$$

und nach den Sätzen 1 und 5 (jede ganze Funktion läßt sich auf jedem beschränkten Kontinuum durch Polynome approximieren)

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{A}_n = 0.$$

Gemäß der einen Definition der $\mathsf{A}_n (= \mathsf{A}_E(0, 1; \mathfrak{F}^n))$ haben wir

Satz 9. *Ist $P(z)$ ein Polynom von höchstens n-tem Grad, $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, dann gibt es auf jedem, die Punkte 0 und 1 verbindenden einfachen Kurvenbogen mindestens einen Punkt z^* mit*

$$|P'(z^*)| \geqq \mathsf{A}_n.$$

A_n ist scharf, d. h. es gibt keine größere Zahl als A_n, die dasselbe leisten würde wie A_n.

9. Wir gehen jetzt an die Bestimmung der A_n; sie wird uns für $n = 1, 2, 3$ gelingen, für $n \geqq 4$ konnte ich nur eine untere Schranke angeben. Wir werden je nach Bedarf eine der beiden Definitionen

$$A_n \begin{cases} = A_E(a, b; \mathfrak{F}^n), \\ = \alpha_{E, \mathfrak{F}^n} \end{cases}$$

benutzen. Nehmen wir die zweite, dann ist (siehe **2.**)

$$A_n = \text{unt. Gr. } \beta_{P, E},$$

wobei $P(z)$ die Familie $\mathfrak{F}^n$ durchläuft. Statt $\beta_{P, E}$ schreiben wir im folgenden kurz β_P. Da sich aber jedes Polynom von höchstens n-tem Grad auf jedem beschränkten Kontinuum durch Polynome von genau n-tem Grad gleichmäßig approximieren läßt, so genügt es, nach Satz 1 nur die Polynome von genau n-tem Grad bei der Bildung der obigen unteren Grenze heranzuziehen.

Bei der Berechnung der β_P ist es nicht notwendig, beliebige beschränkte Kontinuen K zu betrachten. Denn ist K ein solches Kontinuum, so sei L diejenige Komponente (= größte zusammenhängende Teilmenge) der Punktmenge

$$|P'(z)| \leqq \sigma, \tag{5}$$

wobei $\sigma = \underset{z \prec K}{\text{Max}} |P'(z)|$, die zugleich K enthält. Dann ist nämlich

$$\gamma_{P, K} \geqq \gamma_{P, L}$$

und daher auch

$$\underset{\{L\}}{\text{unt. Gr.}} \ \gamma_{P, L} = \beta_P.$$

Bezeichnen wir der Kürze halber eine Komponente der Punktmenge (5) als eine *Komponente des Polynoms $P'(z)$ von der Höhe σ ($\sigma > 0$)*, so haben wir uns also bei der Berechnung von β_P nur um die Komponenten von $P'(z)$ zu kümmern.

Für zwei äquivalente Polynome P, Q ist $\beta_P = \beta_Q$ (siehe **2.**). Für die Bestimmung von $\gamma_{P, L}$ gilt nach dem Satz vom Maximum einer analytischen Funktion, daß

$$\underset{z_1, z_2 \prec L}{\text{Max}} |P'(z_1, z_2)|$$

für zwei Randpunkte von L angenommen wird.

10. Wir zeigen jetzt, daß

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad A_3 \leqq \tfrac{12}{13}.$$

Zunächst schicke ich eine allgemeine Bemerkung voraus, welche die *geometrische* Situation bei unserer Fragestellung beleuchtet: Sei $P(z)$ ein

Polynom, L eine Komponente von $P'(z)$ von der Höhe $\sigma > 0$. Ich behaupte: *Ist L konvex, dann ist* $\gamma_{P,L} = 1$.

Sind nämlich z_1, z_2 zwei verschiedene Randpunkte von L, dann folgt aus

$$P(z_1) - P(z_2) = \int_{z_2}^{z_1} P'(z)\, dz,$$

wenn man als Integrationsweg die ganz in L verlaufende Verbindungsstrecke der Punkte z_1, z_2 wählt:

$$|P(z_1) - P(z_2)| \leqq \sigma |z_1 - z_2|,$$

oder

$$|P'(z_1, z_2)| \leqq \sigma.$$

Dies gilt auch noch, wenn die Randpunkte z_1, z_2 zusammenfallen, und zwar mit dem Gleichheitszeichen. Daher ist

$$\gamma_{P,L} = \frac{\sigma}{\underset{z_1, z_2 \prec L}{\text{Max}} |P'(z_1, z_2)|} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1.$$

1. Bei Polynomen ersten Grades sind Differential- und Differenzenquotient identisch konstant und gleich; daher ist $\mathsf{A}_1 = 1$.

2. Die Ableitung jedes Polynoms zweiten Grades hat konvexe Komponenten. Für jedes Polynom zweiten Grades $Q(z)$ und für jede Komponente L seiner Ableitung ist $\gamma_{Q,L} = 1$, somit $\beta_Q = 1$, daher $\mathsf{A}_2 = 1$.

3. Sei $R(z) = z + z^3$. Es ist $R'(z) = 1 + 3z^3$,

$$R'(z_1, z_2) = 1 + z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2.$$

Die Punktmenge $|R'(z)| \leqq 1$ ist eine Komponente von $R'(z)$, wir bezeichnen sie mit K^*. Wir berechnen das Maximum von $R'(z, \bar{z})$, wenn z (und damit auch $\bar{z}$) auf dem Rand

$$|1 + 3z^2| = 1$$

von K^* variiert. Es ist dann

$$z^2 + \bar{z}^2 + 3(z\bar{z})^2 = 0, \tag{6}$$

$$R'(z, \bar{z}) = 1 + z^2 + \bar{z}^2 + z\bar{z}$$

$$= 1 + \varrho - 3\varrho^2,$$

wobei $z\bar{z} = \varrho$ gesetzt und (6) benutzt wurde. Letztere Funktion erreicht für $\varrho = \frac{1}{6}$ den maximalen Wert $\frac{13}{12}$. Da es Punkte z_0, z_0 auf dem Rand von K^* gibt mit $z_0 \bar{z}_0 = \frac{1}{6}$, so ist

$$\underset{z_1, z_2 \prec K^*}{\text{Max}} |R'(z_1, z_2)| \geqq |R'(z_0, \bar{z}_0)| = \tfrac{13}{12},$$

somit

$$\tfrac{1\,2}{1\,3} \geqq \gamma_{R,K^*} \geqq \beta_R \geqq \mathsf{A}_3.$$

11. Von nun an sei der Grad $n \geqq 3$. Um eine sichere Grundlage zu haben, beweisen wir den

Satz 10. *Es gibt ein Polynom $P^*(z)$ von höchstens n-tem Grad und eine Komponente K^* seiner Ableitung von der Art, daß*

$$\gamma_{P^*,K^*} = \mathsf{A}_n.$$

Beim Beweis dieses Satzes ist die Beschränktheit der Koeffizienten von gewissen Polynomen festzustellen. Dies geschieht mit Hilfe des folgenden Satzes, der auch ohne die hier davon gemachte Anwendung einiges Interesse verdient:

Satz 11. *Sei $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m$. Dann gibt es eine nur von $k_1, \ldots, k_m$ abhängige positive Zahl $\delta_{k_1,\ldots,k_m}$ von folgender Eigenschaft: Wenn für ein System $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ von nichtnegativen Zahlen bei jedem ϱ zwischen 0 und 1 die Ungleichung*

$$2\,\mathrm{Max}\,(\alpha_1 \varrho^{k_1}, \ldots, \alpha_m \varrho^{k_m}) \leqq \alpha_0 + \alpha_1 \varrho^{k_1} + \ldots + \alpha_m \varrho^{k_m} \tag{7}$$

besteht, dann gilt

$$\mathrm{Max}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \leqq \delta_{k_1,\ldots,k_m} \cdot \alpha_0.$$

Beweis. Für $\alpha_0 = 0$ folgt aus (7)

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \varrho^{k_2 - k_1} + \ldots + \alpha_m \varrho^{k_m - k_1},$$

und hieraus für $\varrho \to 0$, daß $\alpha_1 = 0$. Ebenso folgt dann weiter $\alpha_2 = 0$, $\ldots$, $\alpha_m = 0$. Die Behauptung des Satzes ist also in diesem Fall erfüllt. Sei jetzt $\alpha_0 > 0$. Im Fall $m = 1$ hat man

$$\alpha_1 \varrho^{k_1} \leqq \alpha_0,$$

woraus für $\varrho \to 1$

$$\alpha_1 \leqq \alpha_0$$

folgt. Daher gilt der Satz für $m = 1$ mit $\delta_{k_1} = 1$ (als genauer Schrankenfaktor).

Sei nun $m \geqq 2$. Wir nehmen an, der Satz sei bereits für kleinere m bewiesen, setzen $\alpha_0 = 1$, und zeigen, daß alle übrigen α_μ beschränkt sind. Aus (7) folgt für $0 < \varrho < 1$

$$2\,\mathrm{Max}\,(\alpha_1 \varrho^{k_1}, \ldots, \alpha_{\mu-1} \varrho^{k_\mu - 1}, \alpha_{\mu+1} \varrho^{k_\mu + 1}, \ldots, \alpha_m \varrho^{k_m})$$

$$\leqq (1 + \alpha_\mu) + \alpha_1 \varrho^{k_1} + \ldots + \alpha_{\mu-1} \varrho^{k_\mu - 1} + \alpha_{\mu+1} \varrho^{k_\mu + 1} + \ldots + \alpha_m \varrho^{k_m}.$$

Unserer Annahme gemäß folgen hieraus

$$\mathrm{Max}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_m) \leqq \delta_{k_1,\ldots,k_{\mu-1},k_{\mu+1},\ldots,k_m}\,(1 + \alpha_\mu),$$

also erst recht mit

$$\Delta = \text{Max}\,(1, \delta_{k_2, \ldots, k_m}, \delta_{k_1, k_3, \ldots, k_m}, \ldots, \delta_{k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}})$$

die Ungleichungen

$$\alpha_\lambda \leqq \Delta\,(1 + \alpha_\mu) \qquad \text{für } \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Ist nun eines der α_μ kleiner als Δ, dann sind alle übrigen kleiner als $\Delta(1 + \Delta) = (\Delta' - 1)\Delta'$, wo $\Delta' = 1 + \Delta$ gesetzt ist und nach Konstruktion Δ' nur von $k_1, \ldots, k_m$ abhängt.

Sind alle $\alpha_\mu \geqq \Delta$, dann ist

$$\alpha_\lambda \leqq \Delta + \Delta\,\alpha_\mu \leqq \alpha_\mu + \Delta\,\alpha_\mu = \Delta'\,\alpha_\mu.$$

Setzt man

$$\alpha_\lambda = \gamma_\lambda t, \quad \gamma_\lambda > 0, \quad t > 0,$$

und normiert mit

$$\text{Max}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_m) = 1,$$

dann gilt für $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m$

$$\gamma_\lambda \leqq \Delta'\,\gamma_\mu.$$

Setzt man hierin für γ_λ den größten Wert, nämlich 1 ein, so folgt

$$\gamma_\mu \geqq \frac{1}{\Delta'} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Außerdem bestehen die Ungleichungen

$$\frac{\gamma_\lambda}{\gamma_1} \leqq \Delta' \qquad \text{für } \lambda = 2, 3, \ldots, m.$$

Geht man nun mit diesen neuen Bezeichnungen in (7) ein, so folgt

$$t \cdot D(\varrho) \leqq 1,$$

mit

$$\begin{aligned} D(\varrho) &= 2\,\text{Max}\,(\gamma_1 \varrho^{k_1}, \ldots, \gamma_m \varrho^{k_m}) - (\gamma_1 \varrho^{k_1} + \ldots + \gamma_m \varrho^{k_m}) \\ &= \gamma_1 \varrho^{k_1} \cdot \Big[2\,\text{Max}\,\Big(1, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\varrho^{k_2 - k_1}, \ldots, \frac{\gamma_m}{\gamma_1}\varrho^{k_m - k_1}\Big) \\ &\qquad - \Big(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\varrho^{k_2 - k_1} + \ldots + \frac{\gamma_m}{\gamma_1}\varrho^{k_m - k_1}\Big)\Big] \\ &\geqq \frac{1}{\Delta'}\varrho^{k_1}\Big[2 - (1 + \Delta'\varrho^{k_2 - k_1}(m - 1))\Big]. \end{aligned}$$

Es gibt also ein ϱ^* zwischen 0 und 1, welches nur von $\Delta'(m-1)$ und $k_2 - k_1$, d. h. nur von $k_1, \ldots, k_m$ abhängt, so daß

$$D(\varrho^*) > 0.$$

Dann ist

$$\alpha_\nu = \gamma_\nu t \leqq t \leqq \frac{1}{D(\varrho^*)}.$$

Damit ist unser Beweis fertig Man kann für $\delta_{k_1, \ldots, k_m}$ z. B. die größere der Zahlen $(\Delta' - 1)\Delta'$, $\frac{1}{D(\varrho^*)}$ wählen; das ergibt natürlich nicht die scharfen Schrankenfaktoren. Für diese läßt sich aber unschwer ein System von Gleichungen aufstellen. So ist z. B. der scharfe Schrankenfaktor $\delta_{1,2} = 3 + 2\sqrt{2}$.

12. Beim Beweis von Satz 10 stützen wir uns auf die Definition

$$\mathsf{A}_n = \mathsf{A}_E(0, 1; \mathfrak{F}^n).$$

Es gibt eine Folge von Polynomen n-ten Grades

$$P_1(z),\ P_2(z),\ \ldots,\ P_\nu(z),\ \ldots$$

mit $P_\nu(0) = 0$, $P_\nu(1) = 1$, dazu eine Folge

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_\nu,\ \ldots$$

von 0 und 1 verbindenden einfachen Kurvenbögen, so daß

$$\operatorname*{Max}_{z < C_\nu} |P_\nu'(z)| = \mu_\nu \leqq 1,$$

und

$$\lim_{\nu \to \infty} \mu_\nu = \mathsf{A}_n$$

ist.

Unter diesen Voraussetzungen kann man aus der Folge der $P_\nu(z)$ eine konvergente Teilfolge ausgreifen. Um dies zu zeigen, stellen wir die Beschränktheit aller Koeffizienten ihrer Entwicklungen um $z = 0$ herum fest. Schreibt man eines der Polynome $P_\nu'(z)$ in der Form

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1},$$

so kann man sagen: Es gibt einen 0 und 1 verbindenden einfachen Kurvenbogen C, auf welchem

$$|a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}| \leqq 1.$$

Wegen $|a_0| \leqq 1$ folgen hieraus mit $|a_\nu| = \alpha_\nu$, $|z| = \varrho$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \varrho - \alpha_2 \varrho^2 - \ldots - \alpha_{n-1} \varrho^{n-1} &\leqq 2,\\
-\alpha_1 \varrho + \alpha_2 \varrho^2 - \ldots - \alpha_{n-1} \varrho^{n-1} &\leqq 2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\
-\alpha_1 \varrho - \ldots - \alpha_{n-2} \varrho^{n-2} + \alpha_{n-1} \varrho^{n-1} &\leqq 2,
\end{aligned}$$

die in eine zusammengefaßt lauten:

$$2 \operatorname{Max}(\alpha_1 \varrho,\ \alpha_2 \varrho^2,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} \varrho^{n-1}) \leqq 2 + \alpha_1 \varrho + \alpha_2 \varrho^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \varrho^{n-1}.$$

Durchläuft z den Kurvenbogen C, so nimmt dabei ϱ jeden Wert im Intervall $0 \leqq \varrho \leqq 1$ mindestens einmal an. Also besteht letztere Ungleichung für jeden Wert ϱ dieses Intervalls; nach Satz 11 folgt dann

$$|a_\nu| \leqq 2\delta_{1,2,\ldots,n-1},\ \nu = 1, \ldots, n-1.$$

$P_\nu(z)$ hat wegen $P(0) = 0$ die Form

$$a_0 z + \frac{1}{2} a_1 z^2 + \ldots + \frac{1}{n} a_{n-1} z^n.$$

Daher sind alle Koeffizienten aller $P_\nu(z)$ gleichmäßig beschränkt, nämlich dem Betrag nach nicht größer als $\delta_{1,2,\ldots,n-1}$[2]). Wir können daher aus der Folge $\{P_\nu(z)\}$ eine Teilfolge ausgreifen, welche gegen ein Grenzpolynom konvergiert. Es ist nur eine Sache der Bezeichnung, wenn wir annehmen, daß bereits die Folge $\{P_\nu(z)\}$ konvergiert:

$$\lim_{\nu \to \infty} P_\nu(z) = P^*(z).$$

Außerdem ist

$$\lim_{\nu \to \infty} P'_\nu(z) = P^{*\prime}(z).$$

Insbesondere gilt

$$|P^{*\prime}(0)| = \lim_{\nu \to \infty} |P'_\nu(0)| \leqq \mathsf{A}_n \leqq \tfrac{1\,2}{1\,3}$$

und

$$P^*(0) = 0, \quad P^*(1) = 1.$$

$P^*(z)$ ist nicht identisch konstant; wäre es vom ersten Grad, dann müßte es gleich z sein. Dies ist aber nicht möglich, weil $|P^{*\prime}(0)| \leqq \frac{1\,2}{1\,3}$ ist. Daher ist $P^*(z)$ mindestens vom zweiten Grad, d. h. seine Ableitung nicht identisch konstant, und folglich die Punktmenge

$$|P^{*\prime}(z)| \leqq \mathsf{A}_n \tag{8}$$

beschränkt. Nun ist der untere abgeschlossene Limes der Mengenfolge $\{C_\nu\}$ nicht leer, weil er die Punkte 0 und 1 enthält, und der obere abgeschlossene Limes L dieser Folge ganz in der Punktmenge (8) enthalten. In der Tat, ist z_0 ein endlicher Punkt von L, dann gibt es eine Folge $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ mit dem Limes z_0 und dazu eine Indizesfolge $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_\nu < \ldots$, so daß z_ν Punkt von C_{k_ν} ist. Legt man um z_0 einen Kreis von festem Radius, dann ist im Innern dieses Kreises die Konvergenz der Folge $\{P'_{k_\nu}(z)\}$ eine gleichmäßige. Daher ist

$$\lim_{\nu \to \infty} P'_{k_\nu}(z_\nu) = P^{*\prime}(z_0),$$

also auch

$$|P^{*\prime}(z_0)| = \lim_{\nu \to \infty} |P'_{k_\nu}(z_\nu)| \leqq \lim_{\nu \to \infty} \mu_{k_\nu} = \mathsf{A}_n;$$

somit ist z_0 Punkt der Menge (8). Verlegen wir vorübergehend unsere Betrachtung auf die komplexe Zahlenkugel, dann sind wir in einem kompakten Raum. Nach einem Satz von L. Zoretti[3]) ist L als der obere ab-

[2]) Durch andere Überlegungen kommt man zur Abschätzung

$$|a_\nu| \leqq 6\,(n-1)^{\frac{(n-1)^2}{2}}.$$

[3]) Siehe F. Hausdorff, Mengenlehre (1927), S. 163.

geschlossene Limes einer Folge von zusammenhängenden Mengen wieder zusammenhängend. Wäre nun $z = \infty$ ein Punkt von L, so gäbe es zu jedem $\varrho \geqq 0$ ein z von L mit $|z| = \varrho$. Dies steht aber damit im Widerspruch, daß für jeden endlichen Punkt z von L die Ungleichung (8) gilt. Damit ist die obige Behauptung vollständig bewiesen. Daß $z = \infty$ kein Punkt von L ist, hat die gleichmäßige Beschränktheit aller C_ν zur Folge, d. h. die Kurven C_ν liegen alle in einem festen Kreis. Nun zeige ich noch: Es gibt einen Punkt z' von L, für welchen

$$|P^{*\prime}(z')| = \mathsf{A}_n$$

statthat. In der Tat, es gibt auf C_ν einen Punkt z_ν mit $|P_\nu'(z_\nu)| = \mu_\nu$; da, wie eben festgestellt wurde, die Folge $\{z_\nu\}$ beschränkt ist, läßt sich aus ihr eine konvergente Teilfolge $\{z_{k_\nu}\}$ ausgreifen, welche gegen den Punkt z' konvergieren möge. Wie oben ist

$$|P^{*\prime}(z')| = \lim_{\nu \to \infty} |P_{k_\nu}'(z_{k_\nu})| = \lim_{\nu \to \infty} \mu_{k_\nu} = \mathsf{A}_n.$$

Der Punkt z' hat also die behauptete Eigenschaft. Diejenige Komponente von $P^{*\prime}(z)$, von der Höhe A_n, welche L enthält — nach all dem Vorausgehenden existiert eine solche —, werde mit K^* bezeichnet. Dann ist

$$\gamma_{P^*, K^*} \leqq \frac{\mathsf{A}_n}{\left|\dfrac{P^*(0) - P^*(1)}{0 - 1}\right|} = \mathsf{A}_n.$$

Das Kleinerzeichen würde der Definition von A_n widersprechen, daher steht in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen, womit Satz 10 bewiesen ist. Offenbar ist $\gamma_{P^*, K^*} = \beta_{P^*}$.

13. *Kritisch* werde eine Komponente K von $P'(z)$ genannt, wenn für einen ihrer Randpunkte $P''(z)$ verschwindet. $P'(z)$ hat höchstens $n - 2$ kritische Komponenten.

Man überlegt sich leicht, daß, wenn $P'(z)$ keine kritischen Komponenten hat, es keine verschiedenen Nullstellen und daher nur konvexe Komponenten (hier Kreisscheiben) haben kann. Nach **10.** ist für ein solches Polynom $\beta_P = 1$. Da wir uns aber wegen **10.** 3. nur für solche $P(z)$ interessieren, bei welchen $\beta_P < 1$, so brauchen wir nur solche $P(z)$ zu betrachten, deren Ableitungen kritische Komponenten besitzen. Durch folgenden Hilfssatz wird die Berechnung von β_P erleichtert, und speziell die Bestimmung von A_3 ermöglicht:

Hilfssatz. *Ist für ein Polynom $P(z)$ die Zahl $\beta_P < 1$, so gibt es eine Komponente K^* von $P'(z)$ mit $\gamma_{P, K^*} = \beta_P$. Ist $P(z)$ vom dritten Grad, dann ist K^* kritisch*[4]).

[4]) Vermutlich gilt dies auch für höheren Grad.

Beweis. 1. Es gibt eine Komponente K^* mit $\gamma_{P,K^*} = \beta_P$. Aus einer bekannten Eigenschaft der Niveaulinien rationaler Funktionen folgt die Existenz einer Zahl $\sigma_0 > 1$, so daß alle Komponenten von $P'(z)$ mit einer Höhe σ, welche entweder $\geqq \sigma_0$ oder $\leqq \frac{1}{\sigma_0}$ ist, konvex sind. Wir haben also nur solche Komponenten in Betracht zu ziehen, deren Höhen σ zwischen $1/\sigma_0$ und σ_0 liegen. Diese Komponenten gehören alle einem beschränkten Bereich B an. Man kann eine Folge von Komponenten K_1, K_2, K_3, ... angeben, deren Höhen σ_1, σ_2, σ_3, ... sich zwischen $1/\sigma_0$ und σ_0 befinden, und für welche $\gamma_{P,K_\nu} < 1$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} \gamma_{P,K_\nu} = \beta_P$ ist.

Es gibt zwei Randpunkte $z_1^{(\nu)}$ und $z_2^{(\nu)}$ von K_ν mit

$$\gamma_{P,K_\nu} = \frac{\sigma_\nu}{|P'(z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)})|};$$

also ist

$$|P'(z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)})| > \frac{1}{\sigma_0}.$$

Da die $z_1^{(\nu)}$, $z_2^{(\nu)}$ alle in B liegen, so darf man annehmen, daß die Folge $\{z_1^{(\nu)}\}$ gegen einen Punkt z', die Folge $\{z_2^{(\nu)}\}$ gegen z'' konvergiert; andernfalls würde eine Teilfolgenauswahl auf diesen Fall führen. Dann ist

$$\sigma^* = \lim \sigma_\nu = \lim |P'(z_1^{(\nu)})| = \lim |P'(z_2^{(\nu)})| = |P'(z')| = |P'(z'')|,$$

$$|P'(z', z'')| \geqq \frac{1}{\sigma_0}$$

und

$$\frac{\sigma^*}{|P'(z', z'')|} = \beta_P.$$

Analog wie beim Beweis von Satz 10 (in 12.) folgt, daß der obere abgeschlossene Limes L der Mengenfolge $\{K_\nu\}$ zusammenhängt, z' und z'' enthält, und $\operatorname{Max}\limits_{z \prec L} |P'(z)| = \sigma^*$ ist. L ist daher Teilmenge einer Komponente K^* von der Höhe σ^*. Somit haben wir

$$\beta_P = \frac{\sigma^*}{|P'(z', z'')|} \geqq \gamma_{P,K^*},$$

und wegen $\gamma_{P,K^*} \geqq \beta_P$ schließlich

$$\gamma_{P,K^*} = \beta_P.$$

Die Punkte z' und z'' liegen auf dem Rand von K^* und sind wegen $\beta_P < 1$ voneinander verschieden.

2. Wir nehmen an, K^* ist nicht kritisch und wollen daraus einen Widerspruch ableiten. Ich bemerke: Ist $f(z)$ eine analytische Funktion.

so ist der Gradient der Funktion $\varphi = |f(z)|^2$ in komplexer Zusammenfassung geschrieben ($z = x + iy$):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2 f(z)\,\overline{f'(z)}.$$

In dem Randpunkte z von K^* ist die äußere Normale gegeben durch die Richtung von

$$2 P'(z)\,\overline{P''(z)} \neq 0.$$

Nun betrachten wir die Funktion

$$\frac{P'(z)}{P'(z,\zeta)} = \Phi(z,\zeta),$$

für welche

$$|\Phi(z',z'')| = \beta_P$$

ist. Würde die Funktion

$$g(z) = \Phi(z,z'')$$

in irgendeiner Richtung von z' aus in das Äußere von K^* abnehmen, so gäbe es dort einen Punkt z_0 nahe bei z', so daß erstens $|\Phi(z_0,z'')| < |\Phi(z',z'')|$ und zweitens auf der Verbindungsstrecke S von z', z_0 das Maximum von $|P'(z)|$ im Punkt z_0 angenommen wird. Dann ist für das Kontinuum $C = K^* + S$

$$\gamma_{P,C} = \frac{|P'(z_0)|}{\underset{z_1,z_2 \prec C}{\mathrm{Max}}\,|P'(z_1,z_2)|} \leqq |\Phi(z_0,z'')| < \beta_P;$$

β_P wäre nicht das Minimum. Also wächst $g(z)$ in jeder Richtung von z' aus in das Äußere von K^*. Der Gradient von $|g(z)|^2$ ist im Punkt z' nicht Null und hat dieselbe Richtung wie der von $|P'(z)|^2$:

Es gibt ein $\varrho_1 > 0$, so daß

$$P'(z')\,\overline{P''(z')} = \varrho_1 \Phi(z',z'')\,\overline{\frac{\partial}{\partial z'}\Phi(z',z'')}. \tag{9}$$

Andererseits wächst der Betrag der Funktion

$$h(\zeta) = \Phi(z',\zeta)$$

in jeder Richtung von z'' aus in das Innere von K^*; anderenfalls würde ja

$$\underset{z_1,z_2 \prec K^*}{\mathrm{Max}}\,|P'(z_1,z_2)|$$

nicht in den Punkten z', z'' erreicht werden. Es gibt also ein $\varrho_2 > 0$, so daß

$$P'(z'')\,\overline{P''(z'')} = -\varrho_2 \Phi(z',z'')\,\overline{\frac{\partial}{\partial z''}\Phi(z',z'')}. \tag{10}$$

Mit den Abkürzungen

$$m = P'(z', z''),$$
$$m_1 = \frac{\partial m}{\partial z'} = \frac{P'(z')}{z' - z''} - \frac{m}{z' - z''}.$$
$$m_2 = \frac{\partial m}{\partial z''} = \frac{P'(z'')}{z'' - z'} - \frac{m}{z'' - z'}$$

wird

$$a = \frac{\partial}{\partial z'} \Phi(z', z'') = \frac{P''(z')}{m} - \frac{P'(z')}{m^2} m_1,$$

$$b = \frac{\partial}{\partial z''} \Phi(z', z'') = -\frac{P'(z')}{m^2} m_2,$$

sodann aus (9)

$$a = \varrho_1' \frac{1}{m} P''(z'),$$

wobei

$$\varrho_1' = \frac{\varrho_1 |a|^2}{|P''(z')|^2}$$

positiv ist, oder

$$\frac{P'(z')}{P''(z')} \frac{m_1}{m} = 1 - \varrho_1' = \varrho_1'' \quad \text{mit} \quad \varrho_1'' < 1.$$

Ähnlich wird aus (10)

$$\frac{P'(z'')}{P''(z'')} \frac{m_2}{m} = \varrho_2', \quad \varrho_2' > 0.$$

Aus der Betrachtung der Funktionen

$$\Phi(z, z'), \quad \Phi(z'', \zeta)$$

folgt symmetrischerweise

$$\varrho_1'' > 0, \quad \varrho_2' < 1.$$

Wir haben demnach die Bedingungen

(11) $$\frac{P'(z')}{P''(z')} \frac{m_1}{m} = \tau_1, \quad 0 < \tau_1 < 1,$$

(12) $$\frac{P'(z'')}{P''(z'')} \frac{m_2}{m} = \tau_2, \quad 0 < \tau_2 < 1.$$

Nun betrachten wir zwei von z' bzw. z'' ausgehende Kurven mit gemeinsamem reellen Parameter t:

$$z_1(t) = z' + \alpha t + t^2 \varphi_1(t),$$
$$z_2(t) = z'' + \beta t + t^2 \varphi_2(t).$$

Setzen wir hierin

$$\alpha = \left(\frac{1}{\sigma^*} + i\lambda\right) \frac{P'(z')}{P''(z')}, \quad \lambda \text{ reell},$$

$$\beta = \left(\frac{1}{\sigma^*} + i\mu\right) \frac{P'(z'')}{P''(z'')}, \quad \mu \text{ reell},$$

dann kann man die stetigen komplexwertigen Funktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ so bestimmen, daß für $-\varepsilon < t < \varepsilon$ gilt:

$$|P'(z_1(t))| = |P'(z_2(t))| = \sigma^* + t.$$

Es ist

$$\Phi(t) = \Phi(z_1(t), z_2(t)) = \Phi(z', z'') + (a\alpha + b\beta)t + t^2\varphi_3(t).$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: Man kann die willkürlichen λ, μ in solcher Weise wählen, daß

$$c = a\alpha + b\beta \neq 0$$

und die Vektoren

$$\Phi(z', z''),\ c$$

nicht aufeinander senkrecht stehen. Hat man λ, μ so gewählt, dann ist für $t = 0$ die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)| \neq 0$. Wäre diese Ableitung negativ, so gäbe es ein $t_0 > 0$, so daß $z_1(t_0)$ und $z_2(t_0)$ Randpunkte einer Komponente K_0 von $P'(z)$ von der Höhe $\sigma^* + t_0$ sind; es wäre:

$$\gamma_{P,K_0} \leqq |\Phi(t_0)| < |\Phi(0)| = \beta_P, \tag{13}$$

was nicht sein kann. Wäre dagegen diese Ableitung positiv, so könnte man ein $t_0 < 0$ angeben und, weil K^* nicht kritisch ist, dazu eine Komponente K_0 von der Höhe $\sigma^* + t_0$, für welche wiederum (13) gelten müßte, was wir ja eben ausgeschlossen haben. Die Annahme des Falles 1 führt also auf einen Widerspruch.

2. Fall (das Gegenteil von Fall 1): Für jede Wahl von λ, μ ist

$$c = i\varkappa\Phi(z', z''), \quad \varkappa \text{ reell}.$$

Das ergibt:

$$\left(\frac{1}{\sigma^*} + i\lambda\right)\frac{P'(z')}{P''(z')}\left(\frac{P''(z')}{m} - \frac{P'(z')}{m^2}m_1\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{\sigma^*} + i\mu\right)\frac{P'(z'')}{P''(z'')}\left(-\frac{P'(z')}{m^2}m_2\right) = i\varkappa\frac{P'(z')}{m}.$$

Damit dies für jedes λ, μ gilt, muß neben den Gleichungen (11), (12) auch noch

$$\tau_1 + \tau_2 = 1 \tag{14}$$

bestehen. Setzt man in (14) die Werte τ_1, τ_2 von (11), (12) ein, so folgt:

$$P'(z')m_1 P''(z'') + P'(z'')m_2 P''(z') = P''(z')\,P''(z'')\,m. \tag{15}$$

Nun zeige ich, daß diese Gleichung für ein Polynom dritten Grades nur durch $z' = z''$ erfüllt werden kann, was aber mit der früheren Feststellung

$z' \neq z''$ in Widerspruch steht. Der Hilfssatz wird dann bewiesen sein. In der Tat, wegen der Homogenität von (15) bezüglich P, m und $\frac{\partial}{\partial z'}$, $\frac{\partial}{\partial z''}$ genügt es, die letzte Behauptung für ein äquivalentes Polynom zu zeigen. Nun ist das Polynom $R(z)$ von **10.** 3. allen Polynomen dritten Grades, deren Ableitungen kritische Komponenten haben, äquivalent. Setzt man aber $R(z)$ in (15) für $P(z)$ ein, so reduziert sich diese Gleichung auf

$$6\,(z' - z'')^2 = 0.$$

Damit ist das Verlangte nachgewiesen, und wir sind fertig.

14. Auf Grund des in **13.** bewiesenen Hilfssatzes läßt sich nun A_3 numerisch berechnen; wir werden finden: $\mathsf{A}_3 = \frac{12}{13}$.

Alle Polynome dritten Grades, die hier in Frage kommen, sind zu

$$R(z) = z + z^3$$

äquivalent (vgl. Definition S. 81); daher ist

$$\mathsf{A}_3 = \beta_R.$$

Nach dem vorhin bewiesenen Hilfssatz ist

$$\beta_R = \frac{1}{\underset{|1+3z_1^2| = |1+3z_2^2| = 1}{\text{Max}} |1 + z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2|};$$

denn die Punktmenge $|1 + 3z^2| \leqq 1$ ist die einzige kritische Komponente K^* von $R'(z)$. Man setzt:

$$u = x + iy = 1 + z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2,$$
$$z_1 = \sqrt{-\tfrac{2}{3}\cos 2\vartheta}\, e^{i\vartheta}, \quad z_2 = \sqrt{-\tfrac{2}{3}\cos 2\varphi}\, e^{i\varphi}.$$

Dann ist $|1 + 3z_1^2| = |1 + 3z_2^2| = 1$, und man erhält:

$$x = 1 - \tfrac{2}{3}(\cos^2 2\vartheta + \cos^2 2\varphi) + \tfrac{2}{3}\sqrt{\cos 2\vartheta \cos 2\varphi}\cdot\cos(\vartheta + \varphi),$$
$$y = -\tfrac{2}{3}(\cos 2\vartheta \sin 2\vartheta + \cos 2\varphi \sin 2\varphi) + \tfrac{2}{3}\sqrt{\cos 2\vartheta \cos 2\varphi}\cdot\sin(\vartheta + \varphi),$$

Setzt man weiter

$$\vartheta + \varphi = \sigma, \quad \vartheta - \varphi = \delta, \quad \cos 2\delta = C,$$

dann findet man

$$\varrho = \frac{9}{4}|u|^2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}C + C^2 + \frac{1}{2}(1 - 2C)\cos 2\sigma + (1 - 2C)\cos\sigma\sqrt{\frac{C + \cos 2\sigma}{2}}.$$

Grenzmaxima von ϱ, d. h. solche, wo entweder z_1 oder z_2 gleich 0 ist, kommen nicht in Frage, da in einem solchen Fall die Verbindungsstrecke

von z_1 nach z_2 ganz auf K^* verläuft, und damit (vgl. **10.**) $|u| \leqq 1$ ist, während wir nach **10.** 3. schon wissen, daß das Maximum von $|u|$ mindestens gleich $\frac{13}{12}$ ist. Wir suchen daher die Nullstellen der Ableitung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \sigma} = -(1-2C)\sin 2\sigma - (1-2C)\sqrt{\dots}\,\sin\sigma - (1-2C)\cos\sigma\,\frac{\sin 2\sigma}{2\sqrt{\dots}}.$$

$\frac{\partial \varrho}{\partial \sigma} = 0$ ergibt die Möglichkeiten:

$$1.\quad 1-2C = 0,$$

$$2.\quad \sin\sigma = 0,$$

$$3.\quad 2\cos\sigma + \sqrt{\dots} + \frac{\cos^2\sigma}{\sqrt{\dots}} = 0.$$

Diskussion:

1. $C = \frac{1}{2}$, $\frac{9}{4}|u|^2 = \frac{3}{4}$, $|u| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$; das ist sicher nicht das Maximum.

2. $\sin\sigma = 0$.

a) $\sigma = 0$, d. h. $\vartheta = -\varphi$, oder $z_2 = \bar{z}_1$. Nach **10.** 3. ist dann Maximum von $|u|$ gleich $\frac{13}{12}$.

b) $\sigma = \pi$, $\vartheta = -\varphi + \pi$. Die Verbindungsstrecke z_1, z_2 wäre ganz auf K^*!

3. $2\cos\sigma\sqrt{-\sin^2\delta + \cos^2\sigma} - \sin^2\delta + 2\cos^2\sigma = 0$.

a) $\sin\delta = 0$, $\cos\sigma \leqq 0$,

A) $\delta = 0$, $\vartheta = \varphi$, $z_1 = z_2$, $|u| = 1$,

B) $\delta = \pi$, $\vartheta = \varphi + \pi$, $z_1 = -z_2$. Die Verbindungsstrecke z_1, z_2 liegt wieder auf K^*!

b) $\sin\delta \neq 0$; man setzt: $\cos\sigma = \lambda|\sin\delta|$. Für λ hat man:

$$2\lambda\sqrt{-1+\lambda^2} - 1 + 2\lambda^2 = 0,$$

eine Gleichung, welche überhaupt keine Lösung besitzt. Also ist das Maximum von $|u|$ gleich $\frac{13}{12}$, $\beta_R = \frac{12}{13}$ und somit

$$\mathsf{A}_3 = \tfrac{12}{13}.$$

15. Die Berechnung von A_n, $n \geqq 4$, scheint erhebliche Schwierigkeiten zu bereiten. An die Überlegungen von **12.** direkt anschließend, finden wir für A_n wenigstens eine untere Schranke, es ist:

$$\mathsf{A}_n \geqq \frac{1}{n\,\delta_{1,2,\dots,n-1}}, \tag{16}$$

worin $\delta_{1,\ldots,n-1}$ die im Satz 11 vorkommende Größe ist ($k_\nu = \nu$). Denn ist

$$P^*(z) = a_0 z + a_1 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^n.$$

so folgt wegen $P^*(1) = 1$

$$1 = |P^*(1)| \leqq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|.$$

Da auf einem 0 und 1 verbindenden Kurvenbogen $|P^{*\prime}(z)| \leqq \mathsf{A}_n$ ist, so folgt genau so wie in **12.** nach Satz 11:

$$|a_\nu| \leqq \delta_{1,\ldots,n-1} \mathsf{A}_n.$$

Setzt man das oben ein, so ergibt sich (16).

Verwendet man die Abschätzung von Fußnote [2]), so findet man ganz entsprechend:

$$\mathsf{A}_n \geqq \frac{1}{6n(n-1)^{\frac{(n-1)^2}{2}}}.$$

München, 19. November 1932.

(Eingegangen am 21. Dezember 1932.)

Zwei Bemerkungen über stark summierbare unendliche Reihen.

Von

S. Marshak in Jerusalem.

I.

Man nennt [mit M. Fekete[1])] die unendliche Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

stark summierbar (durch arithmetische Mittel erster Ordnung), falls es eine Zahl σ gibt, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|s_0 - \sigma| + \ldots + |s_n - \sigma|}{n+1} = 0 \tag{2}$$

wird; hierbei bedeutet s_n die n-te Teilsumme der Reihe (1). Aus (2) folgt offenbar die Relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = \sigma \tag{3}$$

— d. h. die (gewöhnliche) Summierbarkeit der Reihe (1) (durch arithmetische Mittel erster Ordnung) — und der Umstand, daß die Größe σ in der Formel (2) die „Summe" der Reihe (1) angibt. Einfache Beispiele zeigen, daß dieses Resultat sich *nicht* umkehren läßt: es gibt summierbare Reihen, die nicht stark summierbar sind.

Aus (2) folgt stets auch die Limesgleichung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{||s_0| - |\sigma|| + \ldots + ||s_n| - |\sigma||}{n+1} = 0, \tag{4}$$

jedoch nicht vice versa.

[1]) „Vizsgálatok a Fourier-sorokról", Math. és Term. Ért. **35** (1916), S. 759—786; insbesondere § 1, S. 763—768. Fekete wurde zur Definition und Untersuchung der starken Summierbarkeit durch ein Resultat von Hardy und Littlewood „Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable" (Compt. Rend., 28. April 1913) geleitet. Letztere haben die Definition bzw. Benennung der starken Summierbarkeit adoptiert in ihrer Note „On the strong summability of Fourier series", London, Math. Soc. **26** (1926).

Nimmt man nun zu (3) *auch diese zweite Folgerung* (4) *aus* (2) *hinzu, so gewinnt man ein Paar von Beziehungen, deren Bestehen für das Bestehen von* (2) *nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.*

Ist $\sigma = 0$, so ist (4) bereits gleichbedeutend mit (2). Beim Beweis der eben formulierten Behauptung kann ich also annehmen, daß in den Formeln (2) bis (4) σ eine *positive* Zahl ist[2]).

Ich stütze mich dabei auf das folgende Lemma: *Aus*

$z = x + iy$ (x und y reell), $0 < \varepsilon \leqq 2\sigma$, $|z - \sigma| > \varepsilon$, $\big||z| - \sigma\big| \leqq \frac{\varepsilon^2}{4\sigma}$ *folgt*

$$x < \sigma - \frac{\varepsilon^2}{8\sigma}.$$

Beweis: Man setze $|z| - \sigma = d$; dann gilt

$$x^2 + y^2 = \sigma^2 + d^2 + 2\sigma d, \tag{5}$$

wobei nach Voraussetzung

$$|d| \leqq \frac{\varepsilon^2}{4\sigma} \tag{6}$$

ist. Andererseits muß auch

$$x^2 + y^2 + \sigma^2 - 2x\sigma > \varepsilon^2 \tag{7}$$

sein. Aus (5) und (7) folgt

$$x < \sigma + d + \frac{d^2 - \varepsilon^2}{2\sigma}$$

und daher, mit Hinsicht auf (6) und wegen $0 < \varepsilon \leqq 2\sigma$,

$$x < \sigma - \frac{\varepsilon^2}{4\sigma} + \frac{\varepsilon^4}{32\sigma^3} = \sigma - \frac{\varepsilon^2}{4\sigma}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8\sigma^2}\right) \leqq \sigma - \frac{\varepsilon^2}{8\sigma},$$

w. z. b. w.

Um nun zu beweisen, daß (unter der Annahme $\sigma > 0$) (3) und (4) zusammen (2) involvieren, setze man ε und δ so fest, daß

$$0 < \varepsilon \leqq 2\sigma, \quad \delta = \frac{\varepsilon^2}{4\sigma}$$

ist.

Man bezeichne der Reihe nach mit $a = a(\varepsilon, n)$, $b = b(\varepsilon, n)$, $c = c(\varepsilon, n)$ die Anzahl sämtlicher ganzen Zahlen λ, μ, ν, welche die Bedingungen:

$$0 \leqq \lambda \leqq n, \quad |s_\lambda - \sigma| \leqq \varepsilon, \tag{8}$$

$$0 \leqq \mu \leqq n, \quad |s_\mu - \sigma| > \varepsilon, \quad \big||s_\mu| - \sigma\big| > \delta, \tag{9}$$

$$0 \leqq \nu \leqq n, \quad |s_\nu - \sigma| > \varepsilon, \quad \big||s_\nu| - \sigma\big| \leqq \delta \tag{10}$$

---

[2]) Sonst betrachte man anstatt (1) die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{|\sigma|}{\sigma}$, deren durch das arithmetische Mittelverfahren genommene [nach Voraussetzung, d. h. nach (3) sicherlich vorhandene] Summe mit $|\sigma|$ zusammenfällt.

erfüllen. Dann gilt offenbar

$$0 \leqq a \leqq n+1, \quad 0 \leqq b \leqq n+1, \quad 0 \leqq c \leqq n+1, \quad a+b+c = n+1.$$

Außerdem besteht (bei über sämtliche, den Beziehungen (8), (9), (10) genügenden λ, μ, ν-Werte erstreckter Summation) die Zerlegung

$$\sum_{k=0}^{n} |s_k - \sigma| = \sum_{(\lambda)} |s_\lambda - \sigma| + \sum_{(\mu)} |s_\mu - \sigma| + \sum_{(\nu)} |s_\nu - \sigma|,$$

und somit (wegen $|s_\mu - \sigma| \leqq \big||s_\mu| - \sigma\big| + 2\sigma$, $|s_\nu - \sigma| \leqq \big||s_\nu| - \sigma\big| + 2\sigma$) die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n} |s_k - \sigma| \leqq a \cdot \varepsilon + 2b\sigma + 2c\sigma + \sum_{k=0}^{n} \big||s_k| - \sigma\big|.$$

Beachte man nun, daß nach (9) die Beziehung

$$b\sigma = \frac{\sigma}{\delta} \cdot b \cdot \delta \leqq \frac{\sigma}{\delta} \sum_{(\mu)} \big||s_\mu| - \sigma\big| \leqq \frac{\sigma}{\delta} \sum_{k=0}^{n} \big||s_k| - \sigma\big| = \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n} \big||s_k| - \sigma\big|$$

und, nach (10), auf Grund des obigen Lemmas, für den reellen Teil der s_ν die Ungleichung

$$\sum_{(\nu)} \Re(s_\nu) < \Big(\sigma - \frac{\varepsilon^2}{8\sigma}\Big) \cdot c$$

und folglich leicht ersichtlich auch die Relation

$$c\sigma < \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \Big(c\sigma - \sum_{(\nu)} \Re(s_\nu)\Big)$$

besteht, und deshalb

$$\begin{aligned} c\sigma &< \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{(\nu)} (\sigma - |s_\nu|) + \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{(\nu)} (|s_\nu| - \Re(s_\nu)) \\ &\leqq \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{(\nu)} \big||s_\nu| - \sigma\big| + \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n} (|s_k| - \Re(s_k)) \\ &\leqq \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n} \big||s_k| - \sigma\big| + \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n} (|s_k| - \sigma) + \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n} (\sigma - \Re(s_k)) \\ &\leqq \frac{16\sigma^2}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n} \big||s_k| - \sigma\big| + \frac{8\sigma^2}{\varepsilon^2} \Re\Big(\sum_{k=0}^{n} (\sigma - s_k)\Big) \end{aligned}$$

ist. Daraus ergibt sich für die imaginäre Komponente $J(s_k)$ der s_k die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |s_k - \sigma| \leqq \varepsilon &+ \Big(1 + \frac{40\sigma^2}{\varepsilon^2}\Big) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \big||s_k| - \sigma\big| \\ &+ \frac{16\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (\sigma - s_k) + \frac{16\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} J(s_k). \end{aligned}$$

Da aber ε zwischen 0 und 2σ beliebig klein festgesetzt werden kann und bei *festem* ε das zweite, dritte und vierte Glied der rechten Seite der

letzten Beziehung unter unseren Annahmen bei endlich wachsendem n gegen 0 konvergiert, so involviert diese Beziehung die Limesgleichung (2); w. z. b. w.

Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit, daß das Bestehen von (3) zusammen mit dem Bestehen von

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|s_0| - \sigma|^p + \ldots + ||s_n| - \sigma|^p}{n+1} = 0, \qquad \sigma > 0,\ p > 1$$

die Relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|s_0 - \sigma|^p + \ldots + |s_n - \sigma|^p}{n+1} = 0$$

nach sich zieht. (Die Umkehrbarkeit dieser Tatsache ist augenscheinlich.)

II.

Der Begriff der starken Summierbarkeit (durch arithmetische Mittel) wurde unlängst durch C. E. Winn[3]) erweitert, der die Definition der starken Summierbarkeit (durch arithmetische Mittel Cesàroscher Art) für beliebige positive Ordnung festgelegt hat. Winn nennt die Reihe (1) stark summierbar r-ter Ordnung, $r > 0$ (nach Cesàro), falls es eine Zahl σ gibt so, daß

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|c_0^{(r-1)} - \sigma| + \ldots + |c_n^{(r-1)} - \sigma|}{n+1} = 0 \tag{11}$$

ist; hierbei bedeutet $c_n^{(r-1)} = c_n^{(r-1)}(s)$ den Cesàroschen Mittelwert $(r-1)$-ter Ordnung der $n+1$ ersten Teilsummen $s_0, s_1, \ldots, s_n$ der Reihe (1), definiert durch die Formel

$$A_n^{(r-1)} c_n^{(r-1)} = s_0 A_n^{(r-2)} + s_1 A_{n-1}^{(r-2)} + \ldots + s_n A_0^{(r-2)} = S_n^{(r-1)}(s), \qquad r > 0,$$

wobei $A_n^{(r-1)}$ bzw. $A_n^{(r-2)}$ den $(n+1)$-ten Koeffizienten in der Maclaurin-Entwicklung der Funktion $\frac{1}{(1-x)^r}$ bzw. $\frac{1}{(1-x)^{r-1}}$ bezeichnet.

Es liegt sehr nahe, dieser Definition Cesàroscher starker Summierbarkeit r-ter Ordnung für beliebige *ganze* positive Werte von r die Definition Hölderscher starker Summierbarkeit r-ter Ordnung an die Seite zu stellen, indem man an die Stelle der Cesàroschen Mittelwerte $c_\nu^{(r-1)}$ in der Formel (11) die Hölderschen Mittelwerte $h_\nu^{(r-1)} = h_\nu^{(r-1)}(s)$ $(r-1)$-ter Ordnung der Teilsummen $s_0, s_1, \ldots,$ (definiert für $r \geqq 2$ durch die Rekursionsformel

$$h_n^{(r-1)} = \frac{h_0^{(r-2)} + \ldots + h_n^{(r-2)}}{n+1}$$

---

[3]) On strong summability for any positive order. Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 481—492.

und für $r = 1$ durch die Vereinbarung $h_n^{(0)} = s_n$) treten läßt. (1) heißt also stark summierbar r-ter Ordnung nach Hölder, falls, für einen geeigneten Wert von σ,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|h_0^{(r-1)} - \sigma| + \ldots + |h_n^{(r-1)} - \sigma|}{n+1} = 0 \tag{12}$$

ist.

Winn hat bewiesen[4]), daß aus (11) die Limesgleichung

$$\lim_{n \to \infty} c_n^{(r)} = \sigma, \tag{13}$$

d. h. die (gewöhnliche) Cesàrosche Summierbarkeit r-ter Ordnung der Reihe (1) mit der Summe σ, für jeden positiven Wert von r folgt. Es ist evident, daß in analoger Weise (12) das Bestehen von

$$\lim_{n \to \infty} h_n^{(r)} = \sigma, \tag{14}$$

d. h. die (gewöhnliche) Höldersche Summierbarkeit der Reihe (1) mit der Summe σ für jeden natürlichen Wert von r nach sich zieht.

Man weiß nach dem Knopp-Schneeschen Äquivalenzsatz[5]), daß, falls $r = 1, 2, \ldots$, (13) stets das Bestehen von (14) zur Folge hat und umgekehrt. Angeregt durch meinen Lehrer, Prof. Fekete, habe ich nun die entsprechende Fragestellung in bezug auf die starke Summierbarkeit Cesàroscher und Höldersher Art (für $r = 1, 2, \ldots$) ins Auge gefaßt und auch die Äquivalenz der Erklärungen (11) und (12) festgestellt.

Für $r = 1$ und $r = 2$ besagen die Relationen (11) und (12), dank der Identität

$$h_n^{(0)} = c_n^{(0)} = s_n, \qquad h_n^{(1)} = c_n^{(1)},$$

wörtlich dasselbe. Um zu beweisen, daß (11) und (12) auch im Falle $r \geqq 3$ einander gegenseitig involvieren, kann ich ähnlich verfahren, wie Andersen[6]) das gleichzeitige Bestehen der Limesgleichungen (13) und (14) unlängst neu bewiesen hat. Dabei kann ich mich auf den Fall beschränken, wo $\sigma = 0$ ist, da der allgemeine Fall sich darauf zurückführen läßt.

---

[4]) A. a. O. [3]), Theorem 1. Einen anderen Beweis hat Fekete in seinen Vorlesungen „Über unendliche Reihen und Produkte" an der Hebräischen Universität in Jerusalem im Sommersemester 1930 gegeben.

[5]) K. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze, Inauguraldissertation, Berlin 1907. W. Schnee, Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwertsatzes, Math. Annalen **67** (1909), S. 110—125.

[6]) Bemerkung zum Beweis des Herrn Knopp für die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Summabilität, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 356—359.

Es genügt sodann zu beweisen, daß *die Grenzwertgleichung*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_0^{(p)}(s)| + \ldots + |c_n^{(p)}(s)|}{n+1} = 0 \tag{15}$$

für $p \geqq 1$ *stets die Relation*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_0^{(p-1)}(h^{(1)})| + \ldots + |c_n^{(p-1)}(h^{(1)})|}{n+1} = 0 \tag{16}$$

involviert und umgekehrt[7]).

In der Tat hat die Beziehung (15), solange die Ordnung p die Eins nicht unterbietet, (16) zur Folge, so folgen aus (11) durch $(r-1)$-malige sukzessive Anwendung dieser Tatsache die Relationen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_0^{(r-2)}(h^{(1)})| + \ldots + |c_n^{(r-2)}(h^{(1)})|}{n+1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_0^{(0)}(h^{(r-1)})| + \ldots + |c_n^{(0)}(h^{(r-1)})|}{n+1} = 0, \tag{17}$$

wobei die letzte Beziehung nichts anderes sagt als (12).

Umgekehrt, wenn (16) für $p \geqq 1$ stets (15) nach sich zieht, so muß aus (12), oder was auf dasselbe hinauskommt, aus (17) sukzessive

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_0^{(1)}(h^{(r-2)})| + \ldots + |c_n^{(1)}(h^{(r-2)})|}{n+1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_0^{(r-2)}(h^{(1)})| + \ldots + |c_n^{(r-2)}(h^{(1)})|}{n+1} = 0$$

und zuletzt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_0^{(r-1)}(s)| + \ldots + |c_0^{(r-1)}(s)|}{n+1} = 0,$$

d. h. (11) folgen, wie behauptet wurde.

Was nun die Äquivalenz der Beziehungen (15) und (16) betrifft, so berufe ich mich zunächst auf die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+r)\, t_\nu = (n+r)\, S_n^{(1)}(t) - \sum_{\nu=0}^{n-1} S_\nu^{(1)}(t) = (n+r+1)\, S_n^{(1)}(t) - S_n^{(2)}(t).$$

Verknüpft man das mit der evidenten Beziehung

$$S_n^{(1)}(s) = (n+1)\, h_n^{(1)}(s)$$

---

[7]) $c_n^{(p-1)}(h^{(1)})$ bedeutet den Cesàroschen Mittelwert $(p-1)$-ter Ordnung der Größen $h_0^{(1)}, h_1^{(1)}, \ldots, h_n^{(1)}$; die unten folgenden Bezeichnungen $c_n^{(r-2)}(h^{(1)}), \ldots, c_n^{(0)}(h^{(r-1)}), S_n^{(1)}(t), S_n^{(2)}(t), S_n^{(1)}(h^{(1)})$ usw. hat man ähnlich zu deuten.

und der rekursiven Relation

$$S_n^{(r)}(s) = S_0^{(r-1)}(s) + \ldots + S_n^{(r-1)}(s), \quad r = 1, 2, \ldots; \qquad (S_n^{(0)}(s) = s_n),$$

so erhält man der Reihe nach die Zusammenhänge

$$S_n^{(2)}(s) = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\, h_\nu^{(1)} = (n+2)\, S_n^{(1)}(h^{(1)}) - S_n^{(2)}(h^{(1)}),$$

$$S_n^{(3)}(s) = \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+2)\, S_\nu^{(1)}(h^{(1)}) - S_n^{(3)}(h^{(1)}) = (n+3)\, S_n^{(2)}(h^{(1)}) - 2 S_n^{(3)}(h^{(1)}),$$

. . . . . .

$$(18)\quad S_n^{(p)}(s) = (n+p)\, S_n^{(p-1)}(h^{(1)}) - (p-1)\, S_n^{(p)}(h^{(1)}), \qquad (p \geqq 1).$$

Dividiert man nun die beiden Seiten in (18) durch

$$A_n^{(p)} = \binom{n+p}{n} = \frac{n+p}{p}\binom{n+p-1}{n},$$

so ergibt sich

$$(19)\quad c_n^{(p)}(s) = p\, c_n^{(p-1)}(h^{(1)}) - (p-1)\, c_n^{(p)}(h^{(1)}),$$

und daraus folgt

$$\frac{|c_0^{(p)}(s)| + \ldots + |c_n^{(p)}(s)|}{n+1} \leqq p\, \frac{|c_0^{(p-1)}(h^{(1)})| + \ldots + |c_n^{(p-1)}(h^{(1)})|}{n+1} + (p-1)\, \frac{|c_0^{(p)}(h^{(1)}| + \ldots + |c_n^{(p)}(h^{(1)})|}{n+1};$$

das zeigt aber, daß die Annahme von (16) mit Hinsicht auf den Permanenzsatz [8]) [starke (Cesàrosche) Summierbarkeit $(p-1)$-ter Ordnung involviert die von p-ter Ordnung] das Bestehen von (15) nach sich zieht.

Die Umkehrung ergibt sich so: Die Verknüpfung der Relation

$$S_n^{(p-1)}(h^{(1)}) = S_n^{(p)}(h^{(1)}) - S_{n-1}^{(p)}(h^{(1)})$$

mit (18) führt zu

$$S_n^{(p)}(s) = (n+p)\,(S_n^{(p)}(h^{(1)}) - S_{n-1}^{(p)}(h^{(1)})) - (p-1)\, S_n^{(p)}(h^{(1)}) = (n+1)\, S_n^{(p)}(h^{(1)}) - (n+p)\, S_{n-1}^{(p)}(h^{(1)}).$$

Dividiert man hier an beiden Seiten durch

$$\binom{n+p}{n} = \frac{n+p}{n}\binom{n+p-1}{n}, \qquad (n \geqq 1)$$

so hat man

$$c_n^{(p)}(s) = (n+1)\, c_n^{(p)}(h^{(1)}) - n\, c_{n-1}^{(p)}(h^{(1)})$$

---

[8]) A. a. O., Theorem 3. — Fekete hat den Permanenzsatz in seinen in der Fußnote [4]) erwähnten Vorlesungen auf Sätze über Cauchysches Produkt stark summierbarer Reihen zurückgeführt.

und daher folgt

$$c_0^{(p)}(s) + \ldots + c_n^{(p)}(s) = c_0^{(p)}(s) + 2\,c_1^{(p)}(h^{(1)}) - c_0^{(p)}(h^{(1)}) + \ldots$$
$$+ (n+1)\,c_n^{(p)}(h^{(1)}) - n\,c_{n-1}^{(p)}(h^{(1)}) = (n+1)\,c_n^{(p)}(h^{(1)})$$
$$+ c_0^{(p)}(s) - c_0^{(p)}(h^{(1)}) = (n+1)\,c_n^{(p)}(h^{(1)})$$
$$+ s_0 - s_0 = (n+1)\,c_n^{(p)}(h^{(1)}),$$

d. h.

$$c_n^{(p)}(h^{(1)}) = \frac{c_0^{(p)}(s) + \ldots + c_n^{(p)}(s)}{n+1}.$$

Das zeigt offenbar, daß aus der Annahme (15)

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{(p)}(h^{(1)}) = 0$$

folgt und deshalb a fortiori

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_0^{(p)}(h^{(1)})| + \ldots + |c_n^{(p)}(h^{(1)})|}{n+1} = 0$$

besteht. Andererseits nach (19) gilt

$$p\,\frac{|c_0^{(p-1)}(h^{(1)})| + \ldots + |c_n^{(p-1)}(h^{(1)})|}{n+1} \leqq (p-1)\,\frac{|c_0^{(p)}(h^{(1)})| + \ldots + |c_p^{(p)}(h^{(1)})|}{n+1}$$
$$+ \frac{|c_0^{(p)}(s)| + \ldots + |c_n^{(p)}(s)|}{n+1},$$

mit anderen Worten, (15) involviert das Bestehen von (16), wenn nur p eine natürliche Zahl ist. Damit ist der Beweis für die Äquivalenz der Relationen (11) und (12) in allen Stücken dargetan.

Jerusalem, 9. Juli 1931.

(Eingegangen am 21. Juli 1931.)

Raumgeometrie und Spiegelungslehre[1]).

Von

H. Boldt in Rostock.

Es ist das Ziel der folgenden Untersuchungen, die räumliche Elementargeometrie mit Hilfe der Lehre von den Spiegelungen aufzubauen. Betreffs einer Einführung in die in Rede stehenden Fragen weise ich auf eine kürzlich erschienene Veröffentlichung von G. Thomsen hin, in der das entsprechende Problem für eine ebene Geometrie behandelt wird[2]). In der Bezeichnungsweise und dem Gang der Untersuchungen, die auf gruppengeometrischer Grundlage beruhen, schließe ich mich diesen Ausführungen an: Zunächst werden wir uns durch Aufsuchen bequemer Rechengesetze einen Kalkül verschaffen, der es gestattet, bereits einen großen Teil elementarer Sätze der gewöhnlichen Geometrie durch Rechnen nach den Gruppengesetzen und den hinzugenommenen Regeln zu beweisen. Später werden wir dann systematisch den erstrebten Aufbau vornehmen, indem wir auf bereits bewiesene Sätze zurückgreifen.

Erster Teil.

§ 1.

Die Spiegelungsreihen der gewöhnlichen euklidischen Geometrie.

Bevor wir an die Aufstellung der Spiegelungsreihen herangehen, wollen wir einige Festsetzungen über die Bezeichnungsweise treffen: *Wenn ein einzelnes involutorisches Element der betrachteten Gruppe Punkt- oder Geraden- oder Ebenenspiegelung ist, so soll das durch Verwendung von großen lateinischen bzw. kleinen lateinischen bzw. kleinen griechischen Buchstaben angedeutet werden; wenn eine zusammengesetzte kongruente Abbildung sich als*

[1]) Inaugural-Dissertation, angenommen von der Philosophischen Fakultät der Universität Rostock.

[2]) G. Thomsen, Über einen neuen Zweig geometrischer Axiomatik und eine neue Art von analytischer Geometrie. Math. Zeitschr. **34**, S. 668—720.

Punkt-, Geraden- oder Ebenenspiegelung herausstellt, so wollen wir das Aggregat bezüglich in folgende Klammern einschließen: [], ⟨⟩, {}. Beispielsweise bedeutet demnach $\{a\,\pi\}$, daß die zusammengesetzte Abbildung $a\,\pi$ eine Ebenenspiegelung ist; es gilt also ohne weiteres $a\,\pi\,a\,\pi = 1$, wofür auch $(a\,\pi)^2 = 1$ geschrieben werden möge[3]). Da man ferner eine zwischen den involutorischen Elementen bestehende Relation immer auf die Normalform $\mathfrak{R} = 1$ bringen kann, wollen wir diese gewöhnlich nur in dieser Form angeben und das Mitschreiben von $= 1$ unterlassen.

Ich gebe nun sogleich eine *Liste der wichtigsten räumlichen Spiegelungsreihen* an, die in ihrer Mehrzahl anschaulich unmittelbar einleuchten.

1. $(a\,P)^2$	Punkt und Gerade in vereinigter Lage.
2. $(\pi\,P)^2$	Punkt und Ebene in vereinigter Lage.
3. $\{a\,\pi\}$	Gerade und Ebene in vereinigter Lage.
4. $[a\,\pi]$	a steht senkrecht auf π.
5. $(a\,b)^2$	a und b stehen senkrecht aufeinander.
6. $(\pi\,\varrho)^2$	Senkrechte Ebenen.
7. $\{\pi\,\varrho\,\sigma\}$	Die drei Ebenen liegen parallel oder im Büschel.
8. $P\,S\,Q\,S$	S ist Mittelpunkt von P und Q.
9. $P\,a\,Q\,a$	a ist Mittellot von P und Q.
10. $P\,\pi\,Q\,\pi$	π ist Mittellotebene von P und Q.
11. $\pi\,\tau\,\varrho\,\tau$	τ ist Mittelebene von π und ϱ.
12. $a\,d\,b\,d$	d durchsetzt den kürzesten Abstand von a und b in dessen Mitte und halbiert den Schraubwinkel zwischen a und b.
13. $(a\,b\,c)^2 + \overline{a\,b\,c}$[4])	Die drei Geraden sind untereinander parallel oder sie haben paarweise dieselbe Schraubachse.
14. $P\,Q\,R\,S$	Die vier Punkte sind Eckpunkte eines Parallelogramms.
15. $(a\,b)^n + \overline{(a\,b)^p}$, p Teiler von n	a und b schneiden sich unter einem Winkel von der Periode $2n$.
16. $(\pi\,\varrho)^n + \overline{(\pi\,\varrho)^p}$, p Teiler von n	π und ϱ schneiden sich unter einem Winkel von der Periode $2n$.
17. $(P\,S)^p\,(Q\,S)^q$	S teilt die Strecke $\overrightarrow{PQ}$ im Verhältnis $q:p$.
18. $a\,b\,c$	Die drei Geraden stehen paarweise aufeinander senkrecht.

[3]) Näheres über die Verwendung der Klammern siehe bei G. Thomsen, a. a. O., S. 631.

[4]) $+$ bedeutet die logische Konjunktion, der Querstrich die Negation.

19. $[\pi\,\varrho\,\sigma]$	Die drei Ebenen sind paarweise zueinander senkrecht.
20. $\pi\,\varrho\,a$	π steht längs a senkrecht auf ϱ.
21. $\pi\,a\,P$	a steht in P senkrecht auf π.
22. $(\pi\,P\,Q)^2$	Die Verbindungsgerade PQ steht senkrecht auf π.
23. $\pi\,P\,Q\,\pi\,Q\,P$	$\overline{PQ}$ verläuft parallel zu π.
24. $(a\,P\,Q)^2$	a ist windschief senkrecht zu $\overline{PQ}$.
25. $a\,P\,Q\,a\,Q\,P$	a ist parallel zu $\overline{PQ}$.
26. $[a\,b\,Z]$, Z beliebig[5])	a und b sind parallel.
27. $[\pi\,\varrho\,Z]$	π und ϱ sind parallel.
28. $[a\,\pi\,a\,\pi\,Z] + \overline{[a\,\pi]}$	Die Gerade a verläuft parallel zur Ebene π.
29. $[a\,b\,c\,d\,Z]$	Die Geraden liegen zu einer festen Ebene parallel und der Schraubwinkel $\overrightarrow{a\,b}$ ist gleich dem Schraubwinkel $\overrightarrow{d\,c}$, oder sie sind paarweise parallel.
30. $[a\,b\,a\,b\,Z] + \overline{[a\,b\,Z]}$	a und b sind windschief senkrecht.
31. $[\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau\,Z]$	Die vier Ebenen liegen prismatisch und $\sphericalangle\,\overrightarrow{\pi\,\varrho} = \sphericalangle\,\overrightarrow{\tau\,\sigma}$, oder sie sind paarweise parallel.
32. $[(\pi\,\varrho\,\sigma)^2\,Z] + \overline{[\pi\,\varrho\,\sigma]}$	Die Ebenen liegen prismatisch.
33. $[(a\,b\,c)^2\,Z] + \overline{[a\,b\,c\,Z]}$	Die Geraden liegen zu einer festen Ebene parallel.

In der Begründung dieser Reihen beschränke ich mich auf zwei Beispiele:

1. $[\pi\,\varrho\,Z]$ oder $\pi\,\varrho\,Z\,Z'$ bedeutet, daß $\pi\,\varrho$ einer Translation äquivalent ist, d. h. π muß zu ϱ parallel verlaufen.

2. $[a\,\pi\,a\,\pi\,Z] + \overline{[a\,\pi]}$: Wegen $\{a\,\pi\,a\}$ kann man auf die Reihe 27 zurückgehen; hiernach bedeutet $[\{a\,\pi\,a\}\,\pi\,Z]$, daß die gespiegelte Ebene $\{a\,\pi\,a\}$ zur ursprünglichen parallel verläuft. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn $a \perp \pi$ oder $a \parallel \pi$. Da das erstere durch die Reihe $\overline{[a\,\pi]}$ ausgeschlossen wird, charakterisiert die Reihe 28 tatsächlich die angegebene Lagebeziehung.

§ 2.

Konstruktion einer Gruppengeometrie.

Wir geben uns jetzt eine beliebige Gruppe vor und teilen ihre involutorischen Elemente in drei voneinander verschiedene, elementfremde

[5]) Ein beliebiger Hilfspunkt soll im folgenden immer mit Z bezeichnet werden.

Teilmengen; die Individuen der ersten Teilmenge sollen *Punkte*, die der zweiten *Ebenen* und die der dritten *Geraden* heißen. Keine der Mengen möge leer sein, da sonst die späteren Aussagen möglicherweise gegenstandlos würden. Nehmen wir die Einteilung so vollkommen willkürlich vor, so kann es vorkommen, daß ein mit einem Produkt involutorischer Elemente transformiertes Element nicht wieder vom selben Typus ist. Um zu vermeiden, daß schon hier ein Widerspruch gegen die Grundtatsachen der gewöhnlichen Geometrie auftritt, kann man die Einteilung zweckmäßig nach dem folgenden Prinzip vornehmen:

1. Klasse der Geraden: Alle diejenigen involutorischen Elemente, die sich als Quadrat eines Produktes irgend zweier weiterer Elemente darstellen lassen;

2. Klasse der Ebenen: Alle diejenigen Elemente $\mathfrak{a}$ der Restmenge, für die sich ein weiteres $\mathfrak{x}$ der Restmenge finden läßt, welches mit dem zu bestimmenden die Periode 3 hat, d. h. $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x})^3 = 1$ erfüllt;

3. Klasse der Punkte: Alle übrigen involutorischen Elemente.

Legt man diese Einteilung zugrunde, so ist die Zugehörigkeit eines transformierten Elements zu ebenderselben Klasse, wie sich leicht zeigen läßt, daraus die logische Folge. Wir wollen jedoch im folgenden an der *Willkür der Einteilung* festhalten und von dem erwähnten Prinzip nicht Gebrauch machen[6]).

Um nun mit den definierten Gebilden Geometrie treiben zu können, bedarf es noch der *Erklärung der elementaren Lagebeziehungen. Diese geben wir wörtlich nach der oben angeführten Liste der Spiegelungsreihen*; jedoch sollen vorerst nur den ersten 17 Relationen dieser Liste Lagebeziehungen der Gruppengeometrie zugeordnet werden, und zwar genau die dort angegebenen. Gilt also z. B. die aus involutorischen Elementen der Gruppe gebildete Reihe $P\,\pi\,Q\,\pi$, so wollen wir sagen: Die Ebene π ist Mittellotebene für die Punkte P und Q.

Es ist nun die Frage von Interesse, welche von den Sätzen der gewöhnlichen Geometrie in dieser äußerst primitiven Gruppengeometrie noch gültig sind, d. h. sich durch Gruppenrechnung aus den jeweils vorausgesetzten Relationen herleiten lassen. Da sich herausstellt, daß deren Anzahl nur gering ist, wird man dazu übergehen, von der Gruppe stufenweise die Erfüllung bestimmter zusätzlicher Rechenregeln zu fordern, und jedesmal nachsehen, welche weiteren Sätze dadurch beweisbar geworden sind. Solche einfachen und für die Rechnung bequemen Regeln aufzufinden und mit ihrer Hilfe möglichst viele Sätze der elementaren Geometrie zu beweisen, soll jetzt versucht werden.

---

[6]) Vgl. G. Thomsen, a. a. O., S. 677.

§ 3.

Einige Sätze, die sich durch reines Gruppenrechnen beweisen lassen.

Für das Rechnen mit Spiegelungsreihen folgt aus der Tatsache, daß man es mit involutorischen Elementen zu tun hat:

1. *Treffen in Reihen zwei gleiche Elemente zusammen, so heben sie sich heraus.*

2. *Eine Reihe bleibt richtig, wenn man die Reihenfolge ihrer Elemente umkehrt.*

3. *Eine Reihe bleibt richtig, wenn man ihre Elemente in ihrer Gesamtheit zyklisch vertauscht.*

Auf Grund dieser Regeln kann man leicht folgende einfachen Sätze beweisen[7]):

Satz 1. $PQRS + RSTV \to PQVT.$

Satz 2. $(abc)^2 + (abd)^2 + (acd)^2 \to (bcd)^2.$

Satz 3. a) $\pi\tau\varrho\tau + \{\pi\tau\sigma\} + (\tau\sigma)^2 \to \pi\sigma\varrho\sigma.$
b) $acbc + (acd)^2 + (cd)^2 \to adbd.$

Ohne Rechnung bestätigt man leicht auch:

Satz 4. $abc \to (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2.$

Satz 5. $\pi\varrho a \to (\pi\varrho)^2 + \{\pi a\} + \{\varrho a\}.$

Satz 6. $\pi\varrho a + \varrho\sigma b + \sigma\pi c \to (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$ und $abc.$

Ich beweise jetzt einen Satz vom Parallelflach, der speziell auch als ebener Satz aufgefaßt werden kann:

Satz 7. $PQVW + PQRS + RSTU + RUVQ \to TUVW + STWP.$

In Worten: *Bilden die Punkte $PQVW$ und $PQRS$ und $RSTU$ und $RUVQ$ je ein Parallelogramm, so tun es auch die Punkte $TUVW$ und $STWP$* (vgl. Fig. 1).

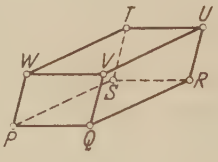


Fig. 1.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $TURS + SRQP + PQVW$; durch Zusammenstellung folgt dann $TUVW$. Ebenso folgt aus $STUR + RUVQ + QVWP$ die Reihe $STWP$.

---

[7]) Da die folgenden Sätze und ihre Beweise zum Teil in einer ebenen Geometrie entsprechend lauten, vgl. G. Thomsen, a. a. O., S. 695 f. Wegen der Bedeutung der Sätze siehe auch obige Liste der Spiegelungsreihen.

Schließlich führe ich einen Satz von formaler Bedeutung an:

Satz 8. *Erfüllen irgend drei involutorische Elemente* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ *die Reihen* $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})^2 + (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})^2$, *so gilt stets auch* $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})^2$.

Den Beweis führt man durch Zusammensetzung der vorausgesetzten Reihen.

§ 4.

Die erste Zusatzforderung.

Als erste Forderung stellen wir jetzt an die Gruppe eine solche, die sich als ebenso stark in Anbetracht der Fülle von Sätzen, die sie in Verbindung mit späteren Axiomen beweisbar macht, wie bequem beim Rechnen herausstellt, die ferner in der ebenen wie in der räumlichen wie in der Geometrie höherer Dimensionen gleich gut verwendbar ist, nämlich die folgende:

Forderung I. *Für irgend drei Punkte* P, Q, R *soll nie die Reihe* PQR *bestehen; es soll jedoch immer* $PQRPQR$ *gelten.*

Um nicht mit der gewöhnlichen Geometrie in Widerspruch zu geraten, ist es nötig sich zu überzeugen, daß diese der Forderung genügt. Man erkennt leicht, daß dies der Fall ist.

Bereits G. Thomsen hat nun einige ebene Sätze in einfacher Weise mittels dieser Zusatzregel bewiesen[8]). Einige solcher Sätze, die natürlich auch im Raume ihre Gültigkeit behalten, sind beispielsweise

Satz 9. $PQRS + PTRV \to QTSV$. (Kleiner Satz von Pascal.)

Satz 10. $PBQB + RAQA + PMAMAM \to RMBMBM$. (Satz vom Schnittpunkt der Schwerlinien im Dreieck.)

Satz 11. *Für vier Punkte gilt stets* $PQRSQPSR$. (Satz von der Vertauschbarkeit der Translationen.)

Ich füge nun noch zwei weitere Sätze hinzu, die sich zwar formal schon in der ebenen Geometrie herleiten lassen, die jedoch erst durch räumliche Betrachtung Interesse erhalten:

Satz 12. $PURURU + QVRVRV + QXUXUXUX \to PXVXVXVX$.

In Worten: *Teilt* U *die Strecke* $\overline{PR}$ *und* V *die Strecke* $\overline{QR}$ *im Verhältnis 2:1 und ist* X *3:1-Teilpunkt der Strecke* $\overline{QU}$, *so ist* X *auch 3:1-Teilpunkt der Strecke* $\overline{PV}$ (vgl. Fig. 2).

---

[8]) A. a. O., S. 696 ff.

Beweis: Die Zusammenstellung der Reihen $VRVRVQ$ und $QXUXUXUX$ ergibt die Reihe $XVRVRVXUXUXU$. Vertauscht man an der unterstrichenen Stelle R mit X über V hinweg, so erhält man $XVRVXVRUXUXU$ und nach Satz 11 $XVXVRVXUXURU$. Weiter findet man nach Regel I $XVXVXVRUXURU$ und schließlich $XVXVXVXURURU$. Nun ist aber nach Voraussetzung $URURU = P$, also folgt $XVXVXVXP$ und damit die Behauptung.

Dieser Satz bedeutet in der gewöhnlichen Geometrie zugleich den Satz vom Schnittpunkt der Schwerlinien eines Tetraeders, der diese im Verhältnis 3 : 1 teilt, weil hier nämlich genau die Konfiguration des Satzes 12 auftritt (Fig. 3).

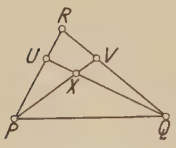


Fig. 2.

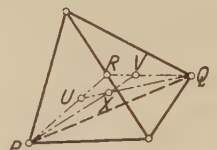


Fig. 3.

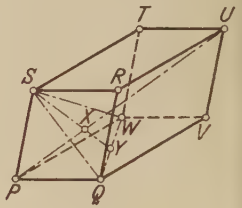


Fig. 4.

Satz 13. $PQVW + PQRS + QRUV + WYQY + SXYXYX \rightarrow UXPXPX$.

Dieser Satz entspricht dem folgenden:

Bilden acht Punkte ein Parallelepiped, so ist der Schwerpunkt jedes Dreiecks, das von dem Parallelepiped ein Tetraeder mit vier der acht Punkte als Eckpunkte abtrennt, 1:2-Teilpunkt der durch die Spitze des Tetraeders gehenden Raumdiagonale (Fig. 4).

Beweis: $QRUVSXQYWWVQPXYX$ ist wegen $QYW = Y$ und der 1., 3. und 5. Voraussetzung eine richtige Reihe. Wir behandeln das Tripel VSX nach Regel I und erhalten $PQRUXSVQYVQPXYXP$; setzen wir jetzt YQV statt VQY, so hebt sich V und Q heraus, und wir erhalten, wenn wir noch berücksichtigen, daß $PQR = S$ ist: $SUXSYPXYXP$. Durch Umstellung von UXS und PXY verschwinden auch S und Y aus der Reihe, so daß $XUXPXP$ oder $UXPXPX$ übrigbleibt, was zu beweisen war.

§ 5.

Die zweite Zusatzforderung.

Wie schon die erste Forderung eine gewisse Reihe als nicht möglich ausschloß, so werden durch die zweite Zusatzforderung weitere Reihen für verboten erklärt:

Forderung II.

a) *Es bestehen keine Reihen, die Punkte und Ebenen zusammen in ungerader Anzahl enthalten.*

b) *Es gelten nie Reihen von der Gestalt* $a\,P\,Q$ *und* $\pi\,P\,Q\,R$.

c) *Transformiert man einen Punkt oder eine Ebene mit einem beliebigen Produkt involutorischer Elemente, so soll der transformierte Ausdruck wieder ein Punkt bzw. eine Ebene sein*[9]).

Zunächst überzeugen wir uns wieder von der Erfüllung dieser Forderungen durch die gewöhnliche Geometrie: Um beispielsweise zu bestätigen, daß $P\,Q\,R\,\pi$ immer falsch ist, denken wir uns eine Ebene beliebiger Richtung den Spiegelungen P, Q, R unterworfen; sie bleibt dabei parallel zu sich selbst. Eine Umlegung aber, die alle Ebenen beliebiger Richtung bei der Abbildung parallel läßt, ist eine Punktspiegelung, also keine Ebenenspiegelung π.

Es folgen jetzt einige Sätze, die sich mit Hilfe der Forderung II beweisen lassen.

Satz 14. a) $(a\,P)^2 \to \{a\,P\}$,

b) $(\pi\,P)^2 \to \langle \pi\,P\rangle$,

c) $(a\,b)^2 \to \langle a\,b\rangle$,

d) $(a\,b\,c)^2 \to \langle a\,b\,c\rangle$,

e) $(P\,Q\,R)^2 \to [P\,Q\,R]$,

f) $(\pi\,R\,S)^2 \to \{\pi\,R\,S\}$,

g) $(a\,R\,S)^2 \to \langle a\,R\,S\rangle$.

Der Beweis, daß das involutorische Element jeweils von der behaupteten Art ist, läuft ganz allgemein so, daß man auf Grund von Regel II alle Möglichkeiten bis auf die behauptete widerlegt. In e) schließt sich beispielsweise Identität und Geradenklammer nach II a, Ebenenklammer nach II b aus, so daß $[P\,Q\,R]$ folgt.

Satz 15. *Innerhalb einer Punkt-, Ebenen- und Geradenklammer kann man die Elemente zyklisch vertauschen.*

Den Beweis führt man für Punkt- und Ebenenklammer mittels Axiom II c, für Geradenklammer mit Hilfe von II a.

---

[9]) Wegen der Notwendigkeit dieser Forderung (c) siehe oben (§ 2).

Satz 16. *Gilt eine der folgenden Reihen mit einem bestimmten Punkte P, so gilt sie für jeden beliebigen Punkt Z:*

a) $[a\,b\,P] \to [a\,b\,Z]$,
b) $[\pi\,\varrho\,P] \to [\pi\,\varrho\,Z]$,
c) $[a\,\pi\,a\,\pi\,P] \to [a\,\pi\,a\,\pi\,Z]$,
d) $[a\,b\,c\,d\,P] \to [a\,b\,c\,d\,Z]$,
e) $[\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau\,P] \to [\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau\,Z]$,
f) $[(\pi\,\varrho\,\sigma)^2\,P] \to [(\pi\,\varrho\,\sigma)^2\,Z]$,
g) $[(a\,b\,c)^2\,P] \to [(a\,b\,c)^2\,Z]$.

Alle diese Sätze haben die Gestalt $[\mathfrak{A}\,P] \to [\mathfrak{A}\,Z]$; der Beweis lautet so: $\mathfrak{A}\,P$, P und Z sind Punkte, also gilt nach Axiom I und Satz 14 e $[\mathfrak{A}\,P\,P\,Z]$ oder $[\mathfrak{A}\,Z]$.

Wie man hieraus sieht, stellen die Reihen des Satzes 16 Beziehungen zwischen den jeweils vorkommenden Geraden und Ebenen dar, die von dem Punkt, der in ihnen auftritt, unabhängig sind; deshalb wollen wir nunmehr auch die Reihen 26 bis 33 der Liste in § 1 in die Gruppengeometrie einführen und die einzelnen Lagebeziehungen wörtlich wie dort bezeichnen. In einer Reihe von Sätzen läßt sich zeigen, daß den eben definierten Lagebeziehungen in der Gruppengeometrie dieselben Eigenschaften zukommen, wie sie denen der gewöhnlichen Geometrie eigen sind, wodurch die eingeführte Bezeichnungsweise gerechtfertigt erscheint.

Einige solche Sätze sind die folgenden:

Satz 17. a) $[a\,b\,Z] + [a\,c\,Z] \to [b\,c\,Z]$,
b) $[\pi\,\varrho\,Z] + [\pi\,\tau\,Z] \to [\tau\,\varrho\,Z]$,
c) $[a\,\pi\,a\,\pi\,Z] + \overline{[a\,\pi]} + [a\,b\,Z] \to [b\,\pi\,b\,\pi\,Z] + \overline{[b\,\pi]}$.

Dieser Satz ist insofern von Bedeutung, als er die *Transitivität der Parallelismen* für unsere Gruppengeometrie ausspricht.

Satz 18. $[a\,\pi] + [b\,\pi] \to [a\,b\,Z]$.

In Worten: *Stehen zwei Geraden senkrecht auf derselben Ebene, so sind sie parallel.*

Satz 19. $[(\pi\,\varrho\,\sigma)^2\,Z] + \overline{[\pi\,\varrho\,\sigma]} + [\pi\,\tau\,Z] \to [(\tau\,\varrho\,\sigma)^2\,Z] + \overline{[\tau\,\varrho\,\sigma]}$.

In Worten: *Befindet sich eine Ebene π mit zwei weiteren ϱ und σ in prismatischer Lage, so auch jede zu π parallele Ebene τ.*

Satz 20. $\{a\,\pi\} + [a\,b\,Z] \to [b\,\pi\,b\,\pi\,Z] + \overline{[b\,\pi]}$.

Satz 21. $\{b\,P\} + \{b\,Q\} + [a\,b\,Z] \to a\,P\,Q\,a\,Q\,P$.

Satz 22. $\langle\pi\,P\rangle + \langle\pi\,Q\rangle + [\pi\,\varrho\,Z] \to \varrho\,P\,Q\,\varrho\,Q\,P$.

Satz 23. $b\,P\,Q\,b\,Q\,P + [b\,\pi] \to \{\pi\,P\,Q\}$.

Satz 24. a) $[\pi\varrho Z] + \langle\pi\varrho\rangle \to \pi\varrho$.

b) $[a\,bZ] + \langle a\,b\rangle \to a\,b$.

In Worten: *Zwei verschiedene Ebenen bzw. Geraden können nicht gleichzeitig zueinander senkrecht und parallel sein.*

Satz 25. $\langle a\,c\rangle + [a\,bZ] \to [b\,c\,b\,cZ] + \overline{[b\,cZ]}$.

Satz 26. $[a\,\pi] + \langle P\pi\rangle + \{Pa\} \to \pi\,a\,P$.

Satz 27. $[\pi\varrho\sigma\tau Z] \to [(\pi\varrho\sigma)^2 Z] + \overline{[\pi\varrho\sigma]} + [(\varrho\sigma\tau)^2 Z] + \overline{[\varrho\sigma\tau]}$ usw.

Dieser Satz besagt, daß die durch die Reihe $[\pi\varrho\sigma\tau Z]$ definierte Winkelkongruenz sich nur auf Ebenen von prismatischer Lage bezieht. Ähnliches gilt auch für die Geraden.

Satz 28. $(PQ)^2 \to PQ$.

Satz 29. $PRQR + PSQS \to RS$.

In Worten: *Ein Punktepaar hat höchstens einen Mittelpunkt.*

Satz 30. a) $\{a\,P\} + \{aQ\} + PRQR \to \{a\,R\}$,

b) $\langle\pi\,P\rangle + \langle\pi Q\rangle + PRQR \to \langle\pi R\rangle$.

In Worten: *Der Mittelpunkt zweier Punkte liegt auf deren Verbindungsgeraden bzw. auf jeder Ebene, die beide Punkte enthält.*

Satz 31. a) $\{P\,a\} + \{P\,b\} + [a\,bZ] \to a\,b$,

b) $\langle P\,\pi\rangle + \langle P\,\varrho\rangle + [\pi\varrho Z] \to \pi\varrho$.

In Worten: *Zwei verschiedene parallele Geraden bzw. Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.*

Satz 32. a) $[a\,bZ] + [a\,cZ] + \{P\,b\} + \{Pc\} \to b\,c$,

b) $[\pi\varrho Z] + [\pi\sigma Z] + \langle P\varrho\rangle + \langle P\sigma\rangle \to \varrho\sigma$.

Dieser Satz sagt aus, daß es zu einer gegebenen Geraden bzw. Ebene durch einen vorgegebenen Punkt *höchstens eine parallele Gerade bzw. Ebene* gibt.

Satz 33. $\{Pa\} + \{Pb\} + [a\,\pi] + [b\,\pi] \to a\,b$.

In Worten: *Von einem Punkte P kann man auf eine Ebene π höchstens ein Lot fällen.*

Die Beweise all dieser Sätze habe ich zunächst fortgelassen, und ich will diese jetzt aus Gründen der Raumersparnis auch nur in einigen Fällen nachtragen:

Beweis des Satzes 17 c: Für die drei Punkte Z, $[Z\,b\,a]$ und $[a\,\pi\,a\,\pi Z]$ gilt nach Axiom I und Satz 14 e $[ZZ\,b\,a\,a\,\pi\,a\,\pi Z]$ oder $[b\,\pi\,a\,\pi Z]$. Es gilt dann weiter $\big[[\pi Z\,b\,\pi\,a]\,[a\,bZ]Z\big]$ oder $[\pi Z\,b\,\pi\,b]$ oder $[b\,\pi\,b\,\pi Z]$. Daß

$[b\,\pi]$ nicht gelten kann, folgt daraus, daß die Annahme $[b\,\pi]$ mit dem sicher richtigen Ausdruck $\big[[\pi\,b]\,[b\,a\,Z]\,Z\big]$ einen Widerspruch gegen $[\pi\,a]$ liefern würde.

Beweis des Satzes 21: Aus $(b\,P)^2 + (b\,Q)^2$ folgt $b\,P\,Q\,b\,Q\,P$, dann gilt auch $P\,a\,b\,b\,P\,Q\,b\,Q\,P\,[b\,a\,P]$ oder nach Axiom I $P\,a\,P\,Q\,b\,[b\,a\,P]\,P\,Q$ oder $a\,P\,Q\,a\,Q\,P$.

Beweis des Satzes 27: $[\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau\,Z] \rightarrow \big[\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau\,[\pi\,Z\,\pi]\big]$ oder $[\varrho\,\sigma\,\tau\,\pi\,Z]$. In bekannter Weise folgt weiter $\big[[\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau\,Z]\,Z\,[\tau\,\pi\,Z\,\varrho\,\sigma]\big]$ oder $[\pi\,\varrho\,\sigma\,\pi\,Z\,\varrho\,\sigma]$ oder $[(\pi\,\varrho\,\sigma)^2\,Z]$. Es ist noch zu zeigen, daß $[\pi\,\varrho\,\sigma]$ falsch ist: Aus $[\pi\,\varrho\,\sigma]$ und der Voraussetzung würde $\big[[\sigma\,\varrho\,\pi]\,[\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau\,Z]\,Z\big]$ oder $[\tau]$ folgen, was ein Widerspruch ist.

Ich schließe diesen Paragraphen mit folgendem Tetraedersatz:

Satz 34. *Die Halbierungspunkte je zweier Gegenkanten eines Tetraeders haben denselben Punkt als Mittelpunkt. Dieser Punkt ist derselbe wie der Punkt X in Satz 12 (Schwerpunkt).*

Um nicht so viele Voraussetzungen schreiben zu müssen, legen wir etliche schon in die Bezeichnungsweise der Punkte hinein, wie Fig. 5 zeigt. Dann läßt sich der Satz so zum Ausdruck bringen:

a) $\left.\begin{matrix} Q\,R\,S\,T\,S\,R\,Q = P\,T\,P \\ S\,X\,Q\,X \end{matrix}\right\} \rightarrow P\,X\,R\,X,$

b) $\left.\begin{matrix} Q\,Y\,Q\,Y\,T\,Y \\ S\,X\,Q\,X \end{matrix}\right\} \rightarrow Y\,X\,Y\,X\,Y\,X\,[S\,T\,S]\,X.$

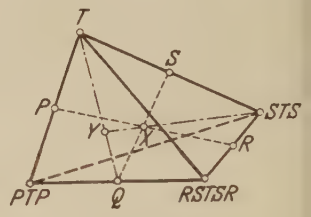


Fig. 5.

Beweis:

a) Man setzt $S = X\,Q\,X$ in die erste Voraussetzung ein und erhält die Reihe

$$Q\,\underline{R\,X\,Q}\,X\,T\,X\,Q\,\underline{X\,R\,Q}\,P\,T\,P.$$

Durch Anwendung von Axiom I auf die unterstrichenen Tripel folgt $X\,R\,X\,T\,\underline{X\,R}\,X\,P\,\underline{T\,P}$; vertauscht man jetzt gemäß Satz 11 die angemerkten Punktepaare, so ergibt sich $X\,R\,X\,P\,X\,P\,X\,R$ oder $[X\,R\,X]\,P\,[X\,R\,X]\,P$, woraus man nach Satz 28 die gewünschte Reihe $P\,X\,R\,X$ erschließt.

b) Man ersetzt Q durch $X\,S\,X$ und erhält $X\,S\,X\,Y\,X\,S\,X\,Y\,T\,Y$ oder $\underline{Y\,X\,S}\,X\,Y\,X\,\underline{S\,X\,Y}\,T$. Nach Axiom I folgt weiter $S\,X\,Y\,X\,Y\,X\,Y\,X\,S\,T$ oder das gewünschte $Y\,X\,Y\,X\,Y\,X\,S\,T\,S\,X$.

§ 6.

Die dritte Zusatzforderung.

Während die früheren Forderungen in der Aufstellung immer richtiger oder nie richtiger Reihen bestanden, so ist die dritte Forderung, die wir

an die Gruppe stellen, von der Art, daß aus der Richtigkeit gewisser Reihen neue richtige Reihen gefolgert werden können.

Forderung III.

a) $abPQbaQP \rightarrow [abZ]$ oder $(aPQ)^2$.

b) $\pi\varrho PQ\varrho\pi QP \rightarrow [\pi\varrho Z]$ oder $\pi PQ\pi QP$.

Zieht man diese Regel hinzu, die wiederum auch für die gewöhnliche Geometrie Gültigkeit hat, so kann man nunmehr folgende weiteren Sätze gewinnen:

Satz 35. $\{\pi\varrho\sigma\} + [\pi\varrho Z] \rightarrow [\varrho\sigma Z]$.

In Worten: *Sind von drei im Büschel gelegenen Ebenen zwei parallel, so sind alle drei untereinander parallel.*

Beweis: Die Reihe $\pi\pi\sigma\varrho\varrho\pi ZZ\pi\sigma\varrho\pi ZZ\pi\varrho$ ist trivialerweise richtig. Ich beklammere gemäß den Voraussetzungen und wende Axiom III an:

$$\pi\{\pi\sigma\varrho\}[\varrho\pi Z]Z\{\pi\sigma\varrho\}\pi Z[Z\pi\varrho] \rightarrow \begin{cases} \alpha)\ [\pi\pi\sigma\varrho Z] \text{ oder } [\sigma\varrho Z], \\ \beta)\ \pi[\varrho\pi Z]Z\pi Z[Z\pi\varrho]. \end{cases}$$

Die zweite Eventualität liefert $\langle\pi\varrho\rangle$, welches jedoch mit $[\pi\varrho Z]$ nicht verträglich ist. Deshalb gilt allein $[\sigma\varrho Z]$.

Satz 36. a) $\{aP\} + \{bP\} + [ababZ] + \overline{[abZ]} \rightarrow \langle ab\rangle$.

b) $\{a\pi\} + \{b\pi\} + [ababZ] + \overline{[abZ]} \rightarrow \langle ab\rangle$.

In Worten: *Haben zwei windschief senkrechte Geraden einen Punkt gemeinsam oder liegen sie in derselben Ebene, so sind sie im eigentlichen Sinne senkrecht zueinander.*

Beweis: Die Anwendung von Axiom III auf die trivialerweise richtige Reihe

$$\{a\pi\}\{\pi b\}[babaZ]Z\{b\pi\}\{\pi a\}Z[Zabab]$$

ergibt die beiden Eventualitäten:

$\alpha)$ $[a\pi\pi bZ]$ oder $[abZ]$,

$\beta)$ $\{\pi b\}[babaZ]Z\{\pi b\}Z[Zabab]$.

Während $\alpha)$ der Voraussetzung widerspricht, folgt aus $\beta)$ weiter $\pi abab\pi babab$ oder, da π mit a und b vertauschbar ist, $(ab)^4$. Das heißt $(ab)^2$ ist involutorisch, kann jedoch in diesem Falle nur $= 1$ sein, womit alles bewiesen ist. — Für a) lautet der Beweis analog.

Wie aus den soeben durchgeführten Beweisen hervorgeht, kommt es jedesmal auf eine gewisse Reihe an, die man aus den Voraussetzungen gewinnt und auf die das Axiom III anwendbar ist. Was die Beweise

der folgenden Sätze angeht, so werde ich mich deshalb meist auf die Angabe dieser Reihe beschränken.

Satz 37. $\{\pi a\} + \{\varrho a\} + [\pi \varrho Z] \to \pi \varrho$.

In Worten: *Zwei verschiedene parallele Ebenen haben keine Gerade gemeinsam.*

Beweis mittels der Reihe $\{a \varrho\}\, \pi\, [\pi \varrho Z]\, Z\, \pi\, \{a \varrho\}\, Z\, [Z \varrho \pi]$.

Satz 38. $\{aP\} + \{aS\} + \pi S \pi P \to [\pi a]$.

In Worten: *Die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte (P und S) steht senkrecht auf ihrer Mittellotebene.*

Beweis mittels der Reihe $\{P \pi S\}\, \{Sa\}\, PS\, \{Sa\}\, \{P \pi S\}\, SP$.

Satz 39. $bPQbQ\,P + \langle ab\rangle \to (aPQ)^2$.

Beweis mittels der Reihe $a\,\langle ab\rangle\, PQ\,\langle ba\rangle\, aQ\,P$.

Satz 40. $aRSaSR + \{bR\} + \{bS\} \to [abZ]$.

Dieser Satz rechtfertigt es, bei dem Erfülltsein der Reihe $aRSaSR$ von einem Parallelismus zwischen der Geraden a und der Verbindungsstrecke RS zu sprechen.

Beweis mittels $abSRbaRS$.

Satz 41. $SPbPSb + QRbRQb + PQaQPa + SRaRSa + \overline{[abZ]} \to PQRS$ (Fig. 6).

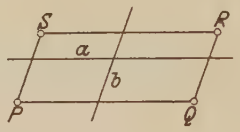


Fig. 6.

Beweis:

Aus $PQaQPa \cdot aSRaRS$ folgt $QPSRaRSPQa$,
aus $QRbRQb \cdot bSPbPS$ folgt $PSQRbRQSPb$.

Aus der durch Zusammenstellung entstandenen Reihe

$$a \cdot bPSQRbRQSPQPSRaRSPQ$$

folgert man, indem man mit Hilfe von Axiom I Q und R in der Mitte zum Verschwinden bringt:

$$abPSQRbSPSPaRSPQ.$$

Das mittlere b kann man nun durch zweimaliges Anwenden der Gleichung $bSP = SPb$ zum a hinüberschaffen und also schreiben:

$$abPSQRSPSPbaRSPQ.$$

In bekannter Weise formt man weiter um und erhält schließlich

$$ab[QPS]RbaR[SPQ].$$

Nach Axiom III folgen jetzt die Eventualitäten

$$\alpha)\ [abZ] \quad \text{und} \quad \beta)\ aQPSRaQPSR.$$

Während $\alpha)$ der Voraussetzung widerspricht, ergibt sich aus $\beta)$ und einer der obigen Reihen $Q[PSR]Q[PSR]$ oder nach Satz 28 $QPSR$ oder $PQRS$.

Satz 42. $\{Pa\} + \{Pb\} + \{Qa\} + \{Qb\} \to PQ$ oder ab.

Dieser Satz besagt:

a) *Durch zwei verschiedene Punkte geht höchstens eine Gerade hindurch.*

b) *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Beweis mittels $baPQabQP$.

Schließlich führe ich auf dieser Stufe noch einen Satz an, der ein Analogon zu dem Kreiswinkelsatz in der Ebene darstellt und für die späteren Ausführungen von Bedeutung sein wird:

Satz 43. $\{\pi_{12}\pi_{13}\pi_{14}\} + \{\pi_{12}\pi_{23}\pi_{24}\} + \{\pi_{13}\pi_{23}\pi_{34}\} + \{\pi_{14}\pi_{24}\pi_{34}\} + [\pi_{12}\pi_{14}\pi_{34}\pi_{23}Z] \to [\pi_{12}\pi_{24}\pi_{34}\pi_{13}Z]$.

Um Ausartungen zu vermeiden, nehmen wir an, daß zwischen den Ebenen π_{ik}, die übrigens nach Satz 27 in prismatischer Lage gegeben sind, außer den angeführten keine weiteren Büschelrelationen bestehen (Fig. 7).

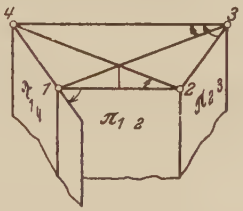


Fig. 7.

Beweis: Wie man sich unter Ausnutzung der durch die Voraussetzungen gegebenen Umstellungsmöglichkeiten leicht überzeugt, ist folgende Reihe richtig:

$$\{\pi_{12}\pi_{24}\pi_{23}\}\{\pi_{23}\pi_{34}\pi_{13}\}[\pi_{12}\pi_{14}\pi_{34}\pi_{23}Z]Z\{\pi_{13}\pi_{34}\pi_{23}\} \cdot \{\pi_{23}\pi_{24}\pi_{12}\}Z[Z\pi_{23}\pi_{34}\pi_{14}\pi_{12}].$$

Nach Axiom III ergeben sich die Möglichkeiten

$\alpha)$ $[\pi_{12}\pi_{24}\pi_{34}\pi_{13}Z]$,

$\beta)$ $\{\pi_{12}\pi_{24}\pi_{23}\}[\pi_{12}\pi_{14}\pi_{34}\pi_{23}Z]Z\{\pi_{12}\pi_{24}\pi_{23}\}Z[Z\pi_{23}\pi_{34}\pi_{14}\pi_{12}]$.

Aus $\beta)$ folgt $(\pi_{12}\pi_{14}\pi_{34}\pi_{23})^2$ und wegen der Voraussetzung weiter $\pi_{12}\pi_{14}\pi_{34}\pi_{23}$ oder etwa $\{\pi_{12}\pi_{14}\pi_{34}\}$. Diese Büschelrelation ist unter den vorausgesetzten nicht enthalten und wurde ausgeschlossen. Damit ist $[\pi_{12}\pi_{24}\pi_{34}\pi_{13}Z]$ bewiesen.

§ 7.

Einige weitere Zusatzforderungen.

Zu den drei bisher aufgestellten Forderungen wollen wir jetzt noch einige weitere hinzufügen, und zwar die folgenden:

Forderung IV:

Es gelten nie gleichzeitig die Relationen

$$(a\,b)^2 + (b\,c)^2 + (c\,a)^2 + (a\,d)^2 + (b\,d)^2.$$

Forderung V:

$$\lambda\,\mu\,\nu\,P\,\nu\,\mu\,\lambda\,P \to \langle\lambda\,P\rangle + \langle\mu\,P\rangle + \langle\nu\,P\rangle \quad \text{oder} \quad \{\lambda\,\mu\,\nu\}.$$

Forderung VI:

$$\pi\,\varrho\,a\,\varrho\,\pi\,a \to \{\varrho\,a\} + \{\pi\,a\} \quad \text{oder} \quad [\varrho\,a] + [\pi\,a] \quad \text{oder} \quad \langle\pi\,\varrho\rangle.$$

Forderung VII:

$$a\,b\,c\,d\,b\,a\,d\,c \to \langle a\,b\rangle + \langle c\,d\rangle \quad \text{oder} \quad \langle a\,b\,c\rangle + \langle c\,d\,a\rangle$$
$$\text{oder} \quad [a\,b\,Z] \quad \text{oder} \quad [c\,d\,Z].$$

Zunächst bestätigt man wiederum leicht, daß auch diese weiteren Axiome den Verhältnissen der gewöhnlichen Geometrie entsprechen.

Allein mit Axiom IV (und den früheren) kann man nun folgende Sätze beweisen:

Satz 44. *Die Relationen* $\langle\pi\,\varrho\rangle + \langle\varrho\,\tau\rangle + \langle\tau\,\pi\rangle + \langle\varrho\,\sigma\rangle + \langle\sigma\,\tau\rangle + \langle\sigma\,\pi\rangle$ *können nicht gleichzeitig bestehen; d. h. vier Ebenen können nicht paarweise aufeinander senkrecht stehen.*

Satz 45. $\langle\pi\,\varrho\rangle + \langle\varrho\,\sigma\rangle + \langle\sigma\,\pi\rangle \to [\pi\,\varrho\,\sigma]$.

Satz 46. *Gelten die Reihen* $\{a\,\pi\}$, $\{b\,\pi\}$ *und* $\{c\,\pi\}$, *so gilt nie gleichzeitig* $a\,b\,c$.

Satz 47. $\langle a\,b\rangle + \langle b\,c\rangle + \langle c\,a\rangle \to a\,b\,c$.

Zieht man nunmehr auch die übrigen Axiome heran, so beweist man weiter:

Satz 48. $P\,\sigma\,R\,\sigma + R\,\pi\,S\,\pi + P\,\varrho\,S\,\varrho \to \{\pi\,\varrho\,\sigma\}$.

In Worten: *Die drei Mittellotebenen eines Dreiecks liegen im Büschel* (Fig. 8).

Beweis: Setzt man in der zweiten Voraussetzung $\varrho\,P\,\varrho$ statt S und in der sich so ergebenden Reihe $\sigma\,R\,\sigma$ statt P, so erhält man $\pi\,\varrho\,\sigma\,R\,\sigma\,\varrho\,\pi\,R$. Nach Axiom V folgen die Möglichkeiten $\{\pi\,\varrho\,\sigma\}$ und $\langle\pi\,R\rangle + \langle\varrho\,R\rangle + \langle\sigma\,R\rangle$, welch letztere zusammen mit den Voraussetzungen den Widerspruch $R = S = P$ ergibt.

Satz 49. $\langle S\sigma\rangle + \langle P\pi\rangle + \langle R\varrho\rangle + \{PR\sigma\} + \{RS\pi\} + \{PS\varrho\} \to \{\pi\varrho\sigma\}$ (Fig. 9).

Die Reihen $\{PR\sigma\}$, $\{RS\pi\}$ und $\{PS\varrho\}$ bringen zum Ausdruck, daß σ zur Verbindungsgeraden $\overline{PR}$ senkrecht ist, ebenso π zu RS und ϱ zu $\overline{PS}$. Wir können deshalb den Satz als Verallgemeinerung des ebenen Höhensatzes auffassen, indem die Höhenlinien durch Höhenebenen ersetzt sind.

Der Beweis geht auf Satz 48 zurück[10]).

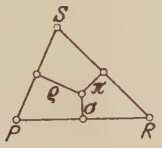


Fig. 8.

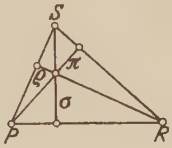


Fig. 9.

Satz 50. $[\pi\varrho\sigma] \to \langle\pi\varrho\rangle + \langle\varrho\sigma\rangle + \langle\sigma\pi\rangle$.

Beweis durch Anwendung von Axiom V auf die Reihe $\pi\varrho\sigma P\sigma\varrho\pi P$.

Satz 51. $\{\pi a\} + \{\varrho a\} + \{\pi\varrho\sigma\} \to \{\sigma a\}$.

In Worten: *Gehen von drei im Büschel gelegenen Ebenen zwei durch die Gerade a hindurch, so auch die dritte.*

Beweis durch Anwendung von Axiom VI auf die Reihe

$$\sigma\,\{\sigma\pi\varrho\}\,a\,\{\sigma\pi\varrho\}\,\sigma a.$$

Satz 52. $\{a\pi\} + [a\varrho] \to \langle\pi\varrho\rangle$.

In Worten: *Jede Ebene, die durch ein Lot einer anderen Ebene hindurchgeht, steht auf letzterer senkrecht.*

Beweis durch Anwendung von Axiom VI auf die Reihe $\pi\varrho a\varrho\pi a$.

Satz 53. $\{a\pi\} + \{aP\} \to \langle\pi P\rangle$.

In Worten: *Liegt die Gerade a in einer Ebene π, so auch alle ihre Punkte P.*

Beweis: Aus der richtigen Reihe $\{\pi a\}\,\{aP\}\,a\,\{aP\}\,\{\pi a\}\,a$ folgert man nach Axiom VI $\{\pi\} + \{P\}$ oder $[\pi] + [P]$ oder $\langle\pi P\rangle$; nur die letzte Eventualität ist möglich.

Satz 54. $\{\pi x\} + \{\varrho x\} + \{\pi y\} + \{\varrho y\} \to xy$ oder $\pi\varrho$.

In Worten: *Zu zwei verschiedenen Ebenen gibt es höchstens eine Schnittgerade. Zu zwei verschiedenen Geraden gibt es höchstens eine Ebene, die beide Geraden enthält.*

---

[10]) Vgl. G. Thomsen, a. a. O., S. 706.

Beweis: Aus der richtigen Reihe $\{\pi x\}\{x \varrho\} y \{\varrho x\}\{x \pi\} y$ folgen die drei Eventualitäten:

$$\alpha)\ \{\pi x y\} + \{\varrho x y\};\quad \beta)\ [\pi x y] + [\varrho x y];\quad \gamma)\ \langle \pi \varrho\rangle.$$

Nehme ich an, $\{\pi x y\}$ sei richtig, so ergibt sich, da π mit x und y vertauschbar ist, $\langle x y\rangle$. Nach Satz 46 darf aber mit $\{\pi\langle x y\rangle\} + \{\pi x\} + \{\pi y\}$ nicht gleichzeitig $\langle x y\rangle y x$ gelten; letztere Reihe ist jedoch trivialerweise richtig, womit für α) ein Widerspruch hergeleitet ist. Aus β) folgert man zunächst $[\pi \varrho Z]$ und wegen $\{\pi x\} + \{\varrho x\}$ weiter $\pi = \varrho$. γ) liefert wegen $\{\pi x\} + \{\varrho x\}$ bzw. $\{\pi y\} + \{\varrho y\}$ die Reihen $\pi \varrho x$ bzw. $\pi \varrho y$, woraus sich $x = y$ ergibt.

Satz 55. $\{\pi PQ\} + PQbQPb \to [b \pi]$.

Beweis durch Anwendung von Axiom VI auf die Reihe

$$\pi\{\pi PQ\} b \{Q P \pi\} \pi b.$$

Satz 56. $\langle a d\rangle + \langle b d\rangle + \langle c d\rangle \to \langle a b c\rangle$.

In Worten: *Sind drei Geraden zu einer weiteren senkrecht, so bilden sie ein Büschel* im Sinne der Reihe 13 der Liste in § 1.

Beweis: Aus der richtigen Reihe

$$\langle a d\rangle\langle d b\rangle\langle c d\rangle c\langle b d\rangle\langle d a\rangle c\langle c d\rangle$$

entspringen nach Axiom VII die Möglichkeiten

$$\alpha)\ \langle a b\rangle;\quad \beta)\ \langle a b c\rangle;\quad \gamma)\ [a b Z];\quad \delta)\ [c d c Z].$$

Während δ) unzulässig ist, folgt aus α) und γ) das gewünschte $\langle a b c\rangle$, und zwar so:

Statt $\langle a b\rangle + \langle b d\rangle + \langle a d\rangle$ kann man nach einem früheren Satze $a b d$ schreiben. Setzt man jetzt $d = b a$ in $\langle c d\rangle$ ein, erhält man das Gewünschte. — Gilt γ) oder $a b Z Z'$, so kann man die Ausgangsreihe auch in der Form $Z' Z\langle c d\rangle c Z Z' c\langle c d\rangle$ schreiben. Nach Axiom III folgt dann $[c d c Z]$, was ein Widerspruch ist, oder aber $\langle c Z Z'\rangle$, welch letztere Reihe nach Einsetzen von $Z Z' = b a$ wieder $\langle a b c\rangle$ liefert.

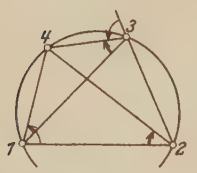


Fig. 10.

Zum Schluß beweise ich an dieser Stelle noch den Kreiswinkelsatz für Geraden einer Ebene:

Satz 57. $\langle g_{12} g_{13} g_{14}\rangle + \langle g_{12} g_{23} g_{24}\rangle + \langle g_{13} g_{23} g_{34}\rangle + \langle g_{14} g_{24} g_{34}\rangle + [g_{12} g_{14} g_{34} g_{23} Z] + \{g_{ik}\tau\} \to [g_{12} g_{24} g_{34} g_{13} Z]$ (Fig. 10).

Beweis: Setzt man $g_{ik}\tau = \pi_{ik}$, so kann man statt $g_{12} g_{13} g_{14} g_{12} g_{13} g_{14}$ auch

$$\{g_{12}\tau\}\{\tau g_{13}\}\{g_{14}\tau\}\{\tau g_{12}\}\{g_{13}\tau\}\{\tau g_{14}\}$$

oder $\pi_{12}\pi_{13}\pi_{14}\pi_{12}\pi_{13}\pi_{14}$ schreiben. $\pi_{12}\pi_{13}\pi_{14}$ ist also involutorisch; wäre es Punkt, so würde nacheinander folgen:

$$\langle\pi_{12}\pi_{13}\rangle + \langle\pi_{13}\pi_{14}\rangle + \langle\pi_{12}\pi_{14}\rangle$$

und

$$\langle\pi_{12}\tau\tau\pi_{13}\rangle + \langle\pi_{13}\tau\tau\pi_{14}\rangle + \langle\pi_{12}\tau\tau\pi_{14}\rangle$$

und

$$\langle g_{12}g_{13}\rangle + \langle g_{13}g_{14}\rangle + \langle g_{12}g_{14}\rangle$$

und schließlich

$$g_{12}g_{13}g_{14}.$$

Letztgenannte Reihe widerspricht der Voraussetzung, daß alle Geraden in derselben Ebene liegen sollen. Es ergeben sich also aus den g-Relationen die entsprechenden Relationen für die Ebenen π. Dann läßt sich aber Satz 43 anwenden und man erhält $[\pi_{12}\pi_{24}\pi_{34}\pi_{13}Z]$. Durch Einschalten von τ leitet man nun leicht die gesuchte Reihe $[g_{12}g_{24}g_{34}g_{13}Z]$ her.

Rückblick.

Im Vorangehenden habe ich zu zeigen versucht, wie sich unter Benutzung gewisser Axiome viele Sätze der räumlichen Elementargeometrie mit Hilfe der Spiegelungsrechnung beweisen lassen. Wesentlich ist, daß wir über die Existenz der geometrischen Grundgebilde weder Annahmen noch Aussagen machten. Alle bewiesenen Sätze ordnen sich dem Schema unter: Wenn gewisse Grundelemente gewissen Reihen genügen, folgt daraus das Bestehen weiterer Reihen. Das Offenbleiben der Existenzfrage hat zur Folge, daß bei Vorgabe konkreter Gruppen viele Sätze wie auch manche Axiome inhaltlos werden können. Die Ausführungen in § 7 zeigen weiter zur Genüge, wie schwierig es ist, mit wenig Axiomen eine große Anzahl weiterer Sätze zu gewinnen. Daß auch hierfür das Fehlen von Existenzaussagen ein Grund ist, erhellt schon daraus, daß wir zur Führung eines Beweises — abgesehen von Elementen, deren Existenz nach den Gruppengesetzen verbürgt ist, — keine neuen Hilfselemente einführen können, was ja in der Beweistechnik der elementaren Geometrie eine wichtige Rolle spielt.

Um deshalb den Aufbau der gewöhnlichen Elementargeometrie mit Hilfe der Spiegelungsrechnung durchführen zu können, wird man gewisse Existenzaxiome zu Hilfe nehmen müssen. Wiederum wird man bestrebt sein, mit möglichst wenigen solcher Axiome auszukommen. Hiervon soll der folgende Teil handeln.

Zweiter Teil.

In den weiteren Ausführungen soll versucht werden, den gesamten Bestand an elementargeometrischen Sätzen mit Hilfe der Spiegelungsrechnung zu gewinnen. Wir gehen dabei wieder von einer Gruppe aus, deren involutorische Elemente in drei fremde Klassen eingeteilt werden mögen, und definieren genau wie früher eine Geometrie durch Angabe von Bedingungen für Inzidenz, Orthogonalität usw. *Die Aufgabe besteht nun darin, die Gruppenwahl durch Zusatzforderungen so weit einzuschränken, daß schließlich eine Geometrie resultiert, die bis auf einen Isomorphismus mit der gewöhnlichen räumlichen Elementargeometrie identisch ist.* Das Ziel ist also, zu zeigen, daß unter Zugrundelegung des anzugebenden Axiomensystems die aus den involutorischen Elementen erzeugte Gruppe isomorph ist zur Gruppe, die sich aus den Punkt-, Geraden- und Ebenenspiegelungen in der analytischen Geometrie eines Körpers erzeugen läßt. Der Weg zerfällt in folgende Abschnitte:

Zunächst wird auf Grund der Axiome der Pascalsche Satz für zwei Geraden derselben Ebene bewiesen. Dieser Satz ermöglicht es sodann, zu der ursprünglichen Gruppe einen Körper hinzuzukonstruieren, wobei die nach Hilbert definierte Streckenaddition und Streckenmultiplikation als Verknüpfungen dienen. Schließlich wird der Nachweis erbracht, daß zwischen der ursprünglichen Gruppe und derjenigen der kongruenten Abbildungen in der analytischen Geometrie dieses Körpers ein Isomorphismus besteht.

§ 8.

Das Axiomensystem.

Das Axiomensystem, das der ganzen weiteren Untersuchung zugrunde gelegt werden soll, hat folgende Gestalt:

1. *Es gilt nie die Reihe PQR, jedoch immer $(PQR)^3$.*

2. a) *Es bestehen keine Reihen, die Punkte und Ebenen zusammen in ungerader Anzahl enthalten.*

b) *Für ein Punktepaar PQ und eine Gerade a gilt nie aPQ; für drei Punkte P, Q, R und eine Ebene π gilt nie πPQR.*

c) *Transformiert man einen Punkt oder eine Ebene mit einem Produkt involutorischer Elemente, so soll der transformierte Ausdruck wieder ein Punkt bzw. eine Ebene sein.*

3. a) $abPQbaQP \to [abZ]$ *oder* $\langle aPQ\rangle$.

b) $\pi\varrho PQ\varrho\pi QP \to [\pi\varrho Z]$ *oder* $\pi PQ\pi QP$

4. *Es gelten nie gleichzeitig die Reihen*

$$(a\,b)^2 + (b\,c)^2 + (c\,a)^2 + (a\,d)^2 + (b\,d)^2.$$

5. $\lambda\,\mu\,\nu\,P\,\nu\,\mu\,\lambda\,P \to \langle\lambda\,P\rangle + \langle\mu\,P\rangle + \langle\nu\,P\rangle$ *oder* $\{\lambda\,\mu\,\nu\}$.

6. $\pi\,\varrho\,a\,\varrho\,\pi\,a \to \{\varrho\,a\} + \{\pi\,a\}$ *oder* $[\varrho\,a] + [\pi\,a]$ *oder* $\langle\pi\,\varrho\rangle$.

7. $a\,b\,c\,d\,b\,a\,d\,c \to \langle a\,b\rangle + \langle c\,d\rangle$ *oder* $\langle a\,b\,c\rangle + \langle c\,d\,a\rangle$
oder $[a\,b\,Z]$ *oder* $[c\,d\,Z]$.

8. $\{P\,a\} + \{Q\,a\} + \langle P\,\pi\rangle + \langle Q\,\pi\rangle \to \{a\,\pi\}$.

9. *Zu zwei Punkten P und Q gibt es mindestens ein a mit* $\{P\,a\} + \{Q\,a\}$.

10. *Zu drei Punkten P, Q, R gibt es mindestens ein π mit* $\langle P\,\pi\rangle + \langle Q\,\pi\rangle + \langle R\,\pi\rangle$.

11. *Zu π und ϱ gibt es mindestens ein P mit* $\langle\pi\,P\rangle + \langle\varrho\,P\rangle$ *oder* $[\pi\,\varrho\,P]$.

12. *Zu π und ϱ gibt es mindestens ein σ mit* $\pi\,\sigma\,\varrho\,\sigma$.

13. *Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.*

14. *Es gibt mindestens vier Punkte, die nicht alle in einer Ebene und von denen nicht drei auf einer Geraden liegen.*

Da die Axiome 1 bis 7 mit den früheren Zusatzforderungen I bis VII übereinstimmen, so können alle Sätze, die oben mit Hilfe dieser Axiome hergeleitet wurden, an dieser Stelle als bereits bewiesen gelten.

§ 9.

Der Satz von Pascal.

Um die Richtigkeit des Pascalschen Satzes für die auf den angeführten 14 Axiomen beruhende Gruppengeometrie zu bestätigen, bedarf es zunächst des Beweises einiger vorbereitender Sätze:

Satz 1. *Es gibt zu zwei Punkten P und Q genau eine Verbindungsgerade a.*

Beweis mittels Axiom 9 und Satz 42 (§ 6).

Satz 2. *Zu drei verschiedenen Punkten P, Q, R, die nicht alle auf einer Geraden liegen, gibt es genau eine Ebene π, die sie enthält.*

Beweis: Zu P und Q gibt es nach Axiom 9 eine Gerade a mit $\{P\,a\} + \{Q\,a\}$, ebenso zu Q und R eine Gerade b mit $\{Q\,b\} + \{R\,b\}$. Es ist zu zeigen, daß zwei Ebenen π und ϱ, für die die Relationen $\langle P\,\pi\rangle + \langle Q\,\pi\rangle + \langle R\,\pi\rangle$ bzw. $\langle P\,\varrho\rangle + \langle Q\,\varrho\rangle + \langle R\,\varrho\rangle$ gelten, zusammenfallen. Aus $\langle P\,\pi\rangle + \langle Q\,\pi\rangle + \{P\,a\} + \{Q\,a\}$ folgt nach Axiom 8 $\{a\,\pi\}$, ebenso aus $\langle Q\,\pi\rangle + \langle R\,\pi\rangle + \{Q\,b\} + \{R\,b\}$ $\{b\,\pi\}$ und analog für ϱ $\{a\,\varrho\}$ und $\{b\,\varrho\}$. Indem man hierauf Satz 54 anwendet, erhält man $\pi\,\varrho$ oder $a\,b$, welch

letzteres jedoch einen Widerspruch gegen die Voraussetzung bedeutet, da nicht alle drei Punkte in gerader Linie liegen sollten.

Satz 3. *Zu zwei verschiedenen Punkten P und Q gibt es mindestens eine Ebene π, so daß $P\,\pi\,Q\,\pi$ gilt: Existenz der Mittellotebene.*

Beweis: Zu P und Q gibt es ein b mit $(P\,b)^2 + (Q\,b)^2$ und zu $\{P\,b\}$ und $\{Q\,b\}$ existiert eine Ebene π mit $\{P\,b\}\,\pi\,\{b\,Q\}\,\pi$ (Axiom 12). Ich will zeigen, daß π von verlangter Art ist: Zunächst folgt $b\,\pi\,b = P\,\pi\,Q$ und $\{P\,\pi\,Q\}$ und, da außerdem $P\,Q\,b\,Q\,P\,b$ gilt, nach Satz 55 $[\pi\,b]$. Wegen $b\,\pi\,b = P\,\pi\,Q$ ergibt sich dann das gewünschte $P\,\pi\,Q\,\pi$.

Satz 4. $[\pi\,\varrho\,\pi\,\varrho\,Z] + \overline{[\pi\,\varrho\,Z]} \to \langle\pi\,\varrho\rangle$.

Beweis: Nach Axiom 11 gibt es zu den Ebenen π und ϱ einen Punkt P mit $\langle\pi\,P\rangle + \langle\varrho\,P\rangle$ oder $[\pi\,\varrho\,P]$. Da das letzte der Voraussetzung widerspricht, erfüllt P die Bedingungen $\langle\pi\,P\rangle + \langle\varrho\,P\rangle$. Dann ergibt sich aus $(\pi\,\varrho\,\pi\,\varrho\,P)^2$ die Reihe $(\pi\,\varrho)^4$ und weiter $\langle\pi\,\varrho\rangle$, da $\langle(\pi\,\varrho)^2\rangle$ in $[(\pi\,\varrho)^2\,Z]$ einen Widerspruch herbeiführt.

Satz 5. *Zu einer Ebene π und einem nicht in ihr gelegenen Punkt P gibt es eine und nur eine Ebene ϱ, die zu π parallel ist und P enthält.*

Beweis: Zu den Ebenen π und $\{P\,\pi\,P\}$ gibt es eine winkelhalbierende Ebene ϱ mit $\pi\,\varrho\,P\,\pi\,P\,\varrho$. Ich will zeigen, daß ϱ die gestellten Forderungen $[\pi\,\varrho\,Z]$ und $\langle\varrho\,P\rangle$ erfüllt: Aus der richtigen Relation $\big[P\,[\pi\,P\,\pi]\,Z\big]$ folgt $[\{P\,\pi\,P\}\,\pi\,Z]$ und wegen $P\,\pi\,P = \varrho\,\pi\,\varrho$ weiter $[\varrho\,\pi\,\varrho\,\pi\,Z]$. Nähme ich jetzt an, daß $[\pi\,\varrho\,Z]$ falsch wäre, so würde nach Satz 4 $\langle\pi\,\varrho\rangle$ folgen, was mit $\pi\,\varrho\,P\,\pi\,P\,\varrho$ zu dem ausgeschlossenen Fall $\langle P\,\pi\rangle$ hinführt. Also gilt wirklich $[\pi\,\varrho\,Z]$. Daß auch $\langle P\,\varrho\rangle$ erfüllt ist, ergibt sich bei Zusammenstellung der Reihen $\pi\,\varrho\,P\,\pi\,\varrho\,P$ und $\pi\,\varrho\,P\,\pi\,P\,\varrho$. Die behauptete Einzigkeit folgt dann aus Satz 32.

Satz 6. *Ein Punkt P und eine Gerade a, die nicht durch P hindurchgeht, bestimmen genau eine Ebene π, die beide enthält.*

Beweis: Zu jedem Punktepaar der Geraden und dem Punkte P gibt es eine Ebene, die P und mit den beiden anderen Punkten auch die Gerade enthält. Es ist nur zu zeigen, daß verschiedene Punktepaare dieselbe Ebene bestimmen: Q, R und P mögen π, S, T und P mögen ϱ bestimmen. Da Q und R auf der Verbindungsgeraden $\overline{S\,T}$ liegen, so liegen sie nach Satz 53 auch auf ϱ. Wegen der Einzigkeit der Ebene durch die drei Punkte P, Q, R folgt dann $\pi = \varrho$.

Satz 7. *Sind eine Gerade a und ein Punkt P außerhalb derselben gegeben, so gibt es zu a genau eine Parallele durch P; dieselbe liegt in der durch a und P bestimmten Ebene.*

Beweis mit Hilfe von Satz 5.

Satz 8. *Zwei Geraden a und b derselben Ebene π haben entweder genau einen Schnittpunkt P gemeinsam oder sind zueinander parallel. Der Schnittpunkt liegt ebenfalls in π.*

Beweis: Zu den Ebenen $\{a\,\pi\}$ und $\{b\,\pi\}$ gibt es nach Axiom 11 mindestens ein P mit $\langle P\{a\,\pi\}\rangle + \langle P\{b\,\pi\}\rangle$ oder $[\{a\,\pi\}\{\pi\,b\}P]$. Der letzte Fall liefert die zweite Eventualität des Satzes. Um den ersten weiter auszuführen, stellen wir zunächst fest, daß die vorhandene Verbindungsgerade c der Punkte P und $\pi P \pi$ auf π als ihrer Mittellotebene senkrecht steht: $[c\,\pi]$. Es läßt sich nun zeigen, daß $[c\,\pi]$ der gesuchte Schnittpunkt ist, der also die Bedingungen $\langle[c\,\pi]\,\pi\rangle + \{[c\,\pi]\,a\} + \{[c\,\pi]\,b\}$ erfüllt: Da nämlich P und $[\pi P \pi]$ in der Ebene $\{a\,\pi\}$ liegen, so liegt auch c darin; d. h. es gilt $\{c\{\pi\,a\}\}$ oder $\{[c\,\pi]\,a\}$; ebenso erschließt man $\{[c\,\pi]\,b\}$, während $\langle[c\,\pi]\,\pi\rangle$ evident ist. Daß es höchstens einen Schnittpunkt geben kann, wurde bereits in § 6 (Satz 42) bewiesen.

Satz 9. $[a\,d\,a\,d\,Z] + \overline{[a\,d\,Z]} + [b\,d\,b\,d\,Z] + \overline{[b\,d\,Z]} + [c\,d\,c\,d\,Z] + \overline{[c\,d\,Z]} \to [(a\,b\,c)^2\,Z] + \overline{[a\,b\,c\,Z]}$.

Beweis: Auf d gibt es sicher einen Punkt P; durch ihn konstruiere ich zu a, b und c die zugehörigen Parallelen a^*, b^* und c^*. Aus $[Z\,a^*\,a] + [a\,d\,a\,d\,Z]$ folgert man leicht $[a^*\,d\,a^*\,d\,Z]$ oder $(a^*\,d\,a^*\,d\,P)^2$ und, da P mit a^* und d vertauschbar ist, $(a^*\,d)^4$, woraus sich in gewohnter Weise $\langle a^*\,d\rangle$ oder gar $a^*\,d$ ergibt. Der letzte Fall führt zurück zu $[a\,d\,Z]$ und widerspricht der Voraussetzung. Auf $\langle a^*\,d\rangle$ und die sich auf ähnliche Weise ergebenden Reihen $\langle b^*\,d\rangle$ und $\langle c^*\,d\rangle$ wende ich Satz 56 (§ 7) an und erhalte $\langle a^*\,b^*\,c^*\rangle$ oder auch $[(a^*\,b^*\,c^*)^2\,Z]$. Hieraus läßt sich rückwärts die gewünschte Reihe $[(a\,b\,c)^2\,Z]$ leicht gewinnen, wenn man nur die Parallelitätsbeziehungen beachtet. — Würde $[a\,b\,c\,Z]$ richtig sein, so würde das zunächst die Reihe $a^*\,b^*\,c^*$ zur Folge haben; diese kann jedoch nach Axiom 4 mit $\langle a^*\,d\rangle + \langle b^*\,d\rangle + \langle c^*\,d\rangle$ nicht zusammen bestehen.

Satz 10. $\{a\,\pi\} + \{b\,\pi\} + \{c\,\pi\} \to [(a\,b\,c)^2\,Z] + \overline{[a\,b\,c\,Z]}$.

Beweis: In π gibt es sicher einen Punkt P mit $\langle P\,\pi\rangle$. Aus $[a\,\pi\,P\,\pi\,a]$ leitet man mittels der Reihe $a\,\pi\,a\,\pi$ leicht $[a\langle\pi\,P\rangle\,a\langle\pi\,P\rangle Z]$ her; auch gilt $\overline{[a\langle\pi\,P\rangle Z]}$, weil sich sonst der Widerspruch $[a\,\pi]$ einstellen würde. Da entsprechende Reihen für b und c gelten, ergibt sich die Behauptung, wenn man den vorigen Satz anwendet.

Satz 11. *Sind π und ϱ zwei nicht parallele Ebenen und ist σ eine weitere Ebene, die zu den ersten beiden prismatisch liegt, so gibt es mindestens eine Ebene τ, die mit σ denselben Winkel einschließt wie π mit ϱ. Jede zu τ parallele Ebene leistet dasselbe.*

In Reihen geschrieben: Zu π, ϱ und σ mit $[(\pi\,\varrho\,\sigma)^2\,Z] + \overline{[\pi\,\varrho\,\sigma]}$ gibt es ein τ mit $[\pi\,\varrho\,\sigma\,\tau\,Z]$.

Beweis: Da π und ϱ nicht parallel sein sollen, existiert ein P mit $\langle \pi P \rangle + \langle \varrho P \rangle$. Nach Satz 5 kann man nun die Ebene σ^* konstruieren, die zu σ parallel ist und durch P hindurchgeht. Für σ^* gilt dann die entsprechende Reihe $[(\pi \varrho \sigma^*)^2 Z] + \overline{[\pi \varrho \sigma^*]}$. Beachtet man jetzt, daß $\langle \pi P \rangle + \langle \varrho P \rangle + \langle \sigma^* P \rangle$ gilt, so folgt in bekannter Weise $\{\pi \varrho \sigma^*\}$. Die Ebene $\{\pi \varrho \sigma^*\}$ leistet nun das Verlangte: Aus $[(\pi \varrho \sigma)^2 Z] + [\sigma \sigma^* Z]$ folgt $[\pi \varrho \sigma \pi \varrho \sigma^* Z]$ oder $[\pi \varrho \sigma \{\pi \varrho \sigma^*\} Z]$, was zu beweisen war.

Satz 12. *Sind in einer Ebene π zwei nicht parallele Geraden a und b und eine weitere Gerade c gegeben, so gibt es in derselben Ebene mindestens eine vierte Gerade d, die mit c denselben Winkel bildet wie a mit b. Jede zu d parallele Gerade hat dieselbe Eigenschaft wie d.*

Beweis: Nach Satz 10 folgert man $[(abc)^2 Z] + \overline{[abcZ]}$; dann gilt auch $[\{a\pi\}\{\pi b\}\{c\pi\}\{\pi a\}\{b\pi\}\{\pi c\} Z]$. Nehme ich nun an, $[\{a\pi\}\{\pi b\}\{c\pi\}]$ oder $[abc\pi]$ sei richtig, so ergibt sich daraus $\big[[abc\pi][c\pi ab]Z\big]$ oder $[ababZ]$ oder, da a und b einen Schnittpunkt gemeinsam haben, $\langle ab \rangle$. Auf entsprechende Weise erhält man $\langle bc \rangle$ und $\langle ca \rangle$. Es folgt also abc, was nach Satz 46 (§ 7) mit $\{a\pi\} + \{b\pi\} + \{c\pi\}$ unverträglich ist. Nachdem so $\overline{[abc\pi]}$ gezeigt ist, kann der vorangehende Satz zur Anwendung kommen, durch den die Existenz einer Ebene τ mit $[\{a\pi\}\{\pi b\}\{c\pi\}\tau Z]$ oder $[abc\pi\tau Z]$ verbürgt wird. Ich behaupte nun, daß $\langle \pi\tau \rangle$ gilt und $\langle \pi\tau \rangle = d$ die gesuchte Gerade darstellt. Das folgt so: Aus der richtigen Reihe $\big[[\pi\tau Zabc]Z[abc\pi\tau Z]\big]$ entspringt wegen $[abcZabc]$ die Reihe $[\pi\tau\pi\tau Z]$. Da gleichzeitig $[\pi\tau Z]$ falsch sein muß, so folgt nach Satz 4 $\langle \pi\tau \rangle$, und $\langle \pi\tau \rangle = d$ erfüllt ersichtlich die Forderungen $[abcdZ]$ und $\{d\pi\}$.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nunmehr imstande, den *Satz von Pascal* für zwei in derselben Ebene liegende Geraden zu beweisen: Er lautet bekanntlich:

Satz 13. *Liegen die Punkte A, B, C auf der Geraden a und A', B', C' auf der mit a in derselben Ebene gelegenen Geraden b, wobei keiner der Punkte mit dem etwa vorhandenen Schnittpunkt beider Geraden zusammenfallen möge, und ist weiter AC' parallel CA' und CB' parallel BC', so ist auch AB' parallel BA'.*

Was den Beweis dieses Satzes angeht, so sind, wie man vermöge der vorangehenden Sätze leicht nachprüft, alle Hilfskonstruktionen und Beweisschritte, wie sie von Hilbert zum Beweis des Pascalschen Satzes benötigt werden[11]), eindeutig auch in unserer Gruppengeometrie ausführbar. Deshalb kann hiermit der Satz von Pascal für die Gruppengeometrie als gültig angesehen werden.

[11]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie (7. Aufl., Leipzig u. Berlin 1930), S. 58—59.

§ 10.

Konstruktion eines Körpers auf Grund bisher bewiesener gruppengeometrischer Sätze.

Nachdem wir uns in den obigen Sätzen das nötige Material verschafft haben, das einzig und allein aus den 14 vorangestellten Axiomen gewonnen wurde, wollen wir jetzt den zweiten Schritt tun und — wie oben geplant — zu unserer Gruppe einen Körper hinzukonstruieren.

In der Geometrie der zugrunde gelegten Gruppe gibt es, wie man unschwer erkennt, ein rechtwinkliges Dreibein, gebildet von drei Geraden x, y, z. Dieses wird in den folgenden Untersuchungen das Koordinatensystem für eine zu erklärende analytische Geometrie abgeben, jedoch kümmern wir uns vorläufig nur um zwei der Geraden, etwa x und y. Nach früheren Sätzen steht fest, daß für sie $\langle x\, y\rangle$ gilt, und es läßt sich zeigen, daß sie einen Schnittpunkt O haben und daß es eine Ebene ζ gibt, die sie enthält. Von den beiden Geraden x und y fassen wir insbesondere x ins Auge und betrachten die Menge aller Punkte, die auf x liegen und deren Anzahl von vornherein $\geqq 2$ ist. Für die Elemente der Menge definieren wir die beiden folgenden Verknüpfungen[12]):

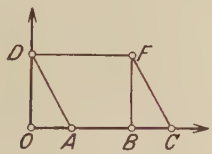


Fig. 11.

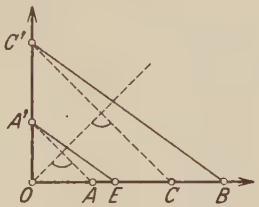


Fig. 12.

Addition: *Als Summe zweier gegebener Punkte A und B bezeichnen wir den Punkt C, der durch das in Fig. 11 dargestellte und in der Gruppengeometrie eindeutig ausführbare Konstruktionsverfahren entsteht.*

Multiplikation: *Aus der Menge der Punkte auf x wähle man einen von O verschiedenen Punkt E aus und halte ihn als Einheitspunkt für alle Rechnungen und Konstruktionen fest. Als Produkt zweier Punkte A und B bezeichnen wir den Punkt C, der nach Maßgabe der Fig. 12 gefunden wird*[13]).

Da diese Verknüpfungen formal vollkommen mit der Hilbertschen Streckenaddition und Streckenmultiplikation übereinstimmen, so gelten

[12]) Vgl. D. Hilbert, a. a. O., S. 60 ff.

[13]) Man benötigt hierbei u. a. die Sätze von der Existenz der Winkelhalbierenden sowie des Lotes auf eine Gerade. Diese Sätze leitet man jedoch unschwer aus den Axiomen und bereits bekannten Sätzen her.

hier dieselben Regeln wie dort, einschließlich des kommutativen Gesetzes der Multiplikation, da uns der zu dessen Bestätigung notwendige Satz von Pascal ja zur Verfügung steht.

Wir stellen deshalb fest:

Die betrachteten Punkte der Geraden x bilden bezüglich der eingeführten Operationen einen Körper.

§ 11.

Einführung einer Körpergeometrie und ihr Verhältnis zur Gruppengeometrie.

In dem zur Gruppe soeben hinzukonstruierten Körper erklären wir eine neue Geometrie. Wir definieren:

1. Ein Tripel von Körperzahlen $[X, Y, Z]$ heiße *Punkt.*

2. Ein Quadrupel von Körperzahlen $\{A, B, C, D\}$, in dem nicht A, B, C gleichzeitig O sind, heiße *Ebene.* $\{A, B, C, D\}$ und $\{TA, TB, TC, TD\}$ sollen als dieselbe Ebene betrachtet werden.

3. Ein Aggregat von acht Körperzahlen $\langle A, B, C, D; A', B', C', D'\rangle$, für die nicht die Gleichung $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ besteht, heiße *Gerade.* $\langle A, B, C, D; A', B', C', D'\rangle$ und $\langle TA + T'A', TB + T'B', TC + T'C', TD + T'D'; SA + S'A', SB + S'B', SC + S'C', SD + S'D'\rangle$ sollen dieselbe Gerade darstellen.

Die elementaren Lagebeziehungen erklären wir auf folgende Weise:

Wir wollen sagen, der Punkt $[X, Y, Z]$ liege in der Ebene $\{A, B, C, D\}$, wenn im Sinne der Körperrechnung die lineare Gleichung $AX + BY + CZ + D = O$ erfüllt ist; er liege auf der Geraden $\langle A, B, C, D; A', B', C', D'\rangle$, wenn er gleichzeitig auf den Ebenen $\{A, B, C, D\}$ und $\{A', B', C', D'\}$ gelegen ist. Zwei Ebenen heißen senkrecht, wenn $AA' + BB' + CC' = O$ gilt, und wir nennen schließlich zwei Ebenen oder zwei Geraden parallel, wenn sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Es soll jetzt untersucht werden, in welcher Beziehung die neu konstruierte Körpergeometrie zur Gruppengeometrie steht. Zu dem Zweck ordnen wir in bestimmter Weise jedem Grundelement der einen ein solches der anderen Geometrie zu und sehen nach, ob die Lagebeziehungen wie Inzidenz, Orthogonalität und Parallelismus sich in beiden Geometrien entsprechen.

Als Zuordnungsverfahren sei folgendes gewählt:

Dem Punkte $[X, Y, Z]$ der Körpergeometrie wird umkehrbar eindeutig derjenige gruppengeometrische Punkt P zugewiesen, der entsteht,

wenn man durch X, Y_y und Z_z[14]) in üblicher Weise zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen legt.

Zwecks Zuordnung einer gruppengeometrischen zu einer körpergeometrischen Ebene $\{A, B, C, D\}$ konstruiere man zunächst die Punkte $\left[-\frac{D}{A}\right]$, $\left[-\frac{D}{B}\right]$, $\left[-\frac{D}{C}\right]$. Dann bestimmen $\left[-\frac{D}{B}\right]_y$ und $\left[-\frac{D}{C}\right]_z$ sowie $\left[-\frac{D}{A}\right]$ genau eine Ebene; sie soll der Körperebene entsprechen. Für den Fall, daß A oder B oder C oder zwei der Punkte gleichzeitig O sind, werde die zuzuordnende Ebene dadurch bestimmt, daß sie zu der betreffenden Achse bzw. zweien von ihnen parallel läuft.

Was die Geraden angeht, so soll dem Gebilde $\langle A, B, C, D; A', B', C', D'\rangle$ die gruppengeometrische Schnittgerade der beiden Ebenen $\{A, B, C, D\}$ und $\{A' B', C', D'\}$ zugeordnet werden.

Nunmehr kommen wir zum Nachweis der Isomorphie beider Geometrien hinsichtlich Inzidenz und Orthogonalität. Für die Parallelität zweier Ebenen $\{A, B, C, D\}$ und $\{A', B', C', D'\}$ und zweier Geraden $\langle A, B, C, D; A', B', C', D'\rangle$ und $\langle \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}; \bar{A}', \bar{B}', \bar{C}', \bar{D}'\rangle$ ist die Analogie bereits durch Definition gegeben; es gelten hier die Bedingungsgleichungen

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

bzw.

$$(C B' - B C') : (A C' - C A') = (\bar{C}\,\bar{B}' - \bar{B}\,\bar{C}') : (\bar{A}\,\bar{C}' - \bar{C}\,\bar{A}').$$

Betrachten wir zunächst nur die Koordinatenebene ζ, so können wir in ihr alle Punkte kürzer durch $[X, Y]$, alle Geraden durch $\langle A, B, D\rangle$ darstellen. Als Inzidenzbedingung hat dann die Gleichung $AX + BY + D = O$ zu gelten.

Zwischen den Geometrien der ζ-Ebene bestehen nun folgende Beziehungen:

Satz 1. *Gilt im Sinne der Gruppengeometrie $\{a P\}$, so besteht in der Körpergeometrie für die zugeordneten Elemente $\langle A, B, D\rangle$ und $[X, Y]$ die Gleichung $AX + BY + D = O$ und umgekehrt*[15]).

Satz 2. *Sind im Sinne der Gruppengeometrie zwei Geraden a, a' der ζ-Ebene aufeinander senkrecht, so besteht zwischen den zugeordneten Körpergeraden $\langle A, B, D\rangle$ und $\langle A', B', D'\rangle$ die Gleichung $AA' + BB' = O$ und umgekehrt.*

---

[14]) Der Index zeigt an, daß nicht der Körperpunkt selbst, sondern der durch dessen Übertragung auf die angemerkte Achse entstehende Punkt gemeint ist.

[15]) Zum Beweis vgl. D. Hilbert, a. a. O., S. 97.

Beweis: Den gegebenen Geraden a, a' mit $\langle a\,a'\rangle$ entsprechen die Körpergeraden $\langle A, B, [-A\,B]\rangle$ und $\langle A', B', [-A'\,B']\rangle$ (Fig. 13). Da nach Konstruktion $A_y F \perp w$ und $B[-B]_y \parallel w$, so ist $A_y F \perp B[-B]_y$; außerdem ist $BO \perp A_y O$. $A_y F$ und BO sind also Höhen im Dreieck $A_y B[-B]_y$. Die Gerade $[-B]_y G$ enthält nun einerseits den dritten Eckpunkt $[-B]_y$, andererseits den Schnittpunkt A der beiden erwähnten Höhen, ist also nach dem Höhensatz[16]) selbst Höhe, d. h. $[-B]_y G \perp A_y B$. Nach Voraussetzung ist weiter $A_y B \perp A_y' B'$, mithin $[-B]_y G \parallel A_y' B'$. Letztere beiden Geraden werden aber dargestellt durch $\langle B, [-A], [-A\,B]\rangle$ bzw. $\langle A', B', [-A'\,B']\rangle$ und deren Parallelität zum Ausdruck gebracht durch die Gleichung $B\,B' - [-A]\,A' = O$. Das ist aber die gesuchte Gleichung $A\,A' + B\,B' = O$.

Bevor wir jetzt die ebene Geometrie verlassen, sei noch bemerkt, daß für die η-Ebene und ξ-Ebene eine analoge analytische Geometrie entwickelt werden kann.

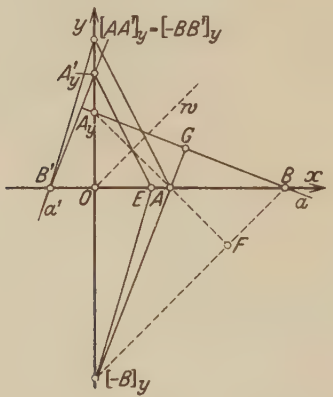


Fig. 13.

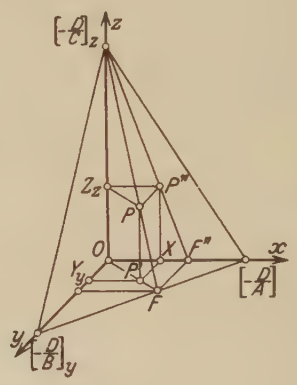


Fig. 14.

Es folgen einige Sätze der räumlichen Geometrie:

Satz 3. *Liegt ein Punkt P in gruppengeometrischem Sinne in einer Ebene π, so besteht für die zugeordneten Körpergebilde $[X, Y, Z]$ und $\{A, B, C, D\}$ die lineare Gleichung $AX + BY + CZ + D = O$ und umgekehrt.*

Beweis: Der in Fig. 14 gezeichneten Ebene sind die Körperzahlen $\{A, B, C, D\}$ zugeordnet, dem in ihr liegenden Punkt P das Tripel $[X, Y, Z]$. Wir konstruieren in aus der Figur ersichtlicher Weise die Punkte F, F'' und P'' und rechnen analytisch wie folgt:

[16]) Zum Beweis dieses Satzes geht man auf Satz 49 (§ 7) zurück.

F liegt gleichzeitig auf den Geraden OP' und $\left[-\frac{D}{A}\right]\left[-\frac{D}{B}\right]_y$; diese haben, da alles in ζ liegt, die Gleichungen $X - \frac{X_P}{Y_P} Y = O$ und $AX + BY + D = O$; beide soll F befriedigen, woraus man leicht

$$F'' = \left[-\frac{DX_P}{AX_P + BY_P}\right]$$

berechnet.

P'' mit den Koordinaten X_P, Z_P liegt, wie man durch Gruppenrechnung bestätigt, auf der Geraden $F''\left[-\frac{D}{C}\right]_z$, welch letzterer also die Gleichung $X \cdot \frac{AX_P + BY_P}{X_P} + Z \cdot C + D = O$ zukommt. Für P'' und damit für P gilt mithin die Gleichung $AX_P + BY_P + CZ_P + D = O$ oder allgemein $AX + BY + CZ + D = O$.

Satz 4. *Steht eine Gerade a auf einer Ebene π senkrecht* ($[a\,\pi]$), *so besteht zwischen den zugeordneten Körperzahlen* $\langle A, B, C, D;\ A', B', C', D'\rangle$ *und* $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}\}$ *die Gleichung*

$$\widetilde{A} : \widetilde{B} : \widetilde{C} = (BC' - CB') : (CA' - AC') : (AB' - BA')$$

und umgekehrt.

Beweis: Setzt man $Z = T$, so kann man die gegebene Gerade auch in der Parameterform

$$\begin{cases} X = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'} T + \frac{D'B - B'D}{AB' - BA'}, \\ Y = -\frac{AC' - CA'}{AB' - BA'} T - \frac{D'A - A'D}{AB' - BA'}, \\ Z = T \end{cases}$$

darstellen.

Projiziert man nun a senkrecht auf die ζ-Ebene, so erhält man für die Projektion — indem man Z außer acht läßt und T eliminiert — $(AC' - CA')X + (BC' - CB')Y + (DC' - CD') = O$. Ferner hat die Grundrißspur der Ebene π in ζ die Gleichung $\widetilde{A}X + \widetilde{B}Y + \widetilde{D} = O$. Durch Gruppenrechnung kann man nun zeigen, daß Projektion und Spur zueinander orthogonal sind; deshalb gilt

$$\widetilde{A}(AC' - CA') + \widetilde{B}(BC' - CB') = O.$$

Analog findet man als Gleichungen von Projektion und Spur in der η-Ebene

$$(AB' - BA')X - (BC' - CB')Z + (DB' - BD') = O;$$
$$\widetilde{A}X + \widetilde{C}Z + \widetilde{D} = O$$

und als entsprechende Orthogonalitätsbedingung

$$\widetilde{A}(AB' - BA') - \widetilde{C}(BC' - CB') = O.$$

Nunmehr erkennt man die Richtigkeit der gesuchten Proportion

$$\widetilde{A} : \widetilde{B} : \widetilde{C} = (BC' - CB') : (CA' - AC') : (AB' - BA').$$

Ist umgekehrt die Verhältnisgleichung gegeben, so kann man daraus ablesen, daß die Spuren der Ebene in ζ und η zu den Projektionen der Geraden, deren Orthogonalität bezüglich der Ebene erwiesen werden soll, senkrecht stehen. Da mit den Projektionen auch die projizierenden Ebenen σ bzw. τ auf den Spuren senkrecht stehen, folgert man $\langle\sigma\pi\rangle + \langle\tau\pi\rangle$. Beachtet man dazu die Reihen $\{a\sigma\}$ und $\{a\tau\}$, so kann man daraus wiederum durch Gruppenrechnung $[a\pi]$ herleiten.

Satz 5. *Sind zwei Ebenen π und ϱ gruppengeometrisch orthogonal, so sind die zugeordneten Ebenen $\{A, B, C, D\}$ und $\{A', B', C', D'\}$ im Sinne der Körpergeometrie ebenfalls zueinander senkrecht, d. h. es gilt $AA' + BB' + CC' = O$ und umgekehrt.*

Beweis: Man fälle von einem beliebigen Punkte in ϱ auf π das Lot. Dieses können wir uns in der Körpergeometrie durch die Ebene $\{A', B', C', D'\}$ und eine beliebige weitere Ebene $\{A'', B'', C'', D''\}$, die nur das Lot enthalten muß, dargestellt denken. Es liegt dann der Sachverhalt des Satzes 4 vor, wonach

$$A : B : C = (B'C' - B'C'') : (A'C'' - A''C') : (A''B' - A'B'')$$

gefolgert werden kann. Um jetzt

$$AA' + BB' + CC' = O \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B}A' + B' + \frac{C}{B}C' = O$$

nachzuweisen, setzt man

$$\frac{A}{B} = \frac{B''C' - B'C''}{A'C'' - A''C'} \quad \text{und} \quad \frac{C}{B} = \frac{A''B' - A'B''}{A'C'' - A''C'}$$

ein, wobei O herauskommt.

Auch in diesem Falle ist der Beweis umkehrbar.

Die Sätze 1 bis 5 lehren uns, daß gewisse Beziehungen der Lage wie Inzidenz, Parallelität und Orthogonalität sich in beiden Geometrien entsprechen. Diese Sätze reichen nun hin, in beiden Geometrien Punkt-, Ebenen- und Geradenspiegelungen zu erklären. Damit kommen wir zum letzten Abschnitt des vorgezeichneten Weges.

§ 12.

Einführung von Spiegelungen und Nachweis, daß die aus ihnen erzeugte Gruppe zu der ursprünglichen isomorph ist.

Unter Spiegelung an einem Punkte $Q \sim [Q_1, Q_2, Q_3]$ verstehen wir auf Seiten der Gruppengeometrie diejenige Abbildung $\mathfrak{S}_Q$ aller Punkte P $P^* = \mathfrak{S}_Q(P)$, die auf folgende Weise zustandekommt:

Man verbinde P mit Q (vgl. Fig. 15), ziehe durch P eine von $\overline{PQ}$ verschiedene Gerade und nehme auf dieser einen von P verschiedenen Punkt R an. Dann ziehe man durch Q zu $\overline{PR}$ und durch R zu $\overline{PQ}$ Parallelen, die sich in S schneiden. Durch S lege man die Parallele zu $\overline{RQ}$; sie trifft die Verlängerung von $\overline{PQ}$ in dem Punkte P^*. Letzterer soll das Bild von P sein. P^* ist unabhängig von der Wahl obiger Geraden $\overline{PR}$ und des Punktes R auf ihr.

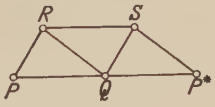


Fig. 15.

Auf Seiten der Körpergeometrie wird durch Übertragung des Konstruktionsverfahrens eine Punktspiegelung

$$\mathfrak{T}_Q : \begin{cases} X^* = \mathfrak{T}_{1,Q}(X, Y, Z), \\ Y^* = \mathfrak{T}_{2,Q}(X, Y, Z), \\ Z^* = \mathfrak{T}_{3,Q}(X, Y, Z) \end{cases}$$

induziert.

$\mathfrak{S}_Q$ ist nun, wie man sich leicht durch Gruppenrechnung überzeugt, identisch mit der Abbildung

$$P^* = Q\,P\,Q,$$

während man in der Körpergeometrie durch Rechnung oder Berufung auf die gewöhnliche euklidische analytische Geometrie findet, daß $\mathfrak{T}_Q$ durch

$$\begin{cases} X^* = 2Q_1 - X, \\ Y^* = 2Q_2 - Y, \\ Z^* = 2Q_3 - Z \end{cases}$$

dargestellt wird, wobei Q_1, Q_2, Q_3 die Koordinaten des Punktes Q sind.

Als Ebenenspiegelung $\mathfrak{S}_\varepsilon$ der Gruppengeometrie erklären wir diejenige Abbildung $P^* = \mathfrak{S}_\varepsilon(P)$, die erhalten wird, wenn man von P auf ε das Lot fällt und P in der eben beschriebenen Art an dem Fußpunkt desselben spiegelt.

Durch Gruppenrechnung ergibt sich wiederum, daß $\mathfrak{S}_\varepsilon$ mit der Abbildung

$$P^* = \varepsilon\,P\,\varepsilon$$

identisch ist. Auf Seiten der Körpergeometrie erhält man durch Übertragung des Konstruktionsverfahrens als Ebenenspiegelung die aus der gewöhnlichen Geometrie bekannte Abbildung

$$\mathfrak{T}_\varepsilon : \begin{cases} X^* = X - 2A\,\dfrac{AX + BY + CZ + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ Y^* = Y - 2B\,\dfrac{AX + BY + CZ + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ Z^* = Z - 2C\,\dfrac{AX + BY + CZ + D}{A^2 + B^2 + C^2}, \end{cases}$$

wobei $\{A, B, C, D\}$ die Ebene ε darstellt.

In analoger Weise wird schließlich eine Geradenspiegelung erklärt, die in der Gruppengeometrie durch $P^* = aPa$, in der Körpergeometrie durch eine Abbildung $\mathfrak{T}_a$ dargestellt wird, die wiederum dieselbe Gestalt haben muß wie in der gewöhnlichen Geometrie.

Wegen der formalen Übereinstimmung der Abbildungen $\mathfrak{T}_P$, $\mathfrak{T}_\varepsilon$, $\mathfrak{T}_a$ mit den Spiegelungen der euklidischen analytischen Geometrie ist sofort klar, daß sie involutorisch sind.

Ordnet man nun den Abbildungen $\mathfrak{S}_P$, $\mathfrak{S}_\varepsilon$, $\mathfrak{S}_a$ die Erzeugenden der ursprünglichen Gruppe P, ε, a zu, so hat man insgesamt eine Zuordnung zwischen den letzteren und den Abbildungen $\mathfrak{T}_P$, $\mathfrak{T}_\varepsilon$, $\mathfrak{T}_a$ in der analytischen Geometrie des Körpers erreicht. Diese Zuordnung ist aber sogar *isomorph*; denn dem Produkt zweier Gruppenelemente, die sich ja durch die Erzeugenden darstellen lassen und denen infolgedessen die Produkte der zugehörigen $\mathfrak{T}$ entsprechen, ist wieder das Produkt der beiden $\mathfrak{T}$-Ausdrücke zugeordnet.

Damit sind wir am Ziel. Wir haben gefunden, daß jede aus den involutorischen Elementen P_i, ε_i, a_i erzeugte Gruppe, die die vorangestellten Axiome 1 – 14 erfüllt, der aus den Punkt-, Ebenen- und Geradenspiegelungen der analytischen Geometrie eines Körpers erzeugten Gruppe isomorph ist. In einer solchen Gruppengeometrie läßt sich also für jeden elementargeometrischen Satz der gewöhnlichen euklidischen Geometrie der Beweis seiner Gültigkeit erbringen.

(Eingegangen am 5. Juli 1932.)

Über eine Art der Punktkonnexion.

Von

V. Hlavatý in Prag.

In seiner Arbeit „Kovariante Ableitung und die Cesàroschen Unbeweglichkeitsbedingungen" [Math. Zeitschr. 36 (1932), S. 104—109] hat Herr A. Wundheiler die Darbouxsche Methode des „trièdre mobile" (und die damit zusammenhängenden Methoden) in den absoluten Differentialkalkül eingereiht. Wir wollen hier diese Einreihung studieren. Es wird sich zeigen, daß die oben erwähnte Möglichkeit ein Spezialfall einer allgemeinen Konnexion ist.

1. Wir beziehen unseren n-dimensionalen Raum X_n auf die $n+1$ überzähligen unabhängigen Koordinaten $x^0, \ldots, x^n$ und legen unseren Betrachtungen die Gruppe von (analytischen und umkehrbaren) Transformationen

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^0, \ldots, x^n), \qquad \bar{x}^0 = x^0 \text{ [1]} \tag{1, 1}$$

zugrunde. Setzt man

$$P^A_A = \frac{\partial \bar{x}^A}{\partial x^A}, \qquad Q^A_A = \frac{\partial x^A}{\partial \bar{x}^A},$$

so ist

$$\begin{aligned} P^0_i &= Q^0_i = 0, \\ P^0_0 &= Q^0_0 = 1. \end{aligned} \tag{1, 2}$$

Unter einem kontravarianten bzw. kovarianten Punkte verstehen wir das *Verhältnis* von $n+1$ Bestimmungszahlen v^A bzw. w_A, welche sich bei (1,1) nach

$$\bar{v}^A = P^A_A v^A, \qquad \bar{w}_A = Q^A_A w_A$$

---

[1]) Die großen / kleinen lateinischen und griechischen Indizes durchlaufen die Werte 0, 1, . . ., n / 1, . ., ., n.

transformieren[2]). Ausgeschrieben lauten diese Gleichungen

$$\text{(1, 3)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ \ \bar{v}^i = P^i_\lambda v^\lambda + P^i_0 v^0, \\ &\text{b)}\ \ \bar{v}^0 = v^0, \\ &\text{c)}\ \ \bar{w}_i = Q^\lambda_i w_\lambda, \\ &\text{d)}\ \ \bar{w}_0 = Q^\lambda_0 w_\lambda + w_0. \end{aligned}$$

Aus zwei kontravarianten Punkten g^A, h^A (mit $g^0 h^0 \neq 0$) kann man einen Vektor p^i konstruieren:

$$\text{(1, 4)} \qquad p^i = \frac{g^i}{g^0} - \frac{h^i}{h^0}.$$

Es gilt dann

$$\text{(1, 5)} \qquad \bar{p}^i = P^i_\lambda p^\lambda.$$

Der Inbegriff von n Bestimmungszahlen p^i, welche sich nach (1, 5) transformieren, wird also als kontravarianter Vektor bezeichnet. Jedem kontravarianten Punkte v^A mit $v^0 = 0$ sind also unendlich viele kontravariante Vektoren zugeordnet. Der Inbegriff von n Bestimmungszahlen q_i, welche sich bei (1, 1) nach

$$\text{(1, 6)} \qquad \bar{q}_i = Q^\lambda_i q_\lambda$$

transformieren, wird als kovarianter Vektor bezeichnet. Jedem kovarianten Punkte sind also unendlich viele kovariante Vektoren zugeordnet. Unter allen kovarianten Punkten ist der folgende ausgezeichnet:

$$\text{(1, 7)} \qquad t_A = s\,\delta^0_A \ ^3)$$

(s ist ein beliebiger Skalar $\neq 0$), dessen Bestimmungszahlen sich bei (1, 1) nicht ändern.

Von Punkten geht man in üblicher Weise zu den Projektoren über, während die Vektoren den Anlaß zur Definition von Affinoren geben.

2. Unter der Punktkonnexion verstehen wir den Inbegriff von $(n+1)^3$ Koeffizienten Φ, welche sich bei (1, 1) nach

$$\text{(2, 1)} \qquad \bar{\Phi}^A_{BC} = P^A_\Lambda \left(Q^\Gamma_B Q^\Sigma_C \Phi^\Lambda_{\Gamma\Sigma} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}^C} Q^\Lambda_B \right)$$

---

[2]) Bei dem denkbar einfachsten Falle der linearen Gruppe der homogenen cartesischen Koordinaten

$$\bar{x}^i = P^i_\Lambda x^\Lambda, \qquad \bar{x}^0 = x^0 \qquad (\text{Det}\,|P^i_\lambda| \neq 0)$$

bildet also das Verhältnis dieser Koordinaten einen kontravarianten Punkt, während das Verhältnis von Hyperebenekoordinaten einen kovarianten Punkt bildet.

[3]) δ^A_B ist das Kroneckersche Delta, $\delta^A_B = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}$ für $\begin{matrix} A = B \\ A \neq B \end{matrix}$.

transformieren. Aus dieser Gleichung geht ohne weiteres die Kovarianz der Bedingung

(2, 2) $$\Phi^A_{BC} = \Phi^A_{CB}$$

hervor. Wir werden nur solche „symmetrische" Punktkonnexion behandeln. Ausgeschrieben lauten die Gleichungen (2, 1) wegen (1, 2):

(2, 3)
$$\text{a)}\quad \bar{\Phi}^0_{BC} = Q^\Gamma_B\, Q^\Sigma_C\, \Phi^0_{\Gamma\Sigma},$$
$$\text{b)}\quad \bar{\Phi}^A_{B0} = \Phi^A_{0B} = P^A_\Lambda\, Q^\Gamma_B\, \Phi^\Lambda_{\Gamma 0} + P^A_\Lambda\, Q^\Gamma_B\, Q^\nu_0\, \Phi^\Lambda_{\Gamma\nu} + P^A_\lambda \frac{\partial Q^\lambda_0}{\partial \bar{x}^B},$$
$$\text{c)}\quad \bar{\Phi}^i_{jk} = P^i_\lambda\, Q^\mu_j\, Q^\nu_k\, \Phi^\lambda_{\mu\nu} + P^i_0\, Q^\mu_j\, Q^\nu_k\, \Phi^0_{\mu\nu} + P^i_\lambda \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} Q^\lambda_k.$$

Die Punktkonnexion gibt Anlaß zu dem Begriffe der kovarianten Ableitung (mit dem Symbole D_A) von Punkten

(2, 4)
$$D_A v^B = \frac{\partial}{\partial x^A} v^B + \Phi^B_{CA} v^C,$$
$$D_A w_B = \frac{\partial}{\partial x^A} w_B - \Phi^C_{BA} w_C$$

und zu der Krümmungsgröße

(2, 5) $$F^A_{BCD} = \frac{\partial}{\partial x^C} \Phi^A_{DB} - \frac{\partial}{\partial x^B} \Phi^A_{DC} - \Phi^A_{EB}\, \Phi^E_{DC} + \Phi^A_{EC} \Phi^E_{DB},$$

welche in den Integrabilitätsbedingungen

(2, 6) $$D_B w_{CD} - D_C w_{BD} = F^A_{BCD}\, w_A$$ [4])

des Systems

(2, 7) $$D_C w_D = w_{CD}$$

auftritt. Aus (2, 3a) folgt, daß das Verhältnis von den Bestimmungszahlen

(2, 8) $$\Phi^0_{BC} = T_{BC} = T_{CB}$$

ein Projektor ist. Dieser steht in enger Beziehung zur Krümmungsgröße (2, 5). Setzen wir nämlich

(2, 9) $$D_C t_D = \frac{\partial}{\partial x^C} t_D - \Phi^A_{DC}\, t_A = P_{CD},$$

so ist P_{CD} ein Projektor

(2, 10) $$P_{CD} = D_C t_D = \delta^0_D \frac{\partial}{\partial x^C} s - T_{DC} s,$$

und die Integrabilitätsbedingungen von (2, 10) lauten nach (2, 6)

(2, 11) $$D_B P_{CD} - D_C P_{BD} = F^A_{BCD}\, t_A = s F^0_{BCD}.$$

---

[4]) Schouten, Der Ricci-Kalkül (Berlin, Springer, 1924), S. 113.

Wenn $s = 1$ ist, so vereinfachen sich die Formeln (2, 10) und (2, 11) zu

$$\text{(2, 12)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad D_C t_D = -T_{DC}, \\ &\text{b)} \quad D_C T_{BD} - D_B T_{CD} = F^0_{BCD}. \end{aligned} \qquad (s = 1).$$

Weil (2, 12a) eine Identität ist, so ist (2, 12b) immer erfüllt, wie man sich auch mittels direkter Ausrechnung überzeugen kann. — Wir kehren wieder zum allgemeinen Fall $s \neq 1$ zurück und fragen nach den Integrabilitätsbedingungen der Gleichung

$$\text{(2, 13a)} \qquad D_C t_D = \delta^0_D \frac{\partial s}{\partial x^C},$$

welche mit

$$\text{(2, 13b)} \qquad T_{DC} = 0 \qquad \left(\text{oder} \quad P_{CD} = \delta^0_D \frac{\partial s}{\partial x^C}\right)$$

äquivalent ist. Nach (2, 13) bekommen wir für unseren Fall aus (2, 11)

$$\text{(2, 13c)} \qquad F^0_{BCD} = 0.$$

Sind die Bedingungen (2, 13) erfüllt, so gilt für jeden beliebigen Punkt v^A

$$v^A D_A t_B = v^A \frac{\partial \log s}{\partial x^A} t_B = \text{prop. } t_B,$$

und die Bestimmungszahlen

$$v^A D_A t_B \quad \text{und} \quad t_B$$

bestimmen durch ihr Verhältnis denselben kovarianten Punkt. Wir sagen in diesem Falle, daß das Punktfeld t_B aus „stationären" Punkten besteht. Es gilt somit der

Satz I. *Die Integrabilitätsbedingungen von* (2, 13a), *was mit* (2, 13b) *äquivalent ist, sind* $F^0_{BCD} = 0$. *Sind die Gleichungen* (2, 13) *erfüllt, so besteht das Punktfeld* t_B *aus stationären Punkten.*

Selbstverständlich ist die Gleichung (2, 13c) nach (1, 3b) eine kovariante Gleichung. Für (2, 13b) vereinfachen sich die Transformationsgleichungen (2, 3c) zu

$$\text{(2, 14)} \qquad \overline{\Phi}^i_{jk} = P^i_\lambda Q^\mu_j Q^\nu_k \Phi^\lambda_{\mu\nu} + P^i_\lambda \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} Q^\lambda_k,$$

und die Φ^i_{jk} transformieren sich dann also untereinander. Die Punktkonnexion Φ mit $\Phi^0_{BC} = 0$ wollen wir als „spezielle" Punktkonnexion bezeichnen. Bemerkenswert ist, daß in der speziellen Punktkonnexion sich die Bestimmungszahlen

$$\text{(2, 15)} \qquad F^a_{bcd} = \frac{\partial}{\partial x^c} \Phi^a_{db} - \frac{\partial}{\partial x^b} \Phi^a_{dc} - \Phi^a_{eb} \Phi^e_{dc} + \Phi^a_{ec} \Phi^e_{db}$$

nach (2, 14) untereinander transformieren und also einen Affinor bilden.

3. Wir kehren zur allgemeinen Punktkonnexion zurück und versuchen, aus diesem Begriffe auch die kovariante Ableitung von Vektoren abzuleiten. Zu diesem Zwecke setzen wir — analog zur gewöhnlichen Ableitung — die (nach (1, 3 b) kovariante) Regel

$$D_A \frac{v^i}{v^0} = \frac{(D_A v^i) v^0 - (D_A v^0) v^i}{(v^0)^2} \qquad (v^0 \neq 0) \tag{3, 1 a}$$

voraus. Es ist also (für $g^0 \neq 0$)

$$D_A \frac{g^i}{g^0} = \frac{\partial \frac{g^i}{g^0}}{\partial x^A} + \Phi^i_{b\,A} \frac{g^b}{g^0} + \Phi^i_{0\,A} - \Phi^0_{B\,A} \frac{g^B}{g^0} \frac{g^i}{g^0}$$

und demzufolge nach (1, 4)

$$D_A p^i = \frac{\partial p^i}{\partial x^A} + \Phi^i_{b\,A} p^b - \Phi^0_{B\,A} \left(\frac{g^B g^i}{(g^0)^2} - \frac{h^B h^i}{(h^0)^2} \right). \tag{3, 1 b}$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit der kovarianten Ableitung eines kontravarianten Punktes r^A mit $r^0 = 0$

$$D_A r^i = \frac{\partial r^i}{\partial x^A} + \Phi^i_{b\,A} r^b.$$

Da r^i auch zugleich unendlich viele kontravariante Vektoren darstellt, sollen beide Geichungen formal äquivalent sein, was nur dann möglich ist, wenn die Punktkonnexion eine spezielle ist ($\Phi^0_{B\,A} = 0$). Dann und nur dann ist die durch (3, 1) definierte kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors (1, 4) eindeutig [5]). — Für die kovarianten Vektoren ist die Sache viel einfacher, indem man nicht aus zwei allgemeinen kovarianten Punkten *einen* kovarianten Vektor konstruieren kann. Weil aber

$$D_A w_b = \frac{\partial}{\partial x^A} w_b - \Phi^i_{b\,A} w_i - \Phi^0_{b\,A} w_0,$$

so ist die kovariante Ableitung von kovarianten Vektoren *nur* in der speziellen Konnexion möglich (während die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors nach unserer Definition (3, 1) auch in der allgemeinen Konnexion möglich, aber *nicht* eindeutig ist). Zusammenfassend können wir sagen:

---

[5]) Aus zwei Punkten g^A, h^A (mit $g^0 h^0 \neq 0$) läßt sich ein Vektor p^i nach (1, 4) konstruieren, für den (3, 1) gilt. Man kann aber zu demselben Vektor p^i zwei andere Punkte $'g^A \neq g^A$, $'h^A \neq h^A$ (mit $'g^0\,'h^0 \neq 0$) angeben, so daß

$$p^i = \frac{'g^i}{'g^0} - \frac{'h^i}{'h^0} \tag{1, 4}$$

gilt. Infolgedessen kann man mit demselben Recht in (3, 1) statt g, h die Bestimmungszahlen $'g, 'h$ einsetzen, wodurch das letzte Glied rechts allgemein geändert wird.

Die kovariante Ableitung von beliebigen Affinoren ist laut unserer Definition nur in der speziellen Konnexion möglich und eindeutig, und wird mittels der Koeffizienten $\Phi^i_{b\,A}$ konstruiert.

Führt man das kovariante Differential ein mittels der Formel

$$D = d\,x^A\,D_A,$$

so folgt aus den Formeln für kovariante Ableitung von Vektoren p^i, q_j in der speziellen Konnexion

$$(3,2) \qquad D_A\,p^i = \frac{\partial\,p^i}{\partial\,x^A} + \Phi^i_{b\,A}\,p^b, \qquad D_A\,q_j = \frac{\partial\,q_j}{\partial\,x^A} - \Phi^b_{j\,A}\,q_b$$

die entsprechende Formel

$$(3,3) \qquad \begin{aligned} D\,p^i &= d\,p^i + \Phi^i_{bj}\,p^b\,d\,x^j + \Phi^i_{b\,0}\,d\,x^0\,p^b, \\ D\,q_b &= d\,q_b - \Phi^i_{bj}\,q_i\,d\,x^b - \Phi^i_{b\,0}\,d\,x^0\,q_i. \end{aligned}$$

4. In der oben erwähnten Arbeit ist Herr Wundheiler von der „kinematischen" Transformationsgruppe

$$(4,1) \qquad \bar{x}^i = \bar{x}^i\,(t, x^1, \ldots, x^n)$$

ausgegangen und hat ausschließlich Größen betrachtet, deren Bestimmungszahlen sich nach

$$(4,2) \qquad \bar{X}^i = P^i_\lambda\,X^\lambda, \qquad \bar{X}_j = Q^\lambda_j\,X_\lambda$$

transformieren. Von diesen Größen bildet er das kovariante Differential nach

$$(4,3) \qquad \begin{aligned} \delta\,X^i &= d\,X^i + \Gamma^i_{jk}\,X^j\,d\,x^k + \Lambda^i_j\,X^j\,d\,t, \\ \delta\,X_i &= d\,X_i - \Gamma^j_{ik}\,X_j\,d\,x^k - \Lambda^j_i\,X_j\,d\,t. \end{aligned}$$

Dabei sind Γ und Λ zwei Systeme von Koeffizienten, welche sich bei (4, 1) nach

$$(4,4) \qquad \begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= P^i_\lambda\,Q^u_j\,Q^\nu_k\,\Gamma^\lambda_{\mu\,\nu} + P^i_\lambda\,\frac{\partial}{\partial\,\bar{x}^j}\,Q^\lambda_k, \\ \Lambda^i_j &= P^i_\lambda\,Q^u_j\,\frac{\partial\,x^\nu}{\partial\,t}\,\Gamma^\lambda_{\mu\,\nu} + P^i_\lambda\,Q^u_j\,\Lambda^\lambda_\mu + P^i_\lambda\,\frac{\partial^2\,x^\lambda}{\partial\,\bar{x}^j\,\partial\,t} \end{aligned}$$

transformieren. Der Vergleich von (1, 1) und (4, 1); (1, 5), (1, 6) und (4, 2); (2, 3 b, c), (2, 14) und (4, 4); (3, 3) und (4, 3) führt zu dem

Satz II: *Die Geometrie von Herrn Wundheiler ist ein Spezialfall der hier betrachteten Geometrie, und zwar*

a) *in der Algebra werden nur Affinoren betrachtet und*

b) *als Punktkonnexion wird die spezielle Punktkonnexion (d. i. unsere Punktkonnexion mit* (2, 13)*) gewählt*:

(4, 5) $$\Phi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}, \quad \Phi^i_{j0} = \Lambda^i_j, \quad \Phi^0_{AB} = 0$$ [6])

und ausschließlich werden nur kovariante Differentiale betrachtet

Bemerkung. In der allgemeinen Punktkonnexion gilt

$$D_A v^0 = \frac{\partial}{\partial x^A} v^0 + \Phi^0_{BA} v^B = \frac{\partial}{\partial x^A} v^0 + T_{BA} v^B.$$

v^0 ist aber auch ein Skalar (vgl. (1, 3 b)), und die kovariante Ableitung eines Skalar s ist der gewöhnlichen gleich:

$$D_A s = \frac{\partial}{\partial x^A} s.$$

In der *allgemeinen* Punktkonnexion herrscht also eine gewisse Unbestimmtheit in bezug auf die kovariante Ableitung der Bestimmungszahlen v^0. In der *speziellen* Punktkonnexion sind die letzten zwei Gleichungen formal äquivalent und die Unbestimmtheit fällt also weg. — Wegen der systematischen Behandlung dieser Frage siehe Hlavatý-Gołab, Zur allgemeinen Vektor- und Punktkonnexion (Práce Matematiczno-Fizyczne **39** (1932), S. 119—130).

5. Unsere Betrachtungen gestatten noch eine andere Interpretation. Wir werden jetzt die Koordinaten $x^0, \ldots, x^n$ als *nicht* überzählige Koordinaten in einem $(n+1)$-dimensionalen Raume X_{n+1} auffassen, und sie den Transformationen (1, 1) unterwerfen. Als „Vektoren" werden wir jetzt den Inbegriff (und nicht mehr das Verhältnis) von Bestimmungszahlen v^A bzw. w_A, welche sich nach (1, 3) transformieren, auffassen.

In unserem X_{n+1} gibt es eine ausgezeichnete Hyperflächenfamilie von X_n, welche mittels

(5, 1 a) $$x^0 = \text{const}$$

gegeben ist. Wir werden gelegentlich statt (5, 1 a) auch

(5, 1 b) $$x^i = x^i(y^{\dot{1}}, \ldots, y^{\dot{n}}), \quad x^0 = \text{const}$$

schreiben, indem wir den Raum X_n auf die Parameter $y^{\dot{1}}, \ldots, y^{\dot{n}}$ beziehen. Dann lassen sich n linear unabhängige kontravariante Tangentialvektoren von X_n leicht angeben:

(5, 2) $$\underset{\dot{e}}{e}{}^A = \frac{\partial x^A}{\partial y^{\dot{e}}} = \delta^A_i \frac{\partial x^i}{\partial y^{\dot{e}}}$$ [7]).

---

[6]) Wenn man ausschließlich nur Affinoren behandelt, so kommen in den kovarianten Differentialen die Koeffizienten Φ^i_{00} überhaupt nicht vor.

[7]) Die deutschen Indizes durchlaufen die Symbole $\dot{1}, \ldots, \dot{n}$, zur Unterscheidung von den kleinen (lateinischen oder griechischen) Indizes, welche die Symbole $1, \ldots, n$ durchzulaufen haben.

Da jeder kontravariante Vektor v^A, der im X_n liegt, als lineare Kombination von $\underset{\varepsilon}{e}{}^A$ geschrieben werden kann, so ist laut (5, 2) ohne weiteres sichtbar, daß für einen solchen Vektor $v^0 =$ sein muß. Die im ersten Teil als „kontravariante Vektoren" bezeichneten Größen stimmen also mit den jetzt bezeichneten „kontravarianten Vektoren im X_n" überein. — Unter allen kovarianten Vektoren ist einer ausgezeichnet, nämlich der Vektor (1, 7), wo s immer ein beliebiger Skalar ist. Dieser Vektor ist X_n-bildend. In der Tat ist nach (5, 2)

$$t_A \underset{\varepsilon}{e}{}^A = 0.$$

Wir benutzen diesen Vektor zur Bildung des Einheitsaffinor B von X_n, indem wir (vorläufig ganz beliebig, siehe Bemerkung [14])) den kontravarianten „Affinormalvektor" n^A wählen, dessen letzte Bestimmungszahl wir nach

(5, 3) $$1 = t_A n^A = s n^0$$

normieren. (Laut (1, 3 b) ist dies eine kovariante Bedingung.) Dann ist bekanntlich der Einheitsaffinor B^A_C von X_n mittels

(5, 4 a) $$B^A_C = \delta^A_C - n^A t_C = \delta^A_C - n^A s \delta^0_C$$

gegeben. Daraus folgen insbesondere die kovarianten Gleichungen

(5, 4 b) $$B^i_j = \delta^i_j, \quad B^0_A = 0, \quad B^i_0 = - n^i s.$$

Von dem Einheitsaffinor B ausgehend, kann man die X_n-Projektionen v'^A und w'_C von beliebigen Vektoren v^A, w_C konstruieren

(5, 5 a) $$v'^A = B^A_C v^C, \qquad w'_C = B^A_C w_A$$ [8]).

Ausgeschrieben lauten diese Gleichungen nach (5, 4):

(5, 6)
$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad v'^0 = 0, \\ &\text{b)} \quad v'^i = v^i - n^i s v^0, \\ &\text{c)} \quad w'_j = w_j, \\ &\text{d)} \quad w'_0 = - n^i w_i s. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen erhellt, daß nur v'^0, w'_j von der Wahl des Vektors n^A nicht abhängen. Die erste bestätigt unsere obigen Erwähnungen über die kontravarianten Vektoren in X_n. Die zwei letzten deuten an, daß die Größe, welche wir früher als „kovarianten Vektor" bezeichneten, den Anlaß gibt zu dem jetzt genannten „kovarianten Vektor in X_n" (siehe die Bemerkung [11])).

[8]) l. c. [4]), S. 136.

6. Bekanntlich hat jeder A_{n+1} ($= X_{n+1}$ mit der Konnexion Φ) zwei Eulersche Krümmungsaffinoren

$$(6,1)\qquad \text{a)}\quad H^C_{AB} = B^D_A B^E_B D_D B^C_{E,}{}^{9}) \qquad \text{b)}\quad L^C_{AB} = B^D_A B^C_E D_D B^E_B.$$

Wir wollen sie für unseren Fall berechnen. Es ist erstens nach (5, 4)

$$H^C_{AB} = -B^a_A B^b_B D_a n^C t_b = -n^C B^a_A B^b_B D_a t_b.$$

Nun ist aber nach (5, 4 b)

$$-B^a_A B^b_B D_a t_b = -B^a_A B^b_B \left(\frac{\partial}{\partial x^a} s\,\delta^0_b - T_{ba}\, s\right)$$

$$= +s B^a_A B^b_B T_{ba},$$

so daß endlich

$$(6,2)\qquad H^C_{AB} = s n^C B^a_A B^b_B T_{ba}$$

gilt. Der Affinor H hängt also vom n^C ab, während der Tensor

$$(6,3)\qquad h_{AB} = h_{BA} = -H^C_{AB} t_C = -s B^a_A B^b_B T_{ba} = -s B^C_A B^D_B T_{CD}$$

von n^A unabhängig ist (h_{AB} korrespondiert mit dem zweiten Fundamentaltensor einer Hyperfläche in einem metrischen Raume). Somit haben wir eine geometrische Intepretation vom T gewonnen. Ist die Konnexion eine spezielle, so ist $h = 0$ und also auch $H = 0$, und infolgedessen ist jede Geodätische im X_n *zugleich* eine Geodätische im A_{n+1}. Einen solchen X_n nennen wir „geodätisch" im A_{n+1}.

Der Affinor L^C_{AB} ist laut (6, 1) und (5, 4)

$$L^C_{AB} = -B^a_A B^C_E D_a n^E t_B = -s\,\delta^0_B B^a_A B^C_E D_a n^E$$

$$= -s\,\delta^0_B B^a_A B^C_E \left(\frac{\partial}{\partial x^a} n^E + \Phi^E_{ba} n^b + \Phi^E_{0a} n^0\right)$$

und hängt also vom n^A ab, wie auch der Affinor

$$1^C_A = -L^C_{AB} n^B.$$

Wählt man insbesondere den Affinormalvektor n^B nach

$$s n^B = \delta^B_0,$$

so ist für $s = 1$

$$(6,4)\qquad 1^C_A = B^a_A B^C_E \Phi^E_{0a} = B^B_A B^C_E \Phi^E_{0B}.$$

Indem die eben erwähnte Wahl vom n^A von Koordinaten abhängt, so ist auch die Interpretation (6, 4) vom Φ^E_{0A} vom Koordinatensystem abhängig. Zusammenfassend können wir diesen Satz aussprechen:

Satz III. *Unsere Betrachtungen lassen sich auch als Geometrie auf einer ausgezeichneten Hyperflächenfamilie X_n im A_{n+1} andeuten. Der zweite*

---

[9]) l. c. [4]), S. 158.

kovariante Fundamentaltensor dieser Familie ist mittels (6, 3) *gegeben. — Ist die Konnexion eine spezielle, so besteht die Familie aus den geodätischen Hyperflächen.*

7. Die Konnexion im A_{n+1} induziert in jedem Raume X_n eine Konnexion, die sogenannte „induzierte" Konnexion. Um sie zu finden, führen wir außer den Vektoren $\overset{A}{e}$ noch die Vektoren $\overset{e}{e}_A$ ein, welche im X_n liegen. Die Bestimmungszahlen $\overset{e}{e}_a$ hängen von n^A gar nicht ab:

$$\overset{e}{e}_a = \frac{\partial \overset{e}{y}}{\partial x_a}, \tag{7, 1}$$

während $\overset{e}{e}_0$ sich aus

$$0 = n^A \overset{e}{e}_A = n^i \overset{e}{e}_i + n^0 \overset{e}{e}_0 = n^i \overset{e}{e}_i + \overset{e}{e}_0/s \text{ [10]}$$

ergibt. Ist nun w_A bzw. w_{AB} ein Vektor (Affinor) im X_n, so sind seine Bestimmungszahlen in bezug auf das y-System

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad w_e = w_A \overset{A}{e} \text{ [11]}, \\ &\text{b)} \quad w_{ae} = w_{AB} \overset{A}{a} \overset{B}{e}. \end{aligned} \tag{7, 2}$$

Insbesondere also

$$\overset{a}{e}_e = \overset{a}{e}_A \overset{A}{e} = \overset{a}{e}_i \overset{i}{e} = \delta^a_e \text{ [12]}. \tag{7, 3}$$

Wir benutzen diese Gleichungen, um die induzierte Konnexion $\Phi'^{\,e}_{ba}$ ausfindig zu machen, indem wir mit D'_a den symbolischen Vektor ihrer kovarianten Ableitung bezeichnen. Nach (7, 2) setzen wir nämlich

$$D'_a \overset{e}{e}_c = \overset{A}{a} \overset{B}{c} D_A \overset{e}{e}_B. \tag{7, 4}$$

Setzt man nun für jeden beliebigen Vektor w_c die Regel

$$D'_a w_c = \frac{\partial}{\partial y^a} w_c - \Phi'^{\,e}_{ca} w_e$$

voraus, so ergibt sich nach einigen Umrechnungen aus (7, 4) laut (7, 3)

$$\Phi'^{\,e}_{ba} = \overset{a}{a} \overset{b}{b} \overset{e}{e}_i \Phi^i_{ba} + \overset{e}{e}_i \frac{\partial}{\partial y^a} \overset{i}{b} + h_{ab} n^i \overset{e}{e}_i \tag{7, 5 a}$$

---

[10]) In jedem zugelassenen Koordinatensystem ist also

$$\overset{e}{e}_0 = -s n^i \overset{e}{e}_i.$$

[11]) Weil $\overset{0}{e} = 0$, so kommen bei der Bildung der Bestimmungszahlen w_e nur die Bestimmungszahlen w_i in Betracht. Vgl. die Gleichung (5, 6 c).

[12]) Die Gleichung $\overset{a}{e}_e = \delta^a_e$ ist zwar gültig in jedem x-System, nicht aber beim Übergang zu einem anderen y-System.

oder

$$\Phi'^{\,\overset{e}{}}_{\underset{b}{}\,\underset{a}{}} = \overset{a}{\underset{a}{e}}\,\overset{e}{e_i}\,D_a\,\overset{i}{\underset{b}{e}} - H^{i}_{a\,b}\,\overset{e}{e_i}\ ^{13}),$$

(7, 5 b)

wo

$$h_{a\,b} = \overset{A}{\underset{a}{e}}\,\overset{B}{\underset{b}{e}}\,h_{AB} = \overset{A}{\underset{a}{e}}\,\overset{B}{\underset{b}{e}}\,B^{C}_{A}\,B^{D}_{B}\,T_{CD} = \overset{A}{\underset{a}{e}}\,\overset{B}{\underset{b}{e}}\,T_{AB},\quad H^{i}_{a\,b} = -\,h_{a\,b}\,n^{i}$$

gesetzt wurde. Somit hängt allgemein die induzierte Konnexion vom n^A ab [14]). Einen Ausnahmefall bildet die spezielle Konnexion Φ. Dann ist nämlich laut (7, 5)

$$\Phi'^{\,\overset{e}{}}_{\underset{b}{}\,\underset{a}{}} = \overset{a}{\underset{a}{e}}\,\overset{e}{e_i}\,D_a\,\overset{i}{\underset{b}{e}} = \overset{e}{e_i}\left(\frac{\partial}{\partial\, y^a}\,\overset{i}{\underset{b}{e}} + \Phi^{i}_{ha}\,\overset{b}{\underset{b}{e}}\,\overset{a}{\underset{a}{e}}\right)$$

(7, 5 c)

unabhängig von der Wahl des Vektors n^A. In diesem Falle lautet der verallgemeinerte Gaußsche Satz einfach

$$F^{A}_{B\,C\,D}\,\overset{B}{\underset{b}{e}}\,\overset{C}{\underset{c}{e}}\,\overset{D}{\underset{b}{e}}\,\overset{e}{e_A} = R'^{\,a}_{b\,c\,b},$$

wenn R' die Bestimmungszahlen (in bezug auf das y-System) der Krümmungsgröße von Φ' bezeichnet. Weil aber bei der speziellen Konnexion die Gleichung (2, 13 c) gilt, so vereinfacht sich die vorangehende Gleichung nach (5, 2) zu

$$F^{a}_{b\,c\,d}\,\overset{b}{\underset{b}{e}}\,\overset{c}{\underset{c}{e}}\,\overset{d}{\underset{b}{e}}\,\overset{a}{\underset{a}{e}}_{a} = R'^{\,a}_{b\,c\,b},$$

welche nun mit

$$F^{a}_{b\,c\,d} = R'^{\,a}_{b\,c\,b}\,\overset{b}{e_b}\,\overset{c}{e_c}\,\overset{b}{e_d}\,\overset{a}{\underset{a}{e}}$$

äquivalent ist. Die mittels (2, 15) definierte Größe ist also zugleich die Krümmungsgröße der induzierten Konnexion Φ' der Hyperflächenfamilie, welche aus lauter geodätischen Hyperflächen besteht. Somit gilt der

Satz IV. *In jeder Hyperfläche unserer Familie im A_{n+1} wird durch Φ eine Konnexion induziert, deren Koeffizienten allgemein von n^A abhängen und mittels* (7, 5 a, b) *gegeben sind. Sind die Hyperflächen geodätisch im A_{n+1}, so ist die induzierte Konnexion* (7, 5 c) *von n^A unabhängig und die mittels* (2, 15) *definierte Größe ist ihre Krümmungsgröße.*

Kunštát, im August 1932.

---

[13]) Es ist

$$\overset{a}{\underset{a}{e}}\,\frac{\partial}{\partial\, x^a} = \frac{\partial\, x^n}{\partial\, y^a}\,\frac{\partial}{\partial\, x^n} = \frac{\partial}{\partial\, y^a}.$$

[14]) Sind umgekehrt beide Konnexionen Φ und Φ' gegeben, so läßt sich aus (7, 5) n^i sofort berechnen (während $n^0\,s = 1$), wenn nur $h_{a\,b}$ den Rang n hat.

(Eingegangen am 23. August 1932.)

Le principe de Dirichlet et les ensembles (A).

Von

G. Poprougénko in Paris.

„On appelle *ensemble analytique*", écrit M. Lusin [1]), „tout ensemble linéaire de points qui est *l'ensemble des valeurs d'une fonction discontinue seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable*". M. Lusin démontre que tout ensemble (A) („ensemble criblé", „Suslinche Menge" de M. Hausdorff) est „analytique" et inversement [2]).

Cette définition d'„analyticité" étant assez éloignée du sens que l'on attribue habituellement à ce mot, la question importante se pose: *est-il possible d'obtenir tout ensemble „analytique" au moyen des opérations et des méthodes de l'Analyse classique?*

Je me propose de montrer que la réponse est positive: c'est le *principe de Dirichlet* qui nous permet d'atteindre l'ensemble (A) général, en partant des *fonctions harmoniques*.

Pour éviter des complications d'ordre secondaire, je ne considère dans ce qui suit que les ensembles (A) bornés.

Soient: Δ un domaine borné plan simplement connexe, K la frontière de Δ, $f(x, y)$ une fonction réelle définie dans Δ.

Supposons qu'il existe un point $\eta \in K$ tel que

$$\lim f(x, y) = l = l(\eta), \quad |l(\eta)| < +\infty \tag{1}$$

pour $x + i\,y = z \to \eta$, $z \in \Delta$. Désignons par Z l'ensemble de tous les points $\eta \in K$ satisfaisant à (1), par L_f l'ensemble des nombres $l(\eta)$, η parcourant tous les éléments de Z.

Je me propose de démontrer le suivant

---

[1]) N. Lusin, Sur les ensembles analytiques, Fund. Math. t. X, p. 5.

[2]) Quant à la définition générale de ces ensembles, v. p. ex. Hausdorff, *Mengenlehre*, 1927, pp. 90—93.

Théorème. *Pour qu'un ensemble linéaire E soit un ensemble* (A), *il faut et il suffit qu'il existe une fonction $h(x,y)$ harmonique dans Δ et satisfaisant à la condition $L_h = E$* [3]).

Démonstration. *La condition est nécessaire.* E étant un ensemble (A) linéaire donné, il faut démontrer qu'il existe une fonction $h(x,y)$ harmonique dans Δ et satisfaisant à la condition

$$L_h = E. \tag{2}$$

Pour déterminer $h(x,y)$, nous avons besoin d'une fonction définie sur la frontière K de Δ et satisfaisant aux certaines conditions spéciales. Nous allons construire d'abord une fonction auxiliaire qui nous permettra de réaliser ces conditions et d'obtenir la fonction cherchée.

Soit P un ensemble parfait ponctiforme $\subset K$. Je dis *qu'il existe une fonction $\varphi(\xi)$ définie pour tout $\xi \in P$ et satisfaisant aux 3 conditions suivantes:*

(α_1) *L'ensemble des valeurs de $\varphi(\xi)$ coïncide avec E, en symboles:*

$$\varphi(P) = E.$$

(β_1) *Il existe pour tout $y_0 \in E$ un point de continuité ξ_0 de $\varphi(\xi)$ tel que*

$$\varphi(\xi_0) = y_0.$$

(γ_1) *$\varphi(\xi)$ étant discontinue pour $\xi = \xi_0$, il existe deux suites $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ de points de continuité de $\varphi(\xi)$ telles que*

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \eta_n = \xi_0, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(\xi_n) \neq \lim_{n\to\infty} \varphi(\eta_n).$$

En effet, l'ensemble E étant donné, soit $f_E(x)$ la fonction *continue du côté gauche* de M. Sierpiński [4]) dont l'ensemble des valeurs coïncide avec E. Nous supposons $f_E(x)$ définie pour $\frac{1}{2} < x \leqq 1$ et nous la prolongeons à tout x, $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, de la manière suivante.

Choisissons deux nombres *différents* y_1 et y_2 appartenant à E et posons

$$f(0) = y_1, \tag{3}$$

$$f(x) = y_1 \text{ pour } \frac{1}{3n} < x \leqq \frac{1}{3n-1}, \tag{4}$$

et

$$f(x) = y_2 \text{ pour } \frac{1}{3n+2} < x \leqq \frac{1}{3n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

---

[3]) Pour Δ = *cercle-unité*, j'ai démontré ce théorème dans ma Note *Sur l'analyticité des ensembles (A)* Fund. Math. t. XVIII, p. 82. Cette démonstration étant essentiellement basée sur la possibilité de déterminer la direction sur la circonférence. elle n'est pas évidemment valable dans le cas général.

[4]) V. Fund. Math. t. X, p. 119.

Les points de discontinuité de $f_E(x)$ étant au plus en une infinité dénombrable, nous les supposons rangés en une suite infinie

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \quad (6)$$

Soit $\{f_E(x_n)\}$ la suite des valeurs correspondantes. Posons

$$f(x) = f_E(x_n) \text{ pour } \frac{1}{3n+1} < x \leqq \frac{1}{3n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (7)$$

Si l'on complète la définition de $f(x)$ par la convention

$$f(x) = f_E(x) \text{ pour } \tfrac{1}{2} < x \leqq 1, \quad (8)$$

on obtient une fonction définie en tout point de l'intervalle

$$J_0 = (0 \leqq x \leqq 1).$$

Désignons par R l'ensemble se composant de points $x = 0$, $x = 1$ et d'une infinité dénombrable de *points de continuité* de $f(x)$ compris entre 0 et 1. Nous supposons que ces derniers points forment un ensemble *dense dans* J_0, ce qui est toujours possible, $f(x)$ étant discontinue seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable x.

L'ensemble R étant ainsi déterminé, la fonction $f(x)$ jouit de la propriété suivante:

(*) *Si* x_0 *est un point de discontinuité de* $f(x)$, *il existe deux suites* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\}$ *de points de continuité de* $f(x)$ *telles que* $a_n \in J_0 - R$, $b_n \in J_0 - R$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

En effet, d'après (3)—(5) et (7), c'est évident pour tout $x_0 < \frac{1}{2}$.

Soit $x_0 \geqq \frac{1}{2}$. D'après la définition même, $f(x)$ est continue du côté gauche en tout point $x \in J_0$. On en conclut que $x_0 < 1$ et que la fonction $f(x)$ est discontinue du côté droit pour $x = x_0$. Il existe par conséquent deux suites $\{x_n\}$ et $\{\bar{x}_n\}$ de points de J_0 telles que $x_n < x_0$, $\bar{x}_n > x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\bar{x}_n) \neq f(x_0)$. L'ensemble de *tous les points de continuité de* $f(x)$ *contenus dans* $J_0 - R$ étant dense dans J_0, on voit que l'on peut trouver pour tout n naturel deux points a_n et b_n de cet ensemble pour lesquels sont remplies les inégalités

$$x_n - a_n < \frac{1}{n}, \ \bar{x}_n - b_n < \frac{1}{n}, \ |f(x_n) - f(a_n)| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(\bar{x}_n) - f(b_n)| < \frac{1}{n}.$$

Les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ satisfont évidemment à toutes les conditions exigées.

---

[5]) S'il n'y a qu'un nombre fini de points x_n distincts, on pose $x_{n+1} = x_n$ à partir d'un certain n.

Ceci posé, soit $x = g(t)$ la fonction de M. Lebesgue transformant l'ensemble parfait non dense C de Cantor en l'intervalle J_0. D'après la définition de R, nous pouvons exiger, comme on sait, qu'elle transforme *l'ensemble se composant de points* $t = 0$, $t = 1$ *et de toutes les extrémités des intervalles contigus à* C en l'ensemble R.

Les ensembles C et P étant homéomorphes, soit $t = \chi(\xi)$ une fonction réalisant cette homéomorphie.

Posons

$$\varphi(\xi) = f(g(\chi(\xi))). \tag{9}$$

Je dis que la fonction $\varphi(\xi)$ définie par (9) pour tout point $\xi \in P$ satisfait aux conditions $(\alpha_1) - (\gamma_1)$.

En effet, quant à (α_1) et (β_1), c'est une simple conséquence de (9) et du fait que la fonction $f(x)$ jouit des propriétés en question. Démontrons que $\varphi(\xi)$ satisfait à la condition (γ_1).

Soit ξ_0 un point de discontinuité de $\varphi(\xi)$. D'après (9), on voit que la fonction $f(x)$ est discontinue pour $x = x_0 = g(\chi(\xi_0))$.

Or, deux cas seulement peuvent se présenter.

Premier cas. $0 < x < 1$.

D'après la définition de R et les conditions imposées à $g(t)$, le point $t_0 = \chi(\xi_0)$ est nécessairement un point „irrationnel" de C, c'est à dire un point de C dont le développement ternaire est essentiellement infini. Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites de points satisfaisant à (*). La fonction $g(t)$ établissant l'homéomorphie entre l'ensemble de tous les points „irrationnels" de C et l'ensemble $J_0 - R$, il en résulte que les équations $g(t) = a_n$ et $g(t) = b_n$ définissent d'une façon univoque deux suites $\{t_n\}$ et $\{u_n\}$ de points („irrationnels") de C et que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} u_n = t_0.$$

Désignons par $\bar{\chi}(t)$ la fonction inverse de $\chi(\xi)$ et posons $\xi_n = \chi(t_n)$ et $\eta_n = \bar{\chi}(u_n)$, pour $n = 1, 2, \ldots$ On a évidemment

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n = \lim_{n \to \infty} \bar{\chi}(t_n) = \bar{\chi}(t_0) = \xi_0 = \bar{\chi}(t_0) = \lim_{n \to \infty} \bar{\chi}(u_n) = \lim_{n = \infty} \eta_n$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(\xi_n) = \lim_{n \to \infty} f(g(\chi(\xi_n))) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) + \lim_{n \to \infty} f(b_n) = \lim_{n \to \infty} f(g(\chi(\eta_n)))$$
$$= \lim_{n \to \infty} \varphi(\eta_n).$$

La fonction $f(x)$ étant par hypothèse continue pour $x = a_n$ et $x = b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\varphi(\xi)$ est continue pour $\xi = \xi_n$ et $\xi = \eta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. On voit donc que la propriété (*) de $f(x)$ entraîne dans ce cas la condition (γ_1).

Deuxième cas. $x_0 = 0$.

$f(x)$ étant manifestement discontinue pour $x = 0$, il existe dans ce cas (d'après (4) et (5)) deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ satisfaisant à (*) pour lesquelles $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = y_1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = y_2 (y_1 \neq y_2)$. Les suites correspondantes $\{t_n\}$ et $\{u_n\}$ de points de C tendant vers 0 en même temps que $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$, on voit, d'après ce qui précède, que la condition (γ_1) est encore remplie.

Ceci établi, nous allons prolonger la fonction $\varphi(\xi)$ à l'ensemble $K - P$. Nous procédons dans ce but comme il suit.

Désignons par J un intervalle ouvert plan contenant $\overline{A}$ et posons $S = J - P$. On a évidemment

$$K - P \subset S. \tag{10}$$

L'ensemble S étant un domaine connexe plan, il existe une suite infinie $\{T_k\}$ de carrés non empiétants tels que

$$1^0 \qquad S = \sum_{k=1}^{\infty} T_k.$$

$$2^0 \qquad \lim_{k\to\infty} d(T_k) = 0\ ^6).$$

3^0 *Tout ensemble fermé* $\subset S$ *est contenu dans une somme finie de carrés* T_k.

Comme les ensembles T_k et P sont fermés et bornés, ainsi que l'ensemble de tous les points ξ de P satisfaisant à l'équation $\varrho(\xi, T_k) = \varrho(P, T_k)$, on peut nommer pour tout k naturel un point appartenant à P et vérifiant cette équation. Désignons ce point par τ_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

On a donc par définition

$$\varrho(\tau_k, T_k) = \varrho(P, T_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Définissons maintenant une fonction $\Phi(\xi)$ par les conditions suivantes:

Si $\xi \in P$, *posons*

$$\Phi(\xi) = \varphi(\xi). \tag{12}$$

Si $\xi \in K - P$, désignons par $T_{k_1(\xi)}, T_{k_2(\xi)}, \ldots, T_{k_{l_\xi}(\xi)}$ tous les carrés consécutifs de la suite $\{T_k\}$ contenant le point ξ. On a, d'après (10) et $1^0 - 3^0$, $1 \leqq l_\xi \leqq 4$.

Posons dans ce cas

$$\Phi(\xi) = \operatorname{Max}\{\varphi(\tau_{k_1(\xi)}), \varphi(\tau_{k_2(\xi)}), \ldots, \varphi(\tau_{k_{l_\xi}(\xi)})\}. \tag{13}$$

La fonction $\Phi(\xi)$ est définie par (12) et (13) pour tout $\xi \in K$; c'est à l'aide de cette fonction que nous allons déterminer la fonction $h(x, y)$.

Examinons d'abord certaines propriétés de $\Phi(\xi)$.

---

[6]) Je désigne d'une manière générale par $d(V)$, $J(V)$ et $F(V)$ resp. le diamètre, l'intérieur et la frontière d'un ensemble V.

Désignons par $M_\varphi(\xi) = G[\xi; \varphi, P]$ et $m_\varphi(\xi) = g[\xi; \varphi, P]$ resp. les fonctions maximale et minimale de $\varphi(\xi)$ sur P, par $M_\Phi(\xi)$ et $m_\Phi(\xi)$ celles de $\Phi(\xi)$ sur K. Démontrons que *ces fonctions vérifient les égalités*

$$M_\varphi(\xi) = M_\Phi(\xi) \tag{14}$$

et

$$m_\varphi(\xi) = m_\Phi(\xi) \tag{15}$$

quel que soit $\xi \in P$.

En premier lieu, il suffit de démontrer (14), la démonstration de (15) étant, comme on le verra sans peine, tout à fait analogue.

Soient donc: ξ_0 un point de P, $\varepsilon > 0$ un nombre arbitrairement donné, $\{\xi_n\}$ une suite de points de $K - P$ convergente vers ξ_0.

Il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les relations

$$\varrho(\xi_0, \xi) < \delta, \ \xi \in P, \tag{16}$$

entraînent

$$\varphi(\xi) < M_\varphi(\xi_0) + \varepsilon. \tag{17}$$

Posons $\mathrm{T}_n = T_{k_1(\xi_n)} + T_{k_2(\xi_n)} + \ldots + T_{k_{l_{\xi_n}}(\xi_n)}$; en vertu de 2^0 et 3^0 on a

$$\lim_{n \to \infty} d(\mathrm{T}_n) = 0.$$

Choisissons un nombre naturel n_0 de sorte que l'on ait $\mathrm{T}_n \subset U\left(\xi_0, \frac{\delta}{2}\right)$ pour $n > n_0$. Cette relation entraîne $\varrho(T_{k_\lambda(\xi_n)}, P) < \frac{\delta}{2}$ pour $n > n_0$ et $1 \leqq \lambda \leqq l_{\xi_n} \leqq 4$, d'où il s'en suit, d'après (11), que les points $\tau_{k_\lambda(\xi_n)}$ satisfont à (16) quel que soit $n > n_0$ et $1 \leqq \lambda \leqq 4$. D'après (13) et (17), on a donc $\Phi(\xi_n) < M_\varphi(\xi_0) + \varepsilon$ pour $n > n_0$, ce qui donne $\overline{\lim_{n \to \infty}} \Phi(\xi_n) \leqq M_\varphi(\xi_0) + \varepsilon$. Cette inégalité étant démontrée pour les points ξ_n de $K - P$, il est bien évident (d'après (12)) qu'elle reste vraie quelle que soit la suite $\{\xi_n\}$ de points de K convergente vers ξ_0. On conclut de là que $M_\Phi(\xi_0) \leqq M_\varphi(\xi_0) + \varepsilon$ et, le nombre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, $M_\Phi(\xi_0) \leqq M_\varphi(\xi_0)$.

D'autre part, on a évidemment $M_\Phi(\xi_0) \geqq M_\varphi(\xi_0)$, ce qui prouve l'égalité (14).

Nous sommes maintenant en état d'établir toutes les propriétés de $\Phi(\xi)$ nécessaires pour notre démonstration.

(α_2) $$\Phi(K) = E.$$

C'est évident d'après (α_1), (12) et (13).

(β_2) *Il existe pour tout* $y_0 \in E$ *un point de continuité* ξ_0 *de* $\Phi(\xi)$ *tel que*

$$\Phi(\xi_0) = y_0.$$

D'après (β_1), il existe un point $\xi_0 \in P$ tel que $\varphi(\xi_0) = y_0$, $\varphi(\xi)$ étant continue sur P pour $\xi = \xi_0$. Il en résulte, d'après (14), (15) et (12), que $\Phi(\xi)$ est continue (sur K) pour $\xi = \xi_0$ et que $\Phi(\xi_0) = \varphi(\xi_0) = y_0$.

(γ_2) *Si $\Phi(\xi)$ est discontinue au point ξ_0 appartenant à P, il existe deux suites $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ de points de continuité de $\Phi(\xi)$ tels que*

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \eta_n = \xi_0, \quad \lim_{n\to\infty} \Phi(\xi_n) \neq \lim_{n\to\infty} \Phi(\eta_n).$$

En effet, l'inégalité $m_\Phi(\xi_0) < M_\Phi(\xi_0)$ entraîne, d'après (14) et (15), $m_\varphi(\xi_0) < M_\varphi(\xi_0)$. La fonction $\varphi(\xi)$ étant discontinue (sur P) pour $\xi = \xi_0$, soient $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ deux suites de points de P satisfaisant à (β_1). Pour démontrer (γ_2), il suffit de remarquer que $\Phi(\xi)$ est continue pour $\xi = \xi_n$ et $\xi = \eta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et que $\Phi(\xi_n) = \varphi(\xi_n)$, $\Phi(\eta_n) = \varphi(\eta_n)$.

Toutes ces propriétés sont visiblement analogues aux propriétés $(\alpha_1) - (\gamma_1)$ de $\varphi(\xi)$. Démontrons maintenant une propriété nouvelle, relative aux points de discontinuité de $\Phi(\xi)$ contenus dans $K - P$.

(ω) *$\Phi(\xi)$ étant discontinue au point $\xi_0 \in K - P$, il existe une suite $\{\xi_n\}$ de points de continuité de $\Phi(\xi)$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0, \quad \lim_{n\to\infty} \Phi(\xi_n) = y \in E.$$

Le point ξ_0 appartenant à $K - P$, on a, comme nous l'avons vu, $\xi_0 \in \mathrm{T} = T_{k_1(\xi_0)} + T_{k_2(\xi_0)} + \ldots + T_{k_{l_{\xi_0}}(\xi_0)}$. $\Phi(\xi)$ étant discontinue pour $\xi = \xi_0$, le nombre l_{ξ_0} vérifie nécessairement (d'après (13)) l'inégalité $1 < l_{\xi_0} \leqq 4$.

Supposons d'abord que $l_{\xi_0} = 4$, ξ_0 étant le sommet commun de 4 carrés contigus.

Posons $N = J(T_{k_1(\xi_0)}) + J(T_{k_2(\xi_0)}) + J(T_{k_3(\xi_0)}) + J(T_{k_4(\xi_0)})$. L'ensemble $K = F(\Delta)$ étant un continu, il existe une suite de points différents de K convergente vers ξ_0. Deux cas seulement sont possibles: soit il existe une suite $\{\xi_n\}$ $(\xi_n \to \xi_0)$ telle que *la relation $\xi_n \in N$ est remplie pour des indices n aussi grands que l'on veut*, soit c'est le contraire qui a lieu. Dans le premier cas, il existe assurément une suite infinie extraite $\{\xi_{n_p}\}$ dont tous les termes se trouvent à *l'intérieur* d'un et d'un seul des carrés $\subset \mathrm{T}$. D'après (13), $\Phi(\xi)$ a une valeur constante pour tous ces points. Dans le deuxième cas, on peut choisir un nombre $\delta > 0$ tel que

$$K \cdot N \cdot U(\xi_0, \delta) = 0. \tag{18}$$

Par conséquent, une infinité de points de K dont ξ_0 est un point limite est située sur le côté commun des 2 carrés déterminés $\subset \mathrm{T}$. D'après (13), $\Phi(\xi)$ est constante pour tous les points $\bar{\xi}$ de K situés sur ce côté (les extrémités exclues).

On conclut de (18) que si $\varrho(\bar{\xi}, \xi_0) < \delta$, $\Phi(\xi)$ est continue pour $\xi = \bar{\xi}$.

Il existe donc en tout cas une suite infinie $\{\xi_q\}$ de points de continuité de $\Phi(\xi)$ telle que $\lim_{q \to \infty} \xi_q = \xi_0$, $\Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_2) = \ldots = y$. D'après (α_2), on a $y \in E$.

Ceci prouve la propriété (ω) pour $l_{\xi_0} = 4$.

Si $l_{\xi_0} \leqq 3$, un raisonnement analogue qu'il est facile de réproduire nous montre que la propriété (ω) est encore vraie.

Il est facile maintenant de démontrer notre Théorème.

En effet, nous avons une fonction *bornée* $\Phi(\xi)$ définie sur la frontière du *domaine simplement connexe plan* Δ.

Dans ces conditions, le *problème généralisé* de Dirichlet à toujours une solution[7]). En d'autres termes, il existe une fonction $h(x, y)$ harmonique dans Δ et tendant vers la valeur $\Phi(\xi)$ au voisinage de tout point de continuité de $\Phi(\xi)$.

Soit $y_0 \in E$. ξ_0 étant un point satisfaisant à (β_2), on a $\lim h(x, y) = y_0$ pour $x + iy = z \to \xi_0$, $z \in \Delta$. Il en résulte

$$E \subset L_h. \tag{19}$$

D'autre part, *le passage à la limite au voisinage de la frontière n'ajoute pas de nouveaux points à l'ensemble E.*

En effet, d'après (α_2), ceci est évident, si ξ est un point de continuité de $\Phi(\xi)$. Si $\Phi(\xi)$ est discontinue pour $\xi = \xi_0$, deux cas seulement peuvent se présenter:

1) $\xi_0 \in P$.

Les suites $\{\xi_n\}$ et $\{\eta_n\}$ satisfaisant à (γ_2), on a $\lim h(x, y) = \Phi(\xi_n)$ pour $x + iy = z \to \xi_n$ et $\lim h(x, y) = \Phi(\eta_n)$ pour $x + iy \to \eta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

On voit donc, d'après (γ_2), qu'au voisinage du point ξ_0 $h(x, y)$ ne tend vers aucune limite déterminée.

2) $\xi_0 \in K - P$.

Dans ce cas, la convergence au voisinage de ξ_0 n'est pas exclue à priori. Or, la propriété (ω) nous garantit que *si* $\lim h(x, y) = l(\xi_0) = y_0$ *pour* $x + iy = z \to \xi_0$, *on a* $y_0 \in E$.

En effet, $\{\xi_n\}$ étant une suite satisfaisant à (ω), on voit que $y_0 = \lim h(x, y) = \lim_{n \to \infty} \Phi(\xi_n) = y \in E$.

Il en résulte: $L_h \subset E$, ce qui prouve, d'après (19), l'égalité (2).

---

[7]) O. Perron, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$. Math. Zeitschr. 18, p. 42.

Nous avons ainsi démontré que la condition du Théorème est nécessaire.

La condition est suffisante. Dans ma Note citée, j'ai démontré que *l'ensemble L_f est toujours un ensemble (A), quelle que soit la fonction $f(x, y)$ définie dans C* (C = cercle-unité)[8]).

Voici la marche du raisonnement *qui ne dépend pas ici de la nature du domaine fondamental:*

On montre que l'ensemble Z des points η est borelien et que la fonction $l(\eta)$ définie sur Z par (1) est une fonction de Baire relativement à Z. Puis, on s'assure que l'ensemble L_f coïncide avec l'ensemble des valeurs de $l(\eta)$. Il en résulte, d'après un théorème de M. Sierpinski[9]), que L_f est un ensemble (A).

Notre Théorème est ainsi démontré.

---

[8]) V. Fund. Math. t. XVIII, p. 83.

[9]) W. Sierpinski, Sur les images de Baire des ensembles linéaires, Fund. Math., t. XIV, p. 198.

(Eingegangen am 12. Dezember 1932.)

Eine geometrische Deutung der Affin-Invarianten einer Raumkurve.

Von

Wolfgang Haack in Danzig-Langfuhr.

Eine Raumkurve besitzt im allgemeinen zwei voneinander unabhängige Invarianten gegenüber raumtreuen affinen Transformationen, die Affin-Krümmung k und die Affin-Windung t. Diese Invarianten werden im folgenden geometrisch gedeutet. Man konstruiert zwei mit der Kurve affin-invariant verbundene Tetraeder, deren sechsfache Rauminhalte gleich $\frac{1}{k^3}$ bzw. $\frac{1}{t^2}$ sind. Aus fünf konsekutiven Tangenten der Raumkurve wird der lineare Schmiegkomplex und ein quadratischer Schmiegkegel bestimmt und daraus das invariante Dreibein und die Affin-Krümmung konstruiert. Zur Affin-Windung führt die Fläche zweiten Grades, die durch drei konsekutive Affin-Hauptnormalen hindurchgeht. Die Rechnung gestaltet sich in Plückerschen Linienkoordinaten sehr einfach, wenn man sich der *Mertens*schen Ketten bedient.

1. Ableitungsgleichungen in Linienkoordinaten.

Um die affine Differential-Geometrie der Raumkurven in Plückerschen Linienkoordinaten zu entwickeln, gehen wir aus von homogenen Koordinaten des projektiven Raumes, in dem eine Ebene W als uneigentliche Ebene festgehalten wird. Beschränken wir uns wie üblich auf die Gruppe der raumtreuen affinen Transformationen, so kann der Vierervektor W der uneigentlichen Ebene so normiert werden, daß seine Komponenten

$$w^1 = 0, \quad w^2 = 0, \quad w^3 = 0, \quad w^4 = 1 \tag{1}$$

sind. Eine beliebige Raumkurve sei gegeben durch den Vektor $x(s)$, dessen vier homogene Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4 so normiert werden, daß für alle Werte von s gilt:

$$x\,W = \sum_1^4 x_i\, w^i = x_4 = 1. \tag{2}$$

Die ersten drei Komponenten $x_1(s)$, $x_2(s)$, $x_3(s)$ seien Funktionen der *Affin-Bogenlänge* s, die mindestens sechsmal stetig differenzierbar sind.

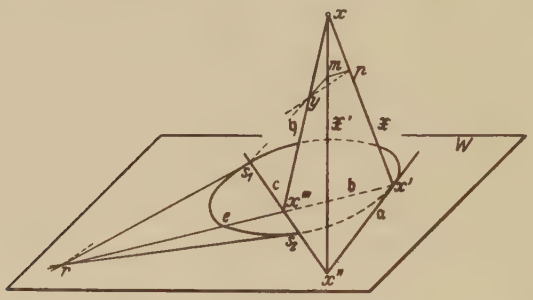
Sie stimmen dann infolge der Normierung mit den inhomogenen *kartesischen* Koordinaten des Punktes x überein. Daher gelten für den Vektor $x(s)$ die bekannten Formeln der affinen Kurventheorie[1]). Die Affin-Bogenlänge wird definiert durch die Determinante

$$|x\,x'\,x''\,x'''| = 1, \tag{3}$$

die *Affin-Krümmung* k und die *Affin-Windung* t durch die Relation[2])

$$x'''' = k\,x'' + t\,x'. \tag{4}$$

Die Geraden, die von dem Kurvenpunkt x nach den uneigentlichen Punkten x', x'', x''' gehen, bestimmen das invariante begleitende Dreibein. Die Plückerschen Linienkoordinaten dieser Geraden, die wir als *Tangente*,



Affin-Hauptnormale und *Affin-Binormale* bezeichnen, werden durch die Determinanten dreier Matrizen gegeben. Es wird

$$\begin{aligned} &\text{die Tangente} && \mathfrak{x} = \|x;\ x'\|, \\ &\text{die Affin-Hauptnormale} && \mathfrak{x}' = \|x;\ x''\|, \\ &\text{die Affin-Binormale} && \mathfrak{y} = \|x;\ x'''\|. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Ebene durch $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}'$ soll die *Affin-Normalebene* heißen. Durch die Normierung (2) der Komponenten von x, sind auch die homogenen Linienkoordinaten (5) normiert.

Zur Vervollständigung des begleitenden Tetraeders nehmen wir die Verbindungsgeraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der uneigentlichen Punkte x', x'', x''' hinzu (siehe Figur). Die Plückerschen Linienkoordinaten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sind die Determinanten der Matrizes

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= -\|x';\ x''\|, \\ \mathfrak{b} &= \ \ \|x';\ x'''\|, \\ \mathfrak{c} &= -\|x'';\ x'''\|. \end{aligned} \tag{6}$$

---

[1]) W. Blaschke, Vorl. über Differential-Geometrie Bd. II, 1923. Im folgenden zitiert als Blaschke II.

[2]) Blaschke II, § 29.

Zur Berechnung der Ableitungsgleichungen sind die Sechservektoren $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ linear zu kombinieren aus den Grundvektoren. Es wird zum Beispiel

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}'' &= \|x'; x''\| + \|x; x'''\|,\\ &= -\mathfrak{a} + \mathfrak{y}\end{aligned}$$

und analog

$$\mathfrak{y}' = \|x'; x'''\| + \|x; x''''\|.$$

Daraus folgt wegen (4)

$$\mathfrak{y}' = \mathfrak{b} + k\,\mathfrak{x}' + t\,\mathfrak{x}.$$

In derselben Weise findet man die übrigen Ableitungsvektoren. Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}&\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}' && ; \quad \mathfrak{a}' = -\mathfrak{b},\\ (7)\qquad &\mathfrak{x}'' = \mathfrak{y} - \mathfrak{a} && ; \quad \mathfrak{b}' = -k\,\mathfrak{a} - \mathfrak{c},\\ &\mathfrak{y}' = t\,\mathfrak{x} + k\,\mathfrak{x}' + \mathfrak{b}; && \quad \mathfrak{c}' = -t\,\mathfrak{a}.\end{aligned}$$

2. Der lineare Schmieg-Komplex.

Der Schmieg-Komplex einer Raumkurve im Punkte x ist derjenige lineare Komplex, der fünf konsekutive Tangenten der Kurve enthält. Durch Differentiation erhält man aus (7)

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}''' &= t\,\mathfrak{x} + \quad k\,\mathfrak{x}' \quad + 2\,\mathfrak{b}\\ (8)\qquad \mathfrak{x}'''' &= t'\,\mathfrak{x} + (t+k')\,\mathfrak{x}' + k\,\mathfrak{y} - 3\,k\,\mathfrak{a} - 2\,\mathfrak{c}.\end{aligned}$$

Die Plückerschen Koordinaten des Schmieg-Komplexes sind die Komponenten eines Sechservektors $\mathfrak{s}$, der auf das Grundtetraeder linear bezogen wird. Man setzt

$$(9)\qquad \mathfrak{s} = \alpha\,\mathfrak{x} + \beta\,\mathfrak{x}' + \gamma\,\mathfrak{y} + \delta\,\mathfrak{a} + \varepsilon\,\mathfrak{b} + \lambda\,\mathfrak{c}$$

und bestimmt die Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ so, daß die Skalarprodukte

$$(10)\qquad (\mathfrak{s}\,\mathfrak{x}) = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{x}') = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{x}'') = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{x}''') = (\mathfrak{s}\,\mathfrak{x}'''') = 0$$

werden. Da das Skalarprodukt zweier sich schneidender Geraden verschwindet, sind nur drei Skalarprodukte zwischen den Grundvektoren von Null verschieden. Diese werden

$$(11)\qquad (\mathfrak{x}\,\mathfrak{c}) = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{b}) = (\mathfrak{y}\,\mathfrak{a}) = -|x\,x'\,x''\,x'''| = -1.$$

Aus (10) folgt dann für den Schmieg-Komplex

$$(12)\qquad \mathfrak{s} = -k\,\mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{a}.$$

Wir betrachten das zum Komplex $\mathfrak{s}$ gehörige Nullsystem. Der Nullpunkt r der uneigentlichen Ebene W bezüglich des Nullsystems hat den Vektor[3])

$$r = W\,\mathfrak{s} = -k\,W\,\mathfrak{x} + W\,\mathfrak{y},$$

[3]) Über das Rechnen mit Linienkoordinaten und Mertens Ketten vgl. etwa: Affine Differential-Geometrie der parabolischen Strahlensysteme § 1. Math. Zeitschr. 31 (1931), S. 233 f.

also nach Gleichung (5)

$$r = -kx' + x''' \tag{13}$$

Die Nullebene des Kurvenpunktes x ist

$$x\mathfrak{s} = -kx\mathfrak{x} + x\mathfrak{y} + x\mathfrak{a} = x\mathfrak{a},$$

d. h. die Schmiegebene der Kurve. Die Verbindungsgerade $\mathfrak{r}$ von x und r

$$\mathfrak{r} = \|x;\ r\| = -k\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \tag{14}$$

kann als *Achse des Schmieg-Komplexes* bezeichnet werden, sie ist parallel zur elementar-geometrisch definierten Komplexachse.

Durchläuft ein Punkt die Affin-Hauptnormale $\mathfrak{x}'$, so dreht sich die zugehörige Nullebene um $\mathfrak{x}'$. Auf $\mathfrak{x}'$ gibt es dann einen Punkt m, dessen Nullebene mit der Affin-Normalebene der Kurve zusammenfällt, also die Gerade $\mathfrak{y}$ enthält. Schreibt man den Vektor m in der Form

$$m = x + \lambda x'',$$

so wird die Nullebene gegeben durch den Ausdruck

$$m\mathfrak{s} = x\mathfrak{s} + \lambda x''\mathfrak{s}.$$

Soll diese Ebene die Binormale $\mathfrak{y}$ enthalten, so muß die Beziehung bestehen

$$m\mathfrak{s}x''' = 0,$$

da x''' nach Gleichung (5) der uneigentliche Punkt von $\mathfrak{y}$ ist. Man erhält

$$x\mathfrak{s}x''' + \lambda x''\mathfrak{s}x''' = 0$$

und nach (5), (6) und (12)

$$x\mathfrak{a}x''' + \lambda k x''\mathfrak{x}x''' = 0,$$

$$-|xx'x''x'''| + \lambda k|x''xx'x'''| = 0,$$

$$-1 + \lambda k = 0.$$

Also wird

$$m = x + \frac{1}{k}x''. \tag{15}$$

3. Der Schmiegkegel und die geometrische Deutung des Dreibeins.

Legt man durch den betrachteten Kurvenpunkt x die Parallelen zu fünf konsekutiven Tangenten, so bestimmen diese Parallelen einen quadratischen Kegel, der der Schmiegkegel der Kurve im Punkte x heißen soll. Die uneigentliche Kurve dieses Kegels ist der Schmiegkegelschnitt der uneigentlichen Kurve der Tangentenfläche.

Wir führen in der uneigentlichen Ebene homogene Koordinaten ξ, η, ζ ein, die auf die Punkte x', x'', x''' als Grunddreieck bezogen sind, so daß gilt:

$$x' = \begin{cases} \xi = 1 \\ \eta = 0; \\ \zeta = 0 \end{cases} \quad x'' = \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 1; \\ \zeta = 0 \end{cases} \quad x''' = \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = 0. \\ \zeta = 1 \end{cases} \tag{16}$$

Für die uneigentliche Kurve z der Tangentenfläche gilt die Reihenentwicklung

$$z = x' + s\,x'' + \frac{s^2}{2}x''' + \frac{s^3}{3!}x'''' + \frac{s^4}{4!}x^{\mathrm{V}} + \ldots$$

Nach Gleichung (5) und (8) wird

$$\begin{aligned} x'''' &= W\,\mathfrak{x}''' = t\,x' + k\,x'', \\ x^{\mathrm{V}} &= W\,\mathfrak{x}'''' = t'\,x' + (t + k')\,x'' + k\,x'''. \end{aligned} \tag{17}$$

Danach erhält man für z in den ξ-, η-, ζ-Koordinaten die Entwicklungen

$$z = \begin{cases} \xi = 1 + \frac{1}{3!}s^3 t + \frac{1}{4!}s^4 t' + \ldots \\ \eta = s + \frac{1}{3!}s^3 k + \frac{1}{4!}s^4 (t + k') + \ldots \\ \zeta = \frac{s^2}{2} + \frac{1}{4!}s^4 k + \ldots \end{cases} \tag{18}$$

Setzt man diese Reihen in die allgemeine Kegelschnittgleichung

$$\alpha_1 \xi^2 + 2\,\alpha_2 \xi\,\eta + \alpha_3 \eta^2 + 2\,\alpha_4 \eta\,\zeta + 2\,\alpha_5 \xi\,\zeta + \alpha_6 \zeta^2 = 0$$

ein, ordnet nach Potenzen von s und setzt die Koeffizienten der ersten vier Potenzen gleich Null, so erhält man für die uneigentliche Kurve des Schmiegkegels

$$\eta^2 - 2\,\xi\,\zeta - k\,\zeta^2 = 0. \tag{19}$$

Die Polare der Affin-Normalebene bezüglich des Schmiegkegels ist die Gerade, die x mit dem Pol r der uneigentlichen Geraden $\mathfrak{c}$ ($\xi = 0$) verbindet. Für den Pol r erhält man aus (19) die Koordinaten

$$\eta = 0; \quad \xi + k\,\zeta = 0,$$

und nach (16) den Vektor

$$r = -k\,x' + x'''.$$

Ein Vergleich mit (13) und (14) zeigt, daß die Polare der Affin-Normalebene bezüglich des Schmiegkegels mit der Achse des Schmieg-Komplexes zusammenfällt. Damit gewinnt man (s. Figur) eine

Geometrische Deutung des begleitenden Dreibeins: Man bestimmt den Schmiegkegel und den Schmiegkomplex im betrachteten Kurvenpunkt. Dann ist die Affin-Normalebene die Polarebene der Komplexachse $\mathfrak{r}$ *in bezug auf den Schmiegkegel. Ihr Schnitt mit der Schmiegebene der Kurve ist die Affin-Hauptnormale und ihr Schnitt mit der durch die Kurventangente* $\mathfrak{x}$ *und die Komplexachse* $\mathfrak{r}$ *gehenden Ebene die Affin-Binormale.*

An Stelle der Affin-Binormalen $\mathfrak{y}$ verwendet A. Winternitz die Gerade $\bar{\mathfrak{y}} = -\frac{1}{4}k\,\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$, die schon aus der Umgebung vierter Ordnung des

Kurvenpunktes x bestimmt ist[4]). Auch die Gerade $\bar{\eta}$ läßt sich mit Hilfe des Schmiegkegels und Schmiegkomplexes geometrisch deuten: Die Ebene durch die Kurventangente und die Komplexachse schneide den Schmiegkegel in der Geraden e (siehe Punkt e der Figur). Dann sind die Geraden x, η, $\bar{\eta}$, e vier harmonische Strahlen. Damit ist die Lage von $\bar{\eta}$ bestimmt.

4. Deutung der Affin-Krümmung.

Durch die Komplexachse r gehen zwei Tangentenebenen an den Schmiegkegel. Die Berührungserzeugenden sind die Schnittgeraden des Kegels mit der Affin-Normalebene. Ihre uneigentlichen Punkte (s. Figur) besitzen nach Gleichung (19) die homogenen Koordinaten

$$\xi = 0; \quad \eta^2 - k\zeta^2 = 0$$

und daher die Vektoren

$$s_1 = \sqrt{k}\,x'' + x'''; \qquad s_2 = -\sqrt{k}\,x'' + x''' \tag{20}$$

Legt man durch den Punkt m der Affin-Hauptnormalen (Gleichung 15) die parallele Ebene zu einer der beiden durch die Komplexachse gehenden Tangentenebenen des Schmiegkegels (etwa durch s_1), so schneidet diese die Geraden x und η in den Punkten p und y (siehe Figur). Der Punkt y liegt auf der Geraden $\| m; s_1 \|$; daher kann man den Vektor y in der Form annehmen

$$y = m + \lambda s_1 = \left(x + \frac{1}{k}x''\right) + \lambda\,(\sqrt{k}\,x'' + x''')$$

und λ so bestimmen, daß der Ausdruck frei von x'' wird. Man erhält

$$y = x - \frac{1}{\sqrt{k^3}}x''' . \tag{21}$$

Der Punkt p liegt auf der Geraden $\| y; r \|$. Man setzt wieder

$$p = y + \mu r = \left(x - \frac{1}{\sqrt{k^3}}x'''\right) + \mu\,(-kx' + x''')$$

und erhält

$$p = x - \frac{1}{\sqrt{k}}x'. \tag{22}$$

Das Tetraeder mit den Eckpunkten x, m, y, p hat das Volumen

$$\frac{1}{6}\,|\,x\,m\,y\,p\,| = \frac{1}{6\,k^3}.$$

Es gilt also der

Satz 1. *Es sei m der Nullpunkt der Affin-Normalebene in bezug auf den Schmieg-Komplex. Legt man durch m die Ebene, die parallel zu einer*

[4]) Vgl. Blaschke II, § 30 und S. 99, Aufgabe 1.

der beiden, durch die Komplexachse gehenden Tangentenebenen des Schmiegkegels ist, so schneidet diese von dem begleitenden Dreibein der Kurve ein Tetraeder ab, dessen sechsfaches Volumen gleich $\frac{1}{k^3}$ *ist.*

5. Normalenregulus und geometrische Deutung der Affin-Windung.

Durch drei konsekutive Affin-Hauptnormalen der Raumkurve wird eine Fläche zweiten Grades bestimmt. Diejenige Schar von Erzeugenden dieser Fläche zweiten Grades, der die drei Hauptnormalen angehören, nennen wir den *Normalenregulus*. Die Affin-Hauptnormale ist $\mathfrak{x}'$. Daher besteht der Regulus aus den Geraden der Linearkombination

$$\mathfrak{h} = \alpha\,\mathfrak{x}' + \beta\,\mathfrak{x}'' + \gamma\,\mathfrak{x}'''.$$

Nach Gleichung (7) und (8) erhält man

$$\mathfrak{h} = \alpha\,\mathfrak{x}' + \beta\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{a}) + \gamma\,(t\,\mathfrak{x} + k\,\mathfrak{x}' + 2\,\mathfrak{b}).$$

Soll $\mathfrak{h}$ eine Gerade sein, so muß das Skalarprodukt $(\mathfrak{h}\,\mathfrak{h})$ verschwinden. Nach Gleichung (11) wird

$$(\mathfrak{h}\,\mathfrak{h}) = 2\,\beta^2 - 4\,k\,\gamma^2 - 4\,\alpha\,\gamma = 0.$$

Daraus folgt für die Erzeugenden des Regulus

$$\mathfrak{h} = \beta^2\,\mathfrak{x}' + 2\,\beta\,\gamma\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{a}) + 2\,\gamma^2\,(t\,\mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{b}). \tag{23}$$

Der Mittelpunkt der Fläche zweiten Grades, die den Regulus enthält, wird gegeben durch den Vektor[5])

$$n = W\,\mathfrak{x}'\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{a})\,(t\,\mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{b}) - W\,(t\,\mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{b})\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{a})\,\mathfrak{x}'.$$

Die Berechnung der Ketten ergibt:

$$\begin{aligned} W\,\mathfrak{x}'\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{a})\,(t\,\mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{b}) &= W\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}\,(t\,\mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{b}), \\ &= t\,W\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{x} + 2\,W\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{b}, \\ &= t\,W\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y} - 2\,W\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{y}, \\ &= t\,W\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y} + 2\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{x}')\,W\,\mathfrak{y}, \\ &= t\,x - 2\,x''', \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} W\,(t\,\mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{b})\,(\mathfrak{y} - \mathfrak{a})\,\mathfrak{x}' &= t\,W\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}', \\ &= -\,t\,W\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y} = -\,t\,x. \end{aligned}$$

Normiert man n noch so, daß $n\,W = 1$ ist, dann erhält man schließlich für den *Mittelpunkt des Normalenregulus*

$$n = x - \frac{1}{t}\,x'''. \tag{24}$$

Der Punkt n liegt also auf der Affin-Binormalen.

[5]) Vgl. parabolische Strahlensysteme, S. 240 (s. Anm. 3).

Legt man durch n die Parallele zur Komplexachse, so schneidet diese die Tangente $\mathfrak{x}$ im Punkte

$$d = n + \mu r$$
$$= \left(x - \frac{1}{t} x'''\right) + \mu(-k x' + x''').$$

Man erhält

$$d = x - \frac{k}{t} x'. \tag{25}$$

Aus den Gleichungen (15), (24) und (25) folgt für die Determinante

$$|x\, n\, m\, d| = |x\, x'\, x''\, x'''| \cdot \frac{1}{t^2}.$$

Es gilt also der

Satz 2. *Ist n der Mittelpunkt des Normalenregulus und ist m der Nullpunkt der Normalenebene der Kurve bezüglich des Schmieg-Komplexes, so schneidet die durch m und n gehende, zur Komplexachse parallele Ebene von dem begleitenden Dreibein $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}$ ein Tetraeder ab, dessen sechsfaches Volumen gleich $\frac{1}{t^2}$ ist.*

(Eingegangen am 11. Januar 1933.)

On Approximation to an Analytic Function by Rational Functions of Best Approximation[1].

By

J. L. Walsh of Cambridge (Mass.)

---

1. Introduction. Let C be an arbitrary closed Jordan region in the plane of the complex variable z, and let the function $f(z)$ be analytic interior to C, continuous in the corresponding closed region. For each pair of values of m and n, there exists (see § 6, below) a rational function of the form

$$(1)\quad r_{m,n}(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n}, \quad b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n \not\equiv 0,$$

which approximates best in the sense of Tchebycheff to $f(z)$ in C. That is to say, there exists a rational function $r_{mn}(z)$ for which the expression

$$\max |f(z) - r_{mn}(z)|, \quad z \text{ in } C,$$

takes on its least value. We denote by $R_{mn}(z)$ this rational function of best approximation; the function $R_{mn}(z)$ need not be unique, but the notation is used to represent any such function. Thus there results a table of double entry not necessarily uniquely defined

$$(2)\quad \begin{array}{llll} R_{00}(z), & R_{01}(z), & R_{02}(z), & \ldots, \\ R_{10}(z), & R_{11}(z), & R_{12}(z), & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

and it is of interest to study the convergence of various sequences formed from the table (2). In the present note it is our purpose to prove the most elementary results regarding such convergence.

Table (2) is entirely analogous to the table of rational fractions of form (1) constructed for a given analytic function $\varphi(z)$ by Padé, with the requirement that the fraction $\varrho_{m,n}(z)$ of the table should be the fraction of form (1) which has contact of highest order with $\varphi(z)$ at the origin. The study of the convergence of various sequences of the fractions $\varrho_{mn}(z)$ is of much interest, but quite difficult. Padé considers various continued fractions which can be formed from sequences of

---

[1]) Presented to the Amer. Math. Soc. Oct. 29, 1932.

functions chosen from the $\varrho_{mn}(z)$. Similarly, continued fractions can be made from various sequences of the functions $R_{mn}(z)$.

In our present table (2) it is to be noted that any function $R_{pq}(z)$ is also a function $r_{p+k,\,q+l}(z)$, $k > 0$, $l > 0$. Thus if we introduce the notation

$$\mu_{m,n} = \max |f(z) - R_{m,n}(z)|, \quad z \text{ in } C,$$

we have the doubly infinite array corresponding to (2):

$$\begin{array}{l} \mu_{00},\ \mu_{01},\ \mu_{02},\ \cdots, \\ \mu_{10},\ \mu_{11},\ \mu_{12},\ \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{3}$$

in which the relation

$$\mu_{p+k,\,q+l} \leqq \mu_{p,q} \tag{4}$$

holds whenever k and l are positive.

2. Special Sequences. The sequence $R_{00}(z)$, $R_{10}(z)$, $R_{20}(z)$, ... is precisely the sequence of polynomials of best approximation to $f(z)$ on C in the sense of Tchebycheff. Under the hypothesis made on $f(z)$ it is known[2]) that we have

$$\lim_{m \to \infty} R_{m0}(z) = f(z)$$

uniformly for z in C. This fact can be expressed as

Lemma I. *We have*

$$\lim_{m \to \infty} \mu_{m0} = 0.$$

The sequence $R_{00}(z)$, $R_{01}(z)$, $R_{02}(z)$, ... consists of zeros or the reciprocals of polynomials. A function $R_{0n}(z)$ which does not vanish identically cannot vanish interior to C. Hence, if the function $f(z)$ does not vanish identically but has one or more zeros interior to C, the equation

$$\lim_{n \to \infty} R_{0n}(z) = f(z), \text{ uniformly for } z \text{ in } C, \tag{5}$$

is impossible. For by a well known theorem due to Hurwitz, condition (5), where $f(z)$ does not vanish identically, implies that $R_{0n}(z)$ actually takes on the value zero interior to C for n sufficiently large. However, if the function $f(z)$ does not vanish on or within C, we can readily establish equation (5):

---

[2]) Walsh, Math. Annalen 96 (1926), S. 430—436.

Lemma II. *If $f(z)$ is different from zero in the closed region C, then we have*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{0n} = 0.$$

The proof is easy; the function $F(z) = 1/f(z)$ is analytic interior to C and continuous in the corresponding closed region. Hence (by Lemma I) there exist polynomials $P_n(z) = c_{0n}z^n + c_{1n}z^{n-1} + \ldots + c_{nn}$ such that we have

$$\lim_{n\to\infty} [\max |f(z) - P_n(z)|,\ z \text{ in } C] = 0.$$

Consequently we may set $r_{0n}(z) = 1/P_n(z)$, at least for n sufficiently large, whence follows

$$\lim_{n\to\infty} r_{0n}(z) = 1/F(z) = f(z), \quad \text{uniformly for } z \text{ in } C.$$

Since this equation holds for the functions $r_{0n}(z)$, the equation holds also if the functions $r_{0n}(z)$ are replaced by the $R_{0n}(z)$, and this is merely another way of stating the conclusion of Lemma II.

Lemma II can be slightly generalized, to admit the case that $f(z)$ vanishes on the boundary of C:

Lemma III. *If $f(z)$ does not vanish interior to C, then we have*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{0n} = 0. \tag{6}$$

Let the interior of C be mapped onto the interior of the unit circle γ of the w-plane by a transformation $w = \varphi(z)$, $z = \psi(w)$. The function $\Psi(w) = f[\psi(w)]$ is continuous on and within C; it may vanish on the circumference γ but does not vanish interior to γ. The function $\Psi(rw)$, where r is positive and slightly less than unity, is analytic and different from zero on and within γ and approximates uniformly the function $\Psi(w)$ in the closed interior of γ. More explicitly, if an arbitrary ϵ be given, then r exists, $0 < r < 1$, such that we have $|\Psi(w) - \Psi(rw)| < \epsilon$ for w on and within γ.

For approximation by rational functions to the function $\Psi[r\varphi(z)]$, which is analytic interior to C, continuous and different from zero in the corresponding closed region, we have by Lemma II,

$$\lim_{n\to\infty} \mu'_{0n} = 0,$$

where μ'_{0n} refers to the approximation not of $f(z)$ but of $\Psi[r\varphi(z)]$. But for suitable choice of r we have

$$|f(z) - \Psi[r\varphi(z)]| < \epsilon, \quad \text{for } z \text{ in } C.$$

Thus we have

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_{0n} \leqq \epsilon,$$

which implies (6).

We are now in a position to prove

Theorem I. *If the function $f(z)$ is analytic and different from zero interior to the Jordan region C and is continuous in the corresponding closed region, then for any infinite sequence of distinct functions formed from* (2) *we have*

$$\lim R_{m\,n}(z) = f(z) \tag{7}$$

uniformly for z in the closed region C.

If Theorem I is not true, there exists some sequence of numbers μ_{mn} from the array (3) which does not approach zero. There exists some subsequence of this sequence which likewise does not approach zero and which is such that either the first subscript becomes infinite or the second subscript becomes infinite. This contradicts (4) and Lemma I or Lemma III. The proof of Theorem I is complete.

It may be noticed too that equation (7) is valid uniformly for z in the closed region C in the sense of the double limit as m and n become infinite. The proof follows immediately out of (4).

3. Functions Which Vanish in the Region of Approximation. We shall now establish a generalization of Theorem I, to include the case that $f(z)$ vanishes interior to C:

Theorem II. *If the function $f(z)$ is analytic interior to the Jordan region C, continuous in the corresponding closed region, and has precisely ν zeros interior to C, then for any infinite sequence of functions formed from the array*

$$\begin{array}{llll} R_{\nu 0}(z), & R_{\nu 1}(z), & R_{\nu 2}(z), & \ldots, \\ R_{\nu+1,0}(z), & R_{\nu+1,1}(z), & R_{\nu+1,2}(z), & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \end{array} \tag{8}$$

we have (7) *valid uniformly for z in the closed region C.*

In Theorem II each root of $f(z)$ is supposed to be counted according to its multiplicity. Let us denote these roots by $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ respectively. In the array (2) formed for approximation to the function[3])

$$F(z) = \frac{f(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_\nu)}$$

we know by Theorem I that any sequence, say $\sigma_{m,n}(z)$, approaches $F(z)$ uniformly on C. Then we have

$$\lim [(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_\nu)\sigma_{m\,n}(z)] = f(z) \tag{9}$$

[3]) To be sure, this function has artificial singularities at $z = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, but we consider the function defined so that these artificial singularities are removed. Similarly below.

uniformly for z in C. The rational function in the left-hand member of (9) is precisely of the form of the rational function of the array (8), in the $(m+1)$st row and $(n+1)$st column. The obvious inequality

$$\max\left[|f(z)-(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_\nu)\,\sigma_{mn}(z)|,\ z \text{ on } C\right] \geqq \max\left[|f(z)-R_{m+\nu,n}(z)|,\ z \text{ on } C\right],$$

now yields Theorem II.

Another way of expressing Theorem II is the following:

If the function $f(z)$ is analytic interior to the Jordan region C, continuous in the corresponding closed region, and has precisely ν zeros interior to C, then for any infinite sequence of functions formed from (2) *such that the first subscript has no limit value less than ν, we have* (7) *valid uniformly for z in the closed region C.*

It is clear from Hurwitz's theorem that if $f(z)$ satisfies the hypothesis of Theorem II, no sequence of functions formed from (2) can imply (7) uniformly in the closed region C, unless the first subscript of the functions of the sequence has no limit value less than ν.

4. Functions with Infinitely Many Zeros. This new formulation of Theorem II suggests another theorem; here the function $f(z)$ may have infinitely many zeros interior to C:

Theorem III. *If the function $f(z)$ is analytic interior to the Jordan region C and continuous in the corresponding closed region, then for any infinite sequence of functions formed from the array* (2) *such that the first subscript becomes infinite, equation* (7) *is valid uniformly for z in the closed region C.*

Let us assume the theorem false; we shall reach a contradiction. There exists some infinite subsequence μ'_{mn} of the μ_{mn} such that the first subscript becomes infinite and with the property

$$\overline{\lim}\ \mu'_{mn} = \mu > 0. \tag{10}$$

We introduce, as in the proof of Lemma III, the functions $\Psi(w) = f[\psi(w)]$ and $\Psi(rw) = f[\psi(rw)]$. The number r is to be chosen so that we have $|\Psi(w) - \Psi(rw)| < \mu/2$ for w on and within γ. The function $\Psi(rw)$ has at most a finite number ν of zeros interior to γ.

The function $\Psi[r\varphi(z)]$ has at most ν zeros interior to C, so we have by Theorem II for any subsequence $\sigma_{mn}(z)$ of the array (8) corresponding to this function $\Psi[r\varphi(z)]$,

$$\lim\left[\max|\Psi[r\varphi(z)] - \sigma_{mn}(z)|,\ z \text{ on } C\right] = 0.$$

The relation $|f(z) - \Psi[r\varphi(z)]| < \mu/2$, z on C, then yields at once

$$\overline{\lim}\ \mu'_{mn} \leqq \mu/2,$$

in contradiction to (10). This contradiction completes the proof of Theorem III.

It is clear that if the function $f(z)$ of Theorem III actually has infinitely many zeros interior to C, then equation (7) can be valid uniformly for z in the closed region C for a particular infinite sequence of functions formed from (2) only if the first subscript becomes infinite.

Theorems I, II and III can be combined into a single statement:

Let $f(z)$ be analytic interior to the Jordan region C, and continuous in the corresponding closed region. Then any infinite sequence of the $R_{mn}(z)$, for which the first subscript has no lower limit less than the number of zeros of $f(z)$ interior to C, converges to $f(z)$ uniformly in the closed region C.

The formation of the table (2) does not depend essentially on the fact that C is a region or that $f(z)$ is analytic. By means of Theorem I can be proved without great difficulty for the functions $R_{mn}(z)$ in the obvious extended sense,

Theorem IV. *If the function $f(z)$ is continuous on the Jordan arc C, then for any infinite sequence of functions formed from* (2) *we have*

$$\lim R_{mn}(z) = f(z)$$

uniformly for z on C.

We leave the proof to the reader.

5. Degree of Convergence. If the function $f(z)$ considered in § 1 is analytic in the *closed* region C, it is of interest to study the degree of convergence of various sequences [that is, the asymptotic character of the μ_{mn} of (3)] and the regions of convergence of the sequences. This we do in some detail for the case $m = 0$.

Let the exterior of C be mapped conformally onto the exterior of the unit circle of the w-plane so that the points at infinity correspond to each other. Let the transform in the z-plane of the circle $|w| = R > 1$ be denoted by C_R. Then if $f(z)$ is analytic on and within C_R, the inequality

$$\lim_{m \to \infty} R_{m0}(z) = f(z)$$

is valid for z on and within C_R, and the inequality

$$\mu_{m0} \leqq M/R^m \tag{11}$$

is valid for suitably chosen M [4]).

---

[4]) Faber, Crelle's Journal **150** (1920), S. 79—106; S. 105. Walsh, Trans. Amer. Math. Soc. **32** (1930), S. 335–390: § 6.

Indeed, it can be proved[5]) that the inequality

$$|f(z) - r_{m0}(z)| \leqq M/R^m, \; z \text{ on } C,$$

always implies

$$\lim_{m \to \infty} r_{m0}(z) = f(z) \tag{12}$$

for z within C_R, uniformly for z on any closed set interior to C_R.

The general extension of the results just mentioned to more general sequences $R_{mn}(z)$ and μ_{mn} seems to be difficult, but we can at least make a beginning by proving

Theorem V. *Let C be an arbitrary closed Jordan region and $f(z)$ a function analytic in C and meromorphic and different from zero on and within C_R. Then there exist polynomials $p_n(z)$ of respective degrees n such that we have*

$$|f(z) - 1/p_n(z)| \leqq M/R^n, \quad R > 1, \tag{13}$$

for z on C.

If polynomials $p_n(z)$ of respective degrees n exist such that (13) *is valid for z on C, and if $f(z)$ does not vanish identically on C, then the function $f(z)$ is analytic in C and meromorphic and different from zero interior to C_R. The sequence $1/p_n(z)$ approaches $f(z)$ for z interior to C_R, uniformly for z on any closed point set interior to C_R on which $f(z)$ has no poles.*

Under the hypothesis made in the first part of this theorem, the function $1/f(z)$ is analytic on and within C, so by (11) there exist polynomials $p_n(z)$ such that we have

$$|p_n(z) - 1/f(z)| \leqq M_1/R^n, \; z \text{ on } C. \tag{14}$$

Thus we have

$$|1/p_n(z) - f(z)| = \left| \frac{f(z)}{p_n(z)} \left[p_n(z) - \frac{1}{f(z)} \right] \right|.$$

For n sufficiently large the quotient $1/p_n(z)$ approaches $f(z)$ uniformly and hence is uniformly limited for z on C. If some of the early polynomials $p_n(z)$ vanish on C, they may be replaced by polynomials of the same degree which do not vanish on C, with possible modification of the constant M_1 in (14). The totality of these new polynomials is bounded from zero on C. Thus (14) implies (13).

Reciprocally, let the polynomials $p_n(z)$ be given so that (13) is valid. Let us suppose first that $f(z)$ does not vanish on C. We can write

$$\left| p_n(z) - \frac{1}{f(z)} \right| = \left| \frac{p_n(z)}{f(z)} \left[\frac{1}{p_n(z)} - f(z) \right] \right|. \tag{15}$$

---

[5]) Walsh, Münchner Berichte 1926, S. 223—229.

The function $f(z)$ does not vanish on C, and hence the polynomials $p_n(z)$ are uniformly limited on C. Thus we have

$$\left| p_n(z) - \frac{1}{f(z)} \right| \leqq \frac{M}{R^n}, \quad z \text{ on } C.$$

It follows by (12) that we have

$$\lim_{n \to \infty} p_n(z) = \frac{1}{f(z)} \tag{16}$$

for z interior to C_R, uniformly on any closed point set interior to C_R. The function $f(z)$ can have no poles on C, by (13) for $n = 0$. Hence the conclusion follows as stated, under the assumption that $f(z)$ does not vanish on C.

The function $f(z)$ cannot vanish *interior* to C, by Hurwitz's theorem, for the function $1/p_n(z)$ cannot vanish and hence its limit function interior to C either vanishes identically or does not vanish at all. The case that $f(z)$ conceivably vanishes on the boundary of C remains to be considered. Denote by C' an arbitrary Jordan curve interior to C. Then on C' inequality (13) is valid and $f(z)$ does not vanish, so we can apply the reasoning used for (15). It follows that (16) is valid for z interior to C'_R, uniformly on any closed point set interior to C'_R; the notation C'_R naturally indicates the transform of $|w| = R > 1$ when the exterior of C' is mapped onto the exterior of $|w| = 1$ so that the points at infinity in the w- and z-planes correspond to each other. But if C' interior to C is allowed to approach the boundary of C uniformly, the curve C'_R also approaches C_R uniformly, and this gives a complete proof of Theorem V.

In Theorem V we have insisted on inequality (13) for *all* values of n, in particular for $n = 0$, which implies the analyticity of $f(z)$ on C. This requirement is in accord with our discussion of § 1. If inequality (13) is required merely for n sufficiently large, it is then possible to study approximation to functions which are meromorphic (instead of analytic) on C, with results analogous to Theorem V.

The reader may notice that Theorem V is true even if C is not required to be a Jordan region, but is allowed to be a Jordan arc or even a much more general point set.

It is rather remarkable that there seems to be no analogue of the second part of Theorem V in the case that $f(z)$ vanishes identically. Indeed, if we set

$$p_n(z) = n!\, n^{2n} \left(z - 1 - \frac{1}{n} \right)^n,$$

then we have

$$\left| \frac{1}{p_n(z)} \right| \leqq \frac{1}{n!\, n^n}, \qquad \text{for } |z| \leqq 1,$$

so that $1/p_n(z)$ approaches zero with fair rapidity, yet the equation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0$$

is uniformly valid in no region $|z| \leqq r > 1$. This example can clearly be modified so as to give an *arbitrary* preassigned degree of approximation of $p_n(z)$ to the function zero, for $|z| \leqq 1$, yet so that the equation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n(z)} = 0$$

is valid uniformly in no region $|z| \leqq r > 1$.

Theorem V has immediate and obvious application to the study of the numbers μ_{mn} and the functions $R_{mn}(z)$. The first and second parts of Theorem V yield respectively the first and second parts of

Theorem VI. *If C is an arbitrary closed Jordan region and $f(z)$ is a function analytic in C and meromorphic and different from zero on and within C_R, then we have*

$$\mu_{0n} \leqq \frac{M}{R^n}, \tag{17}$$

where M is suitably chosen, and

$$\lim_{n\to\infty} R_{0n}(z) = f(z),$$

uniformly for z on any closed point set on which $f(z)$ is analytic on and within C_R.

Thus, if $f(z)$ is analytic on C and meromorphic and different from zero interior to C_ϱ but has a zero or a non-polar singularity on C_ϱ, then (17) holds for an arbitrary R less than ϱ but for no R greater than ϱ, and the equation

$$\lim_{n\to\infty} R_{0n}(z) = f(z)$$

holds uniformly on any closed point set on which $f(z)$ is analytic interior to C_ϱ; this equation can be shown to hold uniformly in no region containing in its interior a point of C_ϱ [6]).

The second part of Theorem VI is the precise analogue of the corresponding result for the Padé table. If $\varphi(z)$ is analytic and different from zero at the origin, then the fraction $\varrho_{0n}(z)$ of Padé is the reciprocal of the first $n+1$ terms of the Maclaurin development of $1/\varphi(z)$. The relation

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varrho_{0n}(z)} = \frac{1}{\varphi(z)}$$

---

[6]) Compare Walsh, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), S. 370—388; § 9.

is valid uniformly on and within any circle whose center is the origin and which has on or within it no singularity of $1/\varphi(z)$. Then the relation

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_{0n}(z) = \varphi(z)$$

is valid uniformly on and within any circle whose center is the origin and which has on or within it no singularity and no zero of $\varphi(z)$, and indeed is valid uniformly on any closed point set which contains no pole of $\varphi(z)$ and which lies within the largest circle whose center is the origin and whose interior contains no zero and no non-polar singularity of $\varphi(z)$.

6. The rational function $R_{mn}(z)$ exists but need not be unique. We shall not give a proof of the following theorem, but content ourselves with the remark that the proof can be given easily by methods used elsewhere [7]) by the writer in similar situations.

If the function $f(z)$ is defined and continuous on a point set C which is dense in itself, and if for given values of m and n there exists at least one rational function $r_{mn}(z)$ such that $|f(z) - r_{mn}(z)|$ is limited on C, then there exists at least one rational function $R_{mn}(z)$ — namely a function $r_{mn}(z)$ such that

$$\overline{\text{bound}}\,[|f(z) - r_{mn}(z)|,\ z \text{ on } C]$$

is least.

For the particular case $n = 0$, Tonelli has shown the uniqueness of the function $R_{mn}(z)$, provided the point set C contains at least $m + 1$ points and is closed and limited. Even those restrictions on C do not ensure the uniqueness of $R_{mn}(z)$ for general values of n, and this situation is not improved if we restrict C to be a closed Jordan region in which $f(z)$ is analytic. We illustrate the lack of uniqueness of $R_{mn}(z)$ by an example.

Denote by γ the unit circle $|z| = 1$, by a the point on γ in the second quadrant whose abscissa is $-.9$, by b the point on γ in the third quadrant whose abscissa is $-.9$. Denote by C_1 the circular arc terminated by a and b and passing through the point $(.9, 0)$. Denote by C_2 the circular arc terminated by a and b and passing through the point $(10/9, 0)$. The region C shall be the Jordan region bounded by these two circular arcs, and the function $f(z)$ shall be $z + 1/z$. It will be noted that this entire configuration is unchanged if we make the substitution $w = 1/z$.

---

[7]) Trans. Amer. Math. Soc. **33** (1931), S. 668—689, especially §§ 1—4.

For the particular situation just described, we do not have $R_{11}(z)$ identically equal to a constant. Indeed, a constant $R_{11}(z)$ would involve a maximum error

$$|f(z) - R_{11}(z)|$$

of at least 1.8, for we have $f(a) = -1.8$, $f(10/9) = 181/90 > 1.8$. Yet the function $r_{11}(z) = 1/z$ involves a maximum error

$$|f(z) - r_{11}(z)| = |z|$$

of no more than 10/9. No matter what the function $R_{11}(z)$ may be, then, the function $R_{11}(1/z)$, is also a function $R_{11}(z)$, by the properties of the original configuration. The two functions $R_{11}(z)$ and $R_{11}(1/z)$ are distinct, for any two functions $r_{11}(z)$ and $r_{11}(1/z)$ are distinct unless constant. That is to say, there can be no unique function $R_{11}(z)$.

The example just given disposes of the case that C is a Jordan region; if a region bounded by an *analytic* Jordan curve is desired, for which the function $R_{11}(z)$ is not unique, it is readily obtained by a slight modification of the example just given. It is perhaps interesting, however, to indicate in detail that the example can be modified to show that if $f(z)$ is analytic on an analytic Jordan arc C, then the function $R_{mn}(z)$ is not necessarily unique.

The Jordan arc C shall be the arc of γ teminated by a and b and containing the point $z = 1$, and again we choose $f(z) = z + 1/z$. The configuration is unchanged by the substitution $w = 1/z$. The function $R_{11}(z)$ cannot be constant, for a constant $R_{11}(z)$ would involve a maximum error $|f(z) - R_{11}(z)|$ of at least 1.8, since $f(a) = -1.8$, $f(1) = 2 > 1.8$. Yet the function $r_{11}(z) = 1/z$ involves a maximum error

$$|f(z) - r_{11}(z)| = |z|$$

of no more than unity. No matter what the function $R_{11}(z)$ may be, then, the function $R_{11}(1/z)$ is also a function $R_{11}(z)$ and distinct from the original one, so the function $R_{11}(z)$ cannot be unique.

We have thus given examples to show that the function $R_{mn}(z)$ need not be unique. That function may of course be unique for all values of m and n in particular non-trivial cases, such as

$$f(z) \equiv z, \quad C: \ |z| \leqq 1.$$

7. Further Problems. The present paper clearly makes only a beginning in the study of the main problems, the convergence of sequences formed from (2) and the asymptotic behavior of table (3). There are many other problems suggested by the discussion given, some of which we shall now mention.

1. The study in more detail [in addition to (4), (11), (17)] of the asymptotic character of table (3). This asymptotic character depends at least to some extent on the location of the singularities of the function $f(z)$ and on the zeros (both interior and exterior to C) of $f(z)$. The methods of § 5 apply to the study of $\mu_{\nu n}$ and $R_{\nu n}(z)$, where $f(z)$ is analytic on and within C and has precisely ν zeros interior to C.

2. The study of the overconvergence of various sequences from (2), when $f(z)$ is known to be analytic in the closed region C. Such a study would presumably involve both problem 1. and the determination of the asymptotic location of the poles of the functions $R_{mn}(z)$. At any rate, certain results do exist[8]) which are based on knowledge of the asymptotic character of the maximum error and the asymptotic location of the poles of the rational functions, and which yield information on overconvergence. Indeed, knowledge of the asymptotic behavior of the poles may be used alone[9]) to establish results on overconvergence.

We are here using the term *overconvergence* in the sense connected with (12), namely that a certain dégree of convergence on a point set may necessarily imply convergence on a larger point set.

It is noteworthy that merely *a rough study of table* (3) *without the knowledge of the asymptotic behavior of the poles of the fonctions* $R_{mn}(z)$, *cannot be used to yield general results on overconvergence.* This we illustrate by a specific example.

Let $f(z)$ be an arbitrary entire function not a polynomial, and C an arbitrary closed Jordan region. Then polynomials $p_n(z)$ of respective degrees n exist such that we have

$$|f(z) - p_n(z)| \leqq \mu_n, \qquad \text{for } z \text{ on } C,$$

where $\mu_n \leqq M/R^n$, R greater than unity is arbitrary, M depends on R. Let the points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ be exterior to C, distinct from the roots of the $p_n(z)$, and everywhere dense in the plane exterior to C. There exist rational functions

$$r_{n+1,1}(z) = \frac{(z - \alpha_n')\, p_n(z)}{z - \alpha_n}, \qquad \alpha_n' \neq \alpha_n,$$

such that we have

$$|p_n(z) - r_{n+1,1}(z)| \leqq \mu_n, \quad z \text{ on } C.$$

Hence we have

$$|f(z) - r_{n+1,1}(z)| \leqq 2\mu_n, \quad z \text{ on } C. \tag{18}$$

---

[8]) Walsh, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), S. 838—847; Amer. Journ. Math. **54** (1932), S. 559—570; Acta Math. **57** (1931), S. 411—435, especially Theorem III.

[9]) Walsh, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932), S. 22—74, especially Theorem IV.

The effective poles of the rational functions $r_{n+1,1}(z)$ are everywhere dense in the plane exterior to C.

That is to say, inequality (18) is valid, and expresses fairly rapid convergence of the sequence $r_{n1}(z)$ to $f(z)$ on C — more rapid convergence than the convergence of any non-trivial geometric series — but the sequence $r_{n1}(z)$ converges to $f(z)$ uniformly in no region exterior to C.

3. As we have already pointed out, if the function $f(z)$ has ν zeros interior to C, no infinite sequence of rational functions chosen from the set

$$\begin{array}{llll} R_{00}(z), & R_{01}(z), & R_{02}(z), & \ldots, \\ R_{10}(z), & R_{11}(z), & R_{12}(z), & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{\nu-1,0}(z), & R_{\nu-1,1}(z), & R_{\nu-1,2}(z), & \ldots, \end{array}$$

can approach $f(z)$ uniformly in C. *What can be said of the convergence of such sequences of rational functions and of the corresponding values of* μ_{pq}? *In general, what can be said of approximation in a region* C *in the sense of Tchebycheff to an analytic function with zeros interior to* C *by polynomials or by more general analytic functions which are required not to vanish interior to* C?

For instance if we choose C as the unit circle and $f(z)$ as the function z, then it can be shown that we have $R_{0n}(z) \equiv 0$, $\mu_{0n} = 1$,

$$\lim_{n \to \infty} R_{0n}(z) = 0, \quad \text{for all values of } z.$$

4. Thus far we have considered the rational functions $R_{mn}(z)$ merely as the *analogues* of Padé's rational functions $\varrho_{mn}(z)$ for approximation to the same original function $f(z)$, The connection is, however, surely closer than this. We indicate a relation for the case $n = 0$, that is, that the rational functions $R_{mn}(z)$ and $\varrho_{mn}(z)$ are polynomials.

If C *is an interval (variable) of the axis of reals, and if* $f(z)$ *is real for real* z *and analytic at the origin, then as* C *approaches the origin the function* $R_{m0}(z)$ *approaches the function* $\varrho_{m0}(z)$, *uniformly for* z *on any limited point set.*

The function $f(z) - R_{m0}(z)$ vanishes at least $m+1$ times in the interval C [10]) — provided merely that C lies in a circle whose center is the origin within which $f(z)$ is analytic. When the interval C approaches the origin, these points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m+1}$ of interpolation of $R_{m0}(z)$ to $f(z)$ necessarily approach the origin.

---

[10]) Borel, Fonctions de variables réelles, Paris 1905. S. 88.

If γ denotes a curve containing in its interior the origin and all the points β_i but no singularity of $f(z)$, we have

$$f(z) - R_{m0}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-\beta_1)\dots(z-\beta_{m+1})\,f(t)\,dt}{(t-\beta_1)\dots(t-\beta_{m+1})\,(t-z)}, \qquad z \text{ interior to } \gamma,$$

$$f(z) - \varrho_{m0}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{m+1}f(t)\,dt}{t^{m+1}(t-z)}, \qquad z \text{ interior to } \gamma.$$

There follows the equation

$$R_{m0}(z) - \varrho_{m0}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{z^{m+1}}{t^{m+1}} - \frac{(z-\beta_1)\dots(z-\beta_{m+1})}{(t-\beta_1)\dots(t-\beta_{m+1})}\right]\frac{f(t)\,dt}{t-z}.$$

Since this equation is valid for z interior to γ it is also valid for z exterior to γ, for the integrand has no singularity in z on γ. Our proposition now follows at once by inspection.

The actual analyticity of the function $f(z)$ at the origin need not be assumed; the existence and continuity of certain derivatives is in fact sufficient.

The following similar result is also true:

If C is a (variable) circle whose center is the origin and if $f(z)$ is analytic at the origin, then as the radius of C approaches zero the function $R_{m0}(z)$ approaches the function $\varrho_{m0}(z)$, uniformly for z on any limited point set.

There undoubtedly exist other ways in which (perhaps the most general of) the functions $\varrho_{mn}(z)$ can be considered as limiting cases of the functions $R_{mn}(z)$.

5. The problem we have mentioned in § 1 can be fruitfully generalized: (a) by approximating to more general functions, say functions meromorphic interior to C, or merely continuous or uniformly limited on C; (b) by allowing C to be a Jordan curve or other point set instead of a Jordan region; (c) by using other measures of approximation, such as a line or surface integral, or the Tchebycheff measure of approximation with a norm function.

In (a), if the function approximated is meromorphic on and within the Jordan curve bounding C, the situation is quite analogous to that studied in § 3, with m and n interchanged. In particular the results of § 5 can be easily extended.

(Eingegangen am 2. Januar 1933.)

Über monotone Matrixfunktionen.

Von

Karl Löwner in Prag.

Einleitung.

Es sei $\chi(\omega)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen ω. Ist ferner $C_n = (c_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ eine reelle symmetrische Matrix n-ten Grades, deren Eigenwerte (d. h. Eigenwerte der zugehörigen quadratischen Form $C_n(x, x) = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k$) dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ angehören, so verstehen wir, wie üblich, unter $\chi(C_n)$ die symmetrische Matrix, die aus C_n entsteht, indem jeder Eigenvektor v beibehalten, der zugehörige Eigenwert λ jedoch durch $\chi(\lambda)$ ersetzt wird. Ist z. B. $\chi(\omega) = \sum_{l=1}^{m} c_l \omega^l$ ein Polynom, so ist bekanntlich $\chi(C_n) = \sum_{l=1}^{m} c_l C_n^l$.

Indem man sich $\chi(X_n)$ für alle in Betracht kommenden Matrizen n-ten Grades X_n gebildet denkt, entsteht eine *Matrixfunktion* von, wie wir sagen wollen, *n-ter Stufe*. Ihr Definitionsbereich besteht also aus allen Matrizen n-ten Grades, deren Eigenwerte dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ angehören.

Liegen zwei Matrizen n-ten Grades $A_n = (a_{ik})$, $B_n = (b_{ik})$ vor und ist identisch in den x_i $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \leqq \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k$, so soll A_n als nicht größer als B_n bezeichnet und hierfür

$$A_n \leq B_n \quad \text{oder} \quad B_n \geq A_n$$

geschrieben werden.

Wir definieren nun: *Eine Matrixfunktion n-ter Stufe $\chi(X_n)$ heißt monoton, wenn für je zwei Matrizen A_n, B_n des Definitionsbereiches von $\chi(X_n)$, die in der obigen Relation zueinander stehen, stets auch*

$$\chi(A_n) \leq \chi(B_n)$$

oder stets

$$\chi(A_n) \geq \chi(B_n)$$

ist. Im ersten Falle ist die Matrixfunktion *monoton wachsend*, im zweiten *monoton abnehmend*. Die Funktion $\chi(\omega)$ selbst soll dann *monoton von n-ter Stufe* genannt werden. Die Monotonie erster Stufe fällt offenbar mit der gewöhnlichen Monotonie zusammen. Im folgenden soll nur von

zunehmenden Funktionen die Rede sein, auf die man sich natürlich beschränken darf.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Charakterisierung der monotonen Funktionen durch Differenzen- bzw. Differentialungleichungen gegeben (§ 1 bis 3). Hierauf werden Interpolationsaufgaben behandelt (§ 4 bis 5). Ein Teil der hier erhaltenen Resultate wird verwendet, um Differenzierbarkeitseigenschaften von Funktionen, die von höherer Stufe monoton sind, herzuleiten (§ 6). Es wird gezeigt, daß eine von n-ter Stufe monotone Funktion ($n \geqq 2$) im Innern ihres Definitionsbereiches mindestens $(2n-3)$-mal stetig differenzierbar ist und in einem beschränkten abgeschlossenen Teile desselben sogar einen beschränkten $(2n-2)$-ten Differenzenquotienten besitzt. Endlich wird die Frage nach den Funktionen aufgeworfen, die von *beliebig hoher Stufe monoton* sind. Es zeigt sich, daß jede solche Funktion *analytisch* ist und, ins Komplexe fortgesetzt, eine in der *ganzen oberen Halbebene reguläre Funktion mit nicht negativem Imaginärteil daselbst* ergibt, und diese Eigenschaften erweisen sich als für die untersuchte Funktionenklasse *charakteristisch*[1]). Im Schlußparagraphen (§ 7) wird eine Verallgemeinerung der Begriffsbildung der monotonen Funktion höherer Stufe angegeben.

§ 1.

Ableitung notwendiger Bedingungen.

Den Betrachtungen seien zwei allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt:

1. Bemerkung: *Die Beziehung zwischen der Matrix C_n und der ihr zugeordneten Matrix $\chi(C_n)$ ist orthogonal invariant.* Dies besagt: Entsteht allgemein $U_n^*(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} u_{ik}^* x_i x_k$ aus $U_n(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} u_{ik} x_i x_k$ durch eine festzuhaltende orthogonale Transformation der Variablen x_i, so gehört (wegen der Orthogonalinvarianz der Eigenwerte) mit $C_n = (c_{ik})$ auch $C_n^* = (c_{ik}^*)$ dem Definitionsbereiche von $\chi(X_n)$ an und es ist

$$\chi(C_n^*) = (\chi(C_n))^*.$$

2. Bemerkung: *Auch die Ungleichung $A_n \leq B_n$ ist eine orthogonal invariante Relation*, d. h. entstehen die Formen

$$A_n^*(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^* x_i x_k, \quad B_n^*(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}^* x_i x_k$$

[1]) Der Versuch, gewisse für diese Funktionen gültige Ungleichungen begrifflich zu deuten, war der ursprüngliche Anlaß zur Entstehung dieser Arbeit. Vergleiche § 6 dieser Arbeit.

aus

$$A_n(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \quad B_n(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k$$

durch *dieselbe* orthogonale Transformation, so ist $A_n^* \leq B_n^*$ mit $A_n \leq B_n$ gleichbedeutend.

Aus diesen einfachen Bemerkungen folgt, daß man, wenn die Monotonie einer Matrixfunktion zum Ausdruck gebracht werden soll, annehmen kann, daß von den beiden Matrizen A_n und B_n jedesmal eine, etwa A_n, auf Hauptachsen gebracht ist. Man kann also schreiben

$$(1) \quad A_n(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \quad B_n(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\tau_{i1} x_1 + \tau_{i2} x_2 + \ldots + \tau_{in} x_n)^2.$$

Darin bedeutet $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$ das System der Eigenwerte von A_n, ferner $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \mu_n$ das Eigenwertsystem von B_n und

$$T = (\tau_{ik})_{i,k=1}^{n}$$

eine orthogonale Matrix.

Aus $A_n \leq B_n$ folgt

$$(2') \qquad \lambda_i \leqq \mu_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Eine weitere Aussage kann gemacht werden, wenn man weiß, aus wie vielen Quadraten von linear unabhängigen Linearformen die definite Form $(B_n - A_n)(x,x)$ zusammengesetzt ist. Ist deren Anzahl r, so gilt neben (2') die Ungleichung

$$(2'') \qquad \mu_i \leqq \lambda_{i+r} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-r).$$

Insbesondere ist für $r \leqq 1$

$$(2''') \qquad \lambda_1 \leqq \mu_1 \leqq \lambda_2 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq \mu_n{}^{2}).$$

Für die folgenden Betrachtungen ist nun von besonderer Wichtigkeit, daß umgekehrt bei willkürlicher Wahl von $2n$ reellen Größen in der Anordnung (2''') die orthogonale Matrix T in (1) so bestimmt werden kann, daß die Differenz $B_n(x,x) - A_n(x,x)$ das Quadrat einer *einzigen* Linearform

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

wird. Wir führen den Beweis unter der Annahme, daß in (2''') lauter Ungleichheitszeichen stehen, also

$$(2) \qquad \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \lambda_n < \mu_n$$

---

[2]) Man beweist die Ungleichungen (2'), (2''), (2''') leicht, indem man die bekannten Minimum-Maximumeigenschaften der Eigenwerte heranzieht.

ist. Die Erweiterung auf die Grenzfälle, die übrigens im folgenden nicht auftreten werden, läßt sich durch Limesbetrachtungen, die dem Leser überlassen bleiben können, leicht erledigen.

Beweis: Setzt man

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = L\,(= A_n), \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = M,$$

so bedeutet die Forderung

$$B_n(x, x) - A_n(x, x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big)^2 \tag{3}$$

in Matrixform

$$T' M T - L = (\alpha_i \alpha_k)$$

oder

$$M T - T L = T(\alpha_i \alpha_k),$$

d. h.

$$(\mu_i - \lambda_k)\tau_{ik} = \alpha_i^* \alpha_k \tag{4}$$

mit

$$\alpha_i^* = \sum_{l=1}^{n} \tau_{il} \alpha_l. \tag{5}$$

Multipliziert man (4) mit α_k, dividiert durch $\mu_i - \lambda_k$ und summiert nachher über k, so erhält man

$$\alpha_i^* = \alpha_i^* \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{\mu_i - \lambda_k}. \tag{6'}$$

Da T eine orthogonale Matrix sein soll und deshalb in jeder ihrer Zeilen ein von Null verschiedenes Element stehen muß, so kann aus (4) auf $\alpha_i^* \neq 0$ geschlossen werden und man kann (6') durch α_i^* kürzen. Man erhält so zur Bestimmung der α_k das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^2}{\mu_i - \lambda_k} = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{6}$$

Ebenso ergibt sich das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^{*2}}{\mu_i - \lambda_k} = 1 \qquad (k = 1, 2, \dots, n) \tag{6*}$$

zur Bestimmung der α_i^*. Bekanntlich ist die Determinante der beiden Gleichungssysteme (6), (6*)

$$\left| \frac{1}{\mu_i - \lambda_k} \right|_{i,k=1}^{n} = (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{\prod_{i<k} (\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k)}{\prod_{i,k} (\mu_i - \lambda_k)},$$

also gewiß von Null verschieden. Durch (6) und (6*) sind also die Quadrate der α_i und α_i^* eindeutig bestimmt. Eine einfache Rechnung ergibt:

$$(7) \qquad \alpha_k^2 = \frac{(\mu_1 - \lambda_k)(\mu_2 - \lambda_k) \dots (\mu_n - \lambda_k)}{(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_2 - \lambda_k) \dots (\lambda_{k-1} - \lambda_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \dots (\lambda_n - \lambda_k)},$$

$$(7^*) \qquad \alpha_i^{*2} = \frac{(\mu_i - \lambda_1)(\mu_i - \lambda_2) \dots (\mu_i - \lambda_n)}{(\mu_i - \mu_1)(\mu_i - \mu_2) \dots (\mu_i - \mu_{i-1})(\mu_i - \mu_{i+1}) \dots (\mu_i - \mu_n)}.$$

Da wir die Anordnung (2) voraussetzen, sind diese Größen *offenbar positiv* und die Wurzeln aus ihnen können *reell* gezogen werden. Damit ist die Matrix der τ_{ik} vermöge (4) bis auf Zeichenänderungen der Zeilen und Kolonnen (Spiegelungen im x- und Bild-Raum an Koordinatenräumen) bestimmt. Man überlegt sich nun leicht, daß tatsächlich jede Vorzeichenwahl für die α_i und α_i^* eine orthogonale Transformation ergibt, welche die Identität (3) zur Folge hat, und daß ferner die α und α^* in der Beziehung (5) zueinander stehen[3]).

Im folgenden sollen die α und α^* stets *positiv* gewählt werden, was offenbar ausreichend ist. Für bald auszuführende Überlegungen ist die Feststellung wichtig, daß bei dieser Vorzeichenfestlegung T eine *eigentliche* Transformation ist, daß also die Determinante von T gleich 1 ist. In der Tat ist die Determinante

$$(8) \qquad |\tau_{ik}|_{i,k=1}^{n} = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{l=1}^{n} \alpha_l \alpha_l^* \cdot \frac{\prod_{i<k} (\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k)}{\prod_{i,k} (\mu_i - \lambda_k)}.$$

Es ist $(\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k) > 0$ $(i \neq k)$ und $\mu_i - \lambda_k$ negativ für $i < k$, sonst positiv. Das Vorzeichen von $\prod_{i,k} (\mu_i - \lambda_k)$ ist also gleich $(-1)^{\binom{n}{2}}$. Alles das ergibt $|\tau_{ik}|_{i,k=1}^{n} > 0$.

Sei nun $\chi(\omega)$ eine monotone Funktion n-ter Stufe und die Werte λ_i und μ_i in der Anordnung (2) ihrem Definitionsbereiche entnommen[4]). Zur Abkürzung werde

$$(9) \qquad \chi(\lambda_i) = \varphi_i, \quad \chi(\mu_i) = \psi_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gesetzt. Wegen der Monotonie von $\chi(X_n)$ muß bei der eben eingeführten Wahl von T die Form

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{n} \psi_i (\tau_{i1} x_1 + \tau_{i2} x_2 + \dots + \tau_{in} x_n)^2 - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x_i^2 \gtreqless 0$$

---

[3]) Wenn in (2) auch Gleichheitszeichen zugelassen werden, erhält man unter Umständen ein ganzes Kontinuum von Matrizen T.

[4]) Es wird angenommen, daß ihr Definitionsbereich aus mindestens $2n$ verschiedenen Werten besteht.

sein. Hieraus folgt bekanntlich, daß auch ihre Diskriminante D nicht negativ sein kann. Bei Einführung der Diagonalmatrizen

$$(11) \qquad F = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \psi_n \end{pmatrix}$$

schreibt sich die Koeffizientenmatrix von (10) in der Form $T'GT - F$, und es ist

$$D = |T'GT - F| = |T'|\,|GT - TF| = |GT - TF|$$
$$= \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\mu_i - \lambda_k} \alpha_i^* \alpha_k \right|_{i,k=1}^{n} = \prod_{l=1}^{n} \alpha_l^* \alpha_l \cdot \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\mu_i - \lambda_k} \right|_{i,k=1}^{n}$$

Dividiert man durch das *positive* Produkt $\prod_{l=1}^{n} \alpha_l^* \alpha_l$, *so ergibt sich das Resultat*:

$$(12) \qquad \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\mu_i - \lambda_k} \right|_{i,k=1}^{n} \geqq 0,$$

welches für monotone Funktionen n-ter Stufe gilt.

Zu weiteren notwendigen Bedingungen gelangt man auf Grund der einfachen Bemerkung: *Ist* $\chi(\omega)$ *monoton von n-ter Stufe* ($n \geqq 2$), *so ist es auch von jeder niedrigeren Stufe monoton.* In der Tat ist für eine *zerfallende* Matrix

$$C_n = \left(\begin{array}{c|c} C_m^1 & 0 \\ \hline 0 & C_{n-m}^2 \end{array} \right)$$

offenbar

$$\chi(C_n) = \left(\begin{array}{c|c} \chi(C_m^1) & 0 \\ \hline 0 & \chi(C_{n-m}^2) \end{array} \right)$$

und für ein Paar *gleichzerfallender* Matrizen

$$A_n = \left(\begin{array}{c|c} A_m^1 & 0 \\ \hline 0 & A_{n-m}^2 \end{array} \right), \quad B_n = \left(\begin{array}{c|c} B_m^1 & 0 \\ \hline 0 & B_{n-m}^2 \end{array} \right)$$

die Ungleichung $A_n \leq B_n$ mit dem Paar von Ungleichungen $A_m^1 \leq B_m^1$, $A_{n-m}^2 \leq B_{n-m}^2$ gleichbedeutend.

Bildet man nun Determinanten von der Form (12), jedoch mit einem kleineren n, so muß wieder bei Festhaltung der (2) entsprechenden Reihenfolge etwas Nicht-negatives entstehen. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\chi(\eta) - \chi(\xi)}{\eta - \xi} = \varkappa(\eta, \xi) \qquad (\xi \neq \eta),$$

so können wir den unsere Überlegungen zusammenfassenden Satz aussprechen:

Für die Monotonie n-ter Stufe von $\chi(\omega)$ ist notwendig, daß für jedes m aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ *die Determinanten*

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} \varkappa(\eta_1, \xi_1) & \varkappa(\eta_1, \xi_2) & \ldots & \varkappa(\eta_1, \xi_m) \\ \varkappa(\eta_2, \xi_1) & \varkappa(\eta_2, \xi_2) & \ldots & \varkappa(\eta_2, \xi_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varkappa(\eta_m, \xi_1) & \varkappa(\eta_m, \xi_2) & \ldots & \varkappa(\eta_m, \xi_m) \end{vmatrix} \geqq 0$$

sind, wie auch die Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ *dem Definitionsbereiche von* $\chi(\omega)$ *entnommen sind, falls nur*

$$(14) \qquad \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < \eta_m$$

ist.

Diese Ungleichungen lassen sich in einer etwas allgemeineren Form aussprechen, wenn man von der leicht zu beweisenden Determinantenidentität in den Unbestimmten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ Gebrauch macht:

$$(15) \qquad \frac{1}{\prod_{i,k=1}^{m} (\eta_i - \xi_k)} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \ldots & \xi_1^{m-1} & \varphi_1 & \varphi_1\xi_1 & \ldots & \varphi_1\xi^{m-1} \\ 1 & \eta_1 & \ldots & \eta_1^{m-1} & \psi_1 & \psi_1\eta_1 & \ldots & \psi_1\eta_1^{m-1} \\ 1 & \xi_2 & \ldots & \xi_2^{m-1} & \varphi_2 & \varphi_2\xi_2 & \ldots & \varphi_2\xi_2^{m-1} \\ 1 & \eta_2 & \ldots & \eta_2^{m-1} & \psi_2 & \psi_2\eta_2 & \ldots & \psi_2\eta_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \xi_m & \ldots & \xi_m^{m-1} & \varphi_m & \varphi_m\xi_m & \ldots & \varphi_m\xi_m^{m-1} \\ 1 & \eta_m & \ldots & \eta_m^{m-1} & \psi_m & \psi_m\eta_m & \ldots & \psi_m\eta_m^{m-1} \end{vmatrix} = \left| \frac{\varphi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_{i,k=1}^{m}.$$

Beachtet man die leicht zu überblickenden Vorzeichenänderungen der linken Seite der Identität bei Vertauschung von zwei Größen aus der Reihe

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$$

und gleichzeitiger Vertauschung der entsprechenden Größen aus der Reihe

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m,$$

so ergibt sich: *Die Ungleichungen* (14) *können durch die gleichbedeutende Voraussetznng ersetzt werden, daß für* $m = 1$ *die Werte* ξ_1 *und* η_1 *verschieden sind und für jedes weitere m die in der Determinantenungleichung auftretenden* $2m$ *Werte* ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *paarweise verschieden und so angeordnet sind, daß das Produkt*

$$(16) \qquad \prod_{i<k} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k) > 0$$

ist.

In den folgenden Paragraphen 2 und 3 soll bewiesen werden, daß die gefundenen Ungleichungen für die Monotonie n-ter Stufe *nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind.* Bei $n \geqq 3$ wird hierbei die Annahme gemacht, daß der Definitionsbereich von $\chi(\omega)$ ein Intervall ist.

§ 2.

Die gefundenen Bedingungen sind auch hinreichend. Beweis für $n = 1$ und $n = 2$.

Wir betrachten zunächst die Fälle $n = 1$ und $n = 2$, die ein gesondertes Interesse verdienen.

Im Falle $n = 1$ liegt nur die eine Ungleichung $\varkappa(\eta_1, \xi_1) \geqq 0$ vor. Sie drückt die *gewöhnliche* Monotonie aus, die also, wie schon in der Einleitung festgestellt wurde, mit der Monotonie erster Stufe gleichbedeutend ist. Sei jetzt $n = 2$. Dann liegt das Ungleichungspaar

$$\text{(17)} \qquad \begin{gathered} \varkappa(\eta_1, \xi_1) \geqq 0 \qquad\qquad (\xi_1 \neq \eta_1), \\ \begin{vmatrix} \varkappa(\eta_1, \xi_1) & \varkappa(\eta_1, \xi_2) \\ \varkappa(\eta_2, \xi_1) & \varkappa(\eta_2, \xi_2) \end{vmatrix} \geqq 0 \quad \left\{ \begin{array}{c} (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \text{ paarweise verschieden} \\ \text{und } (\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 - \eta_2) > 0) \end{array} \right. \end{gathered}$$

vor. Zu der gewöhnlichen Monotonie tritt eine weitere Aussage über $\chi(\omega)$ hinzu.

Es sei

$$\begin{aligned} A_2(x, x) &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2, \\ B_2(x, x) &= \mu_1 (\cos\vartheta\, x_1 - \sin\vartheta\, x_2)^2 + \mu_2 (\sin\vartheta\, x_1 + \cos\vartheta\, x_2)^2 \\ &\qquad (\lambda_1 \leqq \lambda_2,\ \mu_1 \leqq \mu_2,\ \vartheta \text{ irgendein Winkel}) \end{aligned}$$

ein Paar quadratischer Formen, deren Eigenwerte λ_1, λ_2 bzw. μ_1, μ_2 dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ angehören, und es sei

$$\text{(18)} \qquad A_2 \leq B_2.$$

Die Ungleichung (18) wird bekanntlich vollständig durch das Ungleichungspaar

$$\text{(19')} \qquad \lambda_1 \leqq \mu_1, \quad \lambda_2 \leqq \mu_2$$

im Vereine mit der Determinantenungleichung

$$\text{(19'')} \qquad |B_2 - A_2| = \begin{vmatrix} (\mu_1 - \lambda_1)\cos\vartheta & (\mu_1 - \lambda_2)(-\sin\vartheta) \\ (\mu_2 - \lambda_1)\sin\vartheta & (\mu_2 - \lambda_2)\cos\vartheta \end{vmatrix} \geqq 0$$

zum Ausdruck gebracht. Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

Fall a) $\lambda_2 \leqq \mu_1$. Auf Grund der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ schließt man hier: es ist

$$\chi(\lambda_1) \leqq \chi(\lambda_2) \leqq \chi(\mu_1) \leqq \chi(\mu_2).$$

Die Eigenwerte von $\chi(B_2)$ werden von keinem Eigenwerte von $\chi(A_2)$ übertroffen, es ist also gewiß $\chi(A_2) \leq \chi(B_2)$.

Fall b) $\lambda_2 > \mu_1$ und entweder $\lambda_1 = \mu_1$ oder $\lambda_2 = \mu_2$. Aus (19″) folgt dann

$$(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_1)\sin^2\vartheta \geqq 0$$

und hieraus wegen $(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_1) < 0$ die Gleichung $\sin\vartheta = 0$. Es ist also $B_2(x,x) = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2$ und

$$\chi(A_2)(x,x) = \chi(\lambda_1)x_1^2 + \chi(\lambda_2)x_2^2, \quad \chi(B_2)(x,x) = \chi(\mu_1)x_1^2 + \chi(\mu_2)x_2^2.$$

Wiederum ist wegen der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ gewiß $\chi(\lambda_1) \leqq \chi(\mu_1)$ und $\chi(\lambda_2) \leqq \chi(\mu_2)$, also auch $\chi(A_2) \leq \chi(B_2)$.

Fall c) $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2$.

Das Ungleichungspaar

$$\chi(\lambda_1) \leqq \chi(\mu_1), \quad \chi(\lambda_2) \leqq \chi(\mu_2) \tag{20′}$$

ist wieder eine Folge der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$. Ferner ist

$$\begin{aligned} |\chi(B_2) - \chi(A_2)| &= \begin{vmatrix} (\chi(\mu_1) - \chi(\lambda_1))\cos\vartheta, & (\chi(\mu_1) - \chi(\lambda_2))(-\sin\vartheta) \\ (\chi(\mu_2) - \chi(\lambda_1))\sin\vartheta, & (\chi(\mu_2) - \chi(\lambda_2))\cos\vartheta \end{vmatrix} \\ &= \varkappa(\mu_1,\lambda_1)\,\varkappa(\mu_2,\lambda_2)(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_2 - \lambda_2)\cos^2\vartheta \\ &\quad + \varkappa(\mu_1,\lambda_2)\,\varkappa(\mu_2,\lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_1)\sin^2\vartheta. \end{aligned}$$

Aus (20′) im Verein mit (19″) schließt man

$$|\chi(B_2) - \chi(A_2)| \geqq \begin{vmatrix} \varkappa(\mu_1,\lambda_1) & \varkappa(\mu_1,\lambda_2) \\ \varkappa(\mu_2,\lambda_1) & \varkappa(\mu_2,\lambda_2) \end{vmatrix} (\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_1)(-\sin^2\vartheta),$$

also ist

$$|\chi(B_2) - \chi(A_2)| \geqq 0. \tag{20″}$$

(20′) und (20″) zusammen drücken aber aus, daß $\chi(B_2) \geq \chi(A_2)$ ist. Durch die Fälle a) b) c) sind alle Möglichkeiten erschöpft und damit der Fall $n = 2$ vollständig erledigt.

Wir wollen das Resultat genauer diskutieren. Die Ungleichungen (17) haben eine sehr einfache Bedeutung. Zunächst bemerken wir, daß man sich auf *streng* monotone $\chi(\omega)$ beschränken darf. Es gilt nämlich der Hilfssatz: *Nimmt eine Funktion $\chi(\omega)$, die monoton von zweiter Stufe ist, an zwei ver-*

schiedenen Stellen denselben Wert an, dann kann deren Konstanz in ihrem ganzen Definitionsbereiche behauptet werden, wenn man aus letzterem den etwa vorhandenen größten und kleinsten Wert entfernt.

Beweis: Sei $\chi(\alpha) = \chi(\beta)$ $(\alpha < \beta)$. Sei ferner $\xi > \beta$ und $\eta > \xi$ und sowohl ξ als auch η im Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ gelegen. Setzt man in der zweiten Ungleichung (17) $\xi_1 = \alpha$, $\eta_1 = \beta$, $\xi_2 = \xi$, $\eta_2 = \eta$, so erhält man

$$\varkappa(\beta, \xi)\, \varkappa(\eta, \alpha) \leqq 0. \tag{21'}$$

Wegen der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ ist aber $\varkappa(\beta, \xi) \geqq 0$ und $\varkappa(\eta, \alpha) \geqq 0$, also auch

$$\varkappa(\beta, \xi)\, \varkappa(\eta, \alpha) \geqq 0; \tag{21''}$$

(21') und (21'') zusammen ergeben

$$\varkappa(\beta, \xi)\, \varkappa(\eta, \alpha) = 0. \tag{21}$$

Hieraus folgt $\varkappa(\beta, \xi) = 0$, d. h. $\chi(\xi) = \chi(\beta)$, da $\varkappa(\eta, \alpha) = 0$ nicht bestehen kann, ohne daß gleichzeitig $\varkappa(\beta, \xi) = 0$ wäre. Aus der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ folgt nämlich $\chi(\alpha) \leqq \chi(\xi) \leqq \chi(\eta)$, also aus $\chi(\alpha) = \chi(\eta)$ auch $\chi(\xi) = \chi(\alpha) = \chi(\beta)$.

Ebenso erledigt man den Fall eines $\xi < \alpha$, das nicht der kleinste Wert aus dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ ist, und damit ist, da die Konstanz von $\chi(\omega)$ im Intervall $\langle \alpha\, \beta \rangle$ selbst eine unmittelbare Folge der gewöhnlichen Monotonie ist, der Hilfssatz bewiesen.

Es gilt auch die Umkehrung: *Ersetzt man in einer konstanten Funktion den Funktionswert in dem etwa auftretenden größten Werte des Definitionsbereiches durch einen nicht kleineren und in dem etwa auftretenden kleinsten Werte des Definitionsbereiches durch einen nicht größeren Wert, so bleibt die Funktion monoton von zweiter Stufe.* Der sehr einfache Beweis kann dem Leser überlassen bleiben. (Siehe auch den Schlußsatz von § 3.)

Wir gehen jetzt zum allgemeinen Falle eines *streng monotonen* $\chi(\omega)$ über. Die zweite Ungleichung (17) kann dann, wenn die Annahme $\xi_1 < \xi_2 < \eta_1 < \eta_2$ gemacht wird, in der Form

$$\frac{(\chi(\eta_1) - \chi(\xi_1))\,(\chi(\eta_2) - \chi(\xi_2))}{(\chi(\eta_1) - \chi(\xi_2))\,(\chi(\eta_2) - \chi(\xi_1))} \geqq \frac{(\eta_1 - \xi_1)\,(\eta_2 - \xi_2)}{(\eta_1 - \xi_2)\,(\eta_2 - \xi_1)} \tag{22'}$$

geschrieben werden. Es kann also (22') in eine Ungleichung zwischen *Doppelverhältnissen* umgeschrieben werden:

$$(\chi(\xi_1)\, \chi(\xi_2)\, \chi(\eta_1)\, \chi(\eta_2)) \geqq (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2). \tag{22}$$

Wir fassen unsere Überlegungen zusammen: *Eine von zweiter Stufe monotone Funktion $\chi(\omega)$ ist auch im gewöhnlichen Sinne monoton. Es sind nun zwei Fälle möglich. Entweder entsteht durch Streichung der gegebenenfalls vorhandenen äußersten Werte des Definitionsbereiches eine konstante Funktion. Ist dies nicht der Fall, dann ist $\chi(\omega)$ streng monoton. Charakteristisch für die Monotonie zweiter Stufe ist dann, daß bei der durch die Funktion vermittelten Wertezuordnung die Doppelverhältnisse von natürlich angeordneten Werten nie eine Verkleinerung erfahren.*

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist der Satz: *Eine umkehrbare Funktion ist dann und nur dann gleichzeitig mit ihrer Umkehrung monoton von zweiter Stufe, wenn sie durch einen linearen Ausdruck $\chi(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ mit positiver Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ dargestelllt wird und ihr Pol nicht zwischen zwei Werten des Definitionsbereiches liegt.*

Eine weitere Folgerung aus der Monotonie zweiter Stufe, die bald Verwendung finden wird, ist die *Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung* von $\chi(\omega)$ im *Innern* des Definitionsbereiches der Funktion. Man kann sogar die Beschränktheit des zweiten Differenzenquotienten in jedem Intervalle behaupten, das mit seinen Endpunkten dem Innern des Definitionsbereiches angehört.

Beweis: Man kann annehmen, daß $\chi(\omega)$ streng monoton ist. Man beschränke die Variable ω auf ein Intervall $\alpha \leqq \omega \leqq \beta$, das mit seinen Endpunkten dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ angehört. Setzt man in der zweiten Ungleichung (17) $\xi_1 = \alpha$, $\eta_2 = \beta$, so ergibt sich unter Beachtung der gewöhnlichen Monotonie

$$0 < \varkappa(\eta_1, \xi_2) \leqq \frac{\varkappa(\eta_1, \alpha)\,\varkappa(\beta, \xi_2)}{\varkappa(\beta, \alpha)} \leqq \frac{(\chi(\beta) - \chi(\alpha))(\beta - \alpha)}{(\eta_1 - \alpha)(\beta - \xi_2)}.$$

Diese Ungleichung zeigt zunächst, daß bei Beschränkung von ξ_2 und η_1 auf ein Intervall $\alpha' \leqq \omega \leqq \beta'$, das mit seinen Endpunkten dem Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ angehört, der Differenzenquotient von $\chi(\omega)$ unter einer festen Schranke bleibt, $\chi(\omega)$ also jedenfalls im Innern des Definitionsbereiches *stetig* ist.

Setzt man nun allein $\eta_2 = \beta$ und läßt die Werte ξ_1, η_1, ξ_2 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ laufen, so ergibt (17)

$$\frac{\varkappa(\eta_1, \xi_2)}{\varkappa(\eta_1, \xi_1)} \leqq \frac{\varkappa(\beta, \xi_2)}{\varkappa(\beta, \xi_1)} \qquad (\xi_1 < \xi_2)$$

oder

$$\varkappa(\eta_1, \xi_2) - \varkappa(\eta_1, \xi_1) \leqq \varkappa(\eta_1, \xi_1)\,\frac{\varkappa(\beta, \xi_2) - \varkappa(\beta, \xi_1)}{\varkappa(\beta, \xi_1)} \qquad (\xi_1 < \xi_2). \tag{23'}$$

Setzt man in (17) $\eta_2 = \alpha$, so erhält man entsprechend

$$(23'') \qquad \varkappa(\eta_1, \xi_2) - \varkappa(\eta_1, \xi_1) \geqq \varkappa(\eta_1, \xi_1) \frac{\varkappa(\alpha, \xi_2) - \varkappa(\alpha, \xi_1)}{\varkappa(\alpha, \xi_1)} \qquad (\xi_1 < \xi_2).$$

Durch (23′) und (23″) ist die Differenz $\varkappa(\eta_1, \xi_2) - \varkappa(\eta_1, \xi_1)$ zwischen zwei Schranken eingeschlossen. Der erste Faktor in diesen $\varkappa(\eta_1, \xi_1)$ ist positiv, und, wie eben bewiesen worden ist, unter einer festen Schranke gelegen. Es ist ferner

$$\varkappa(\beta, \xi_1) \geqq \frac{\chi(\beta) - \chi(\beta')}{\beta - \alpha'} \quad \text{und} \quad \varkappa(\alpha, \xi_1) \geqq \frac{\chi(\alpha') - \chi(\alpha)}{\beta' - \alpha}.$$

Die Nenner $\varkappa(\beta, \xi_1)$ und $\varkappa(\alpha, \xi_1)$ der rechten Seiten von (23′) und (23″) bleiben also *oberhalb* einer festen positiven Schranke. Endlich sinken die Differenzen $\varkappa(\beta, \xi_2) - \varkappa(\beta, \xi_1)$ und $\varkappa(\alpha, \xi_2) - \varkappa(\alpha, \xi_1)$ wegen der schon bewiesenen Stetigkeit von $\chi(\omega)$ *gleichmäßig* unter jede vorgegebene Schranke, falls die Differenz $\xi_2 - \xi_1$ genügend klein genommen wird. Aus allem dem folgt, daß $|\varkappa(\eta_1, \xi_2) - \varkappa(\eta_1, \xi_1)|$ gleichmäßig unter eine vorgeschriebene positive Schranke ε fällt, falls nur $\xi_2 - \xi_1$ genügend klein gewählt wird. Hieraus folgen in bekannter Weise *Existenz* und *Stetigkeit* der ersten Ableitung von $\chi(\omega)$ in $\langle \alpha', \beta' \rangle$, also im ganzen Innern des Definitionsbereiches.

Dividiert man (23′) und (23″) durch $\xi_2 - \xi_1$, so ergeben sich für den zweiten Differenzenquotienten die Schranken

$$(24') \qquad 2\frac{\varkappa(\eta_1, \xi_2) - \varkappa(\eta_1, \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \leqq 2\frac{\varkappa(\eta_1, \xi_1)}{\varkappa(\beta, \xi_1)} \frac{\varkappa(\beta, \xi_2) - \varkappa(\beta, \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1},$$

$$(24'') \qquad 2\frac{\varkappa(\eta_1, \xi_2) - \varkappa(\eta_1, \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \geqq 2\frac{\varkappa(\eta_1, \xi_1)}{\varkappa(\alpha, \xi_1)} \frac{\varkappa(\alpha, \xi_2) - \varkappa(\alpha, \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

Hieraus ersieht man durch Benutzung des bereits Bewiesenen, daß bei Beschränkung auf $\langle \alpha', \beta' \rangle$ der zweite Differenzenquotient absolut genommen unter einer festen Schranke bleibt. Damit sind alle Differenzierbarkeitsbehauptungen bewiesen.

§ 3.

Die Bedingungen sind auch für $n \geqq 3$ hinreichend.

Nun gehen wir daran, zu beweisen, daß die in § 1 gefundenen notwendigen Bedingungen (13) auch für $n \geqq 3$ hinreichend sind. Über den Definitionsbereich von $\chi(\omega)$ machen wir hier die einschränkende Voraussetzung, daß er ein *Intervall* ist. Es kann endlich oder unendlich, offen, halboffen oder geschlossen sein.

Da aus den Ungleichungen (13) für $n \geqq 3$ die Monotonie zweiter Stufe folgt, so sind die eben bewiesenen Differenzierbarkeitseigenschaften für jedes $n \geqq 2$ vorhanden. Läßt man in (13) die Werte ξ_1 und η_1 in

einen inneren Punkt des Definitionsintervalls zusammenrücken, ebenso ξ_2 und η_2 usw., so ergeben sich also bei $n \geqq 2$ die *Differentialungleichungen*

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} \varkappa(\xi_1, \xi_1) & \varkappa(\xi_1, \xi_2) & \dots & \varkappa(\xi_1, \xi_m) \\ \varkappa(\xi_2, \xi_1) & \varkappa(\xi_2, \xi_2) & \dots & \varkappa(\xi_2, \xi_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varkappa(\xi_m, \xi_1) & \varkappa(\xi_m, \xi_2) & \dots & \varkappa(\xi_m, \xi_m) \end{vmatrix} \geqq 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

bei beliebiger Wahl der ξ-Werte im Innern des Definitionsbereiches. $\varkappa(\xi, \xi)$ soll natürlich die Ableitung an der Stelle ξ bedeuten. [Es dürfen auch zusammenfallende Werte ξ zugelassen werden, da dann die linke Seite von (25) verschwindet.] Die folgenden Überlegungen gehen darauf aus, zu zeigen, daß *aus* (25) *im Verein mit der Monotonie erster Stufe im vollständigen Definitionsbereiche*[5]) *bereits die Monotonie n-ter Stufe folgt.* Wir werden hierzu einen einfachen *Hilfssatz* benötigen, der vorausgeschickt werden soll: *Ist $\chi(\omega)$ eine einmal differenzierbare Funktion, so kann dasselbe von der Matrixfunktion $\chi(X_n)$ für jedes n behauptet werden.* Damit soll zum Ausdruck gebracht werden, daß die Elemente der Matrix $\chi(X_n)$ eigentlich differenzierbare Funktionen der Elemente von X_n sind.

Der Hilfssatz kann so bewiesen werden: Sei $A_n = (a_{ik})$ eine Matrix, deren Eigenwerte

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \dots \leqq \lambda_n$$

dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ angehören. Man bilde nach Lagrange ein Interpolationspolynom $\pi(\omega)$, das an den Stellen λ_i bis zur ersten Ordnung mit $\chi(\omega)$ übereinstimmt. Es ist also

$$\pi(\lambda_i) = \chi(\lambda_i), \quad \pi'(\lambda_i) = \chi'(\lambda_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Die Differenz von $\chi(\omega)$ und $\pi(\omega)$ heiße $\varrho(\omega)$, es wird also

$$\chi(\omega) = \pi(\omega) + \varrho(\omega)$$

gesetzt. Sei ferner $X_n = (x_{ik})$ eine variable Matrix aus dem Definitionsbereiche von $\chi(X_n)$ mit den Eigenwerten

$$\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \dots \leqq \xi_n.$$

Es ist

$$\chi(X_n) = \pi(X_n) + \varrho(X_n).$$

Es muß nachgewiesen werden, daß $\varrho(X_n)$ an der „Stelle" $X_n = A_n$ eigentlich differenzierbar ist; denn $\pi(X_n)$ als Polynom in X_n hat gewiß diese Eigenschaft.

---

[5]) Im Innern des Definitionsbereiches wird diese bereits durch die erste der Ungleichungen (25) zum Ausdruck gebracht.

Da $\varrho(\omega)$ an den Stellen λ_i verschwindet und auch verschwindende Ableitungen hat, so gibt es zu jedem positiven ε ein ebensolches δ_ε derart, daß für

$$|\xi_i - \lambda_i| < \delta_\varepsilon \tag{26'}$$

der Ausdruck

$$|\varrho(\xi_i)| < \varepsilon\,|\xi_i - \lambda_i|$$

ausfällt und zwar für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$.

Es werde jetzt angenommen, daß die Eigenwerte von X_n der Ungleichung (26') genügen. Wird $\varrho(X_n) = (\varrho_{ik})$ gesetzt, so ist dann wegen der Orthogonalinvarianz der Quadratsumme der Elemente einer quadratischen Form

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varrho_{kl}^2 = \sum_{i=1}^{n} \varrho^2(\xi_i) < \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^2,$$

also auch

$$|\varrho_{kl}| < \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^2} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{27}$$

Eine einfache Extremalbetrachtung endlich, die dem Leser überlassen bleiben kann, zeigt, daß für ein beliebiges Matrixpaar A_n und B_n mit den Eigenwerten $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n$ bzw. $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots \leqq \mu_n$ die Abschätzung gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i)^2 \leqq \sum_{k,l=1}^{n} (b_{kl} - a_{kl})^2.$$

In unserem Falle ist also

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \lambda_i)^2 \leqq \sum_{k,l=1}^{n} (x_{kl} - a_{kl})^2; \tag{28}$$

(27) und (28) zusammen ergeben

$$|\varrho_{kl}| < \varepsilon \sqrt{\sum_{k,l=1}^{n} (x_{kl} - a_{kl})^2}, \tag{29}$$

gültig für Matrizen X_n, die so wenig von A_n abweichen, daß die Ungleichungen (26') bestehen. Damit ist die eigentliche Differenzierbarkeit von $\chi(X_n)$ bewiesen.

Das totale Differential von $\chi(X_n)$ (d. h. die Matrix der totalen Differentiale der Elemente von $\chi(X_n)$) läßt sich sehr einfach schreiben, wenn A_n auf die Hauptachsen gebracht ist, also

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. $T = (\tau_{ik})$ sei eine orthogonale Matrix, die X_n auf Hauptachsen bringt, es sei also

$$X_n = T' \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} T.$$

Dann ist

$$\chi(X_n) = T' \begin{pmatrix} \chi(\xi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(\xi_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi(\xi_n) \end{pmatrix} T.$$

Faßt man jetzt T und die ξ_i als unabhängige Variable auf, so ist für $T = E$ (Einheitsmatrix) und $\xi_i = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ offenbar

$$dX_n = (dT)' \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} dT$$

$$+ \begin{pmatrix} d\xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d\xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d\xi_n \end{pmatrix},$$

und

$$d\chi(X_n) = (dT)' \begin{pmatrix} \chi(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi(\lambda_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi(\lambda_n) \end{pmatrix} dT$$

$$+ \begin{pmatrix} \chi'(\lambda_1)\, d\xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi'(\lambda_2)\, d\xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi'(\lambda_n)\, d\xi_n \end{pmatrix}$$

und wegen der Orthogonalität von T

$$dT + dT' = 0.$$

Aus diesen Identitäten folgt, wenn $E = (\varepsilon_{ik})$ gesetzt wird.

$$dX_n = ((\lambda_i - \lambda_k)\, d\tau_{ik}) + (d\xi_i \cdot \varepsilon_{ik}),$$

$$d\chi(X_n) = ((\chi(\lambda_i) - \chi(\lambda_k)) \cdot d\tau_{ik}) + (\chi'(\lambda_i)\, d\xi_i\, \varepsilon_{ik}),$$

also

$$d\chi(X_n) = (\varkappa(\lambda_i, \lambda_k)\, dx_{ik}). \tag{30}$$

Die Formel (30) ist die Grundlage der folgenden Überlegungen. Aus ihr kann nämlich der Schluß gezogen werden: *Die Ungleichung* $d X_n \geq 0$ *zieht* $d\chi(X_n) \geq 0$ *nach sich; anders gesprochen: die Monotonie besteht im Infinitesimalen.* In der Tat: Wegen des Bestehens von (25) ist $(\varkappa(\lambda_i, \lambda_k))$ Matrix einer *nicht-negativen* quadratischen Form. Dasselbe kann nach Voraussetzung von $d X_n$ ausgesagt werden. $d\chi(X_n)$ entsteht, indem entsprechende Elemente von $(\varkappa(\lambda_i, \lambda_k))$ und $d X_n$ miteinander multipliziert werden. Aus diesem Bildungsgesetze folgt, daß auch $d\chi(X_n)$ zu einer nicht-negativen Form gehört. Man erkennt dies, indem man die zu $(\varkappa(\lambda_i, \lambda_k))$ und $d X_n$ gehörigen Formen als Summen von Quadraten reeller Linearformen ansetzt und dann die Bildung von $d\chi(X_n)$ distributiv durchführt.

Sei nun A_n und B_n ein Paar von Matrizen aus dem Definitionsbereiche von $\chi(X_n)$ und

$$A_n \leq B_n.$$

Es werde ferner zunächst angenommen, daß deren Eigenwerte dem *Innern* des Definitionsintervalls von $\chi(\omega)$ angehören. Man bilde die von einem Parameter t abhängige Matrix

$$X_n(t) = A_n + (B_n - A_n)\, t \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Es ist $X_n(0) = A_n$, $X_n(1) = B_n$. Ferner ist

$$\frac{d X_n}{d t} = B_n - A_n \geq 0. \tag{31'}$$

Hieraus folgt, daß die Eigenwerte von $X_n(t)$

$$\xi_1(t) \leqq \xi_2(t) \leqq \ldots \leqq \xi_n(t)$$

n *nichtabnehmende* Funktionen von t bilden. Für $t = 0$ bzw. $t = 1$ erhält man die Eigenwerte von A_n bzw. B_n. Wegen der Voraussetzung über diese bleiben also auch die Eigenwerte von $X_n(t)$ im *Innern* des Definitionsintervalls von $\chi(\omega)$. Jetzt kann aus (31') auf

$$\frac{d\chi(X_n)}{d t} \geq 0 \tag{31''}$$

und hieraus wieder auf

$$\chi(A_n) = \chi(X_n(0)) \leqq \chi(X_n(1)) = \chi(B_n)$$

geschlossen werden.

Ein wenig Schwierigkeiten bereiten die Endpunkte α, β des Definitionsintervalls, falls sie zum Definitionsbereiche gehören, da dort $\chi(\omega)$ nicht einmal stetig zu sein braucht. Sie erledigen sich in folgender Weise. Wegen der Monotonie von $\chi(\omega)$ ist

$$\chi(\alpha) \leqq \lim_{\omega \to \alpha + 0} \chi(\omega), \qquad \chi(\beta) \geqq \lim_{\omega \to \beta - 0} \chi(\omega). \tag{32}$$

Ersetzt man die Funktionswerte in α und β durch diese Limiten, so entsteht eine *stetige* Funktion $\chi^*(\omega)$. Aus der Stetigkeit von $\chi^*(\omega)$ kann offenbar auf die Stetigkeit der Matrixfunktion $\chi^*(X_n)$ geschlossen werden. Da die in Betracht kommenden Paare von Matrizen $A_n \leq B_n$, die Eigenwerte in α oder β haben, wie leicht zu sehen, Grenzfälle von solchen sind, die ebenso geordnet sind und deren Eigenwerte dem *Innern* von $\langle \alpha, \beta \rangle$ angehören, so folgt aus der Monotonie von $\chi^*(X_n)$ im Bereiche der letzteren und der Stetigkeit dieser Matrixfunktion ihre *Monotonie* im *ganzen Definitionsbereiche.*

Kann man nun aus der Monotonie von $\chi^*(X_n)$ im Vereine mit (32) auf die Monotonie von $\chi(X_n)$ schließen? Dies ist in der Tat der Fall. Sei A_n und B_n ein Paar von Matrizen aus dem Definitionsbereiche von $\chi(X_n)$, von denen mindestens eine einen Endpunkt von $\langle \alpha, \beta \rangle$ zum Eigenwert hat, und es sei

$$A_n \leq B_n,$$

A_n habe den Eigenwert α etwa k_1-mal, B_n l_1-mal und ferner A_n den Eigenwert β k_2-mal und B_n l_2-mal. Mindestens eine der Zahlen k_1, k_2, l_1, l_2 ist von Null verschieden. Nach Voraussetzung ist $A_n \leq B_n$ und es sind die Eigenwerte von A_n und B_n in $\langle \alpha, \beta \rangle$ gelegen. Aus diesen beiden Annahmen folgt offenbar (vgl. (2′))

$$k_1 \geqq l_1, \qquad k_2 \leqq l_2.$$

Darüber hinaus kann behauptet werden, daß der zu α gehörige Eigenraum von A_n den entsprechenden Eigenraum von B_n enthält und daß umgekehrt der zu β gehörige Eigenraum von A_n in dem entsprechenden Eigenraume von B_n enthalten ist. Es genügt natürlich, den auf α bezüglichen Teil der Behauptung zu beweisen. Der Einfachheit der Schreibweise halber werde $\alpha = 0$ gesetzt. Es ist dann

$$0 \leqq A_n(x, x) \leqq B_n(x, x). \tag{33}$$

Bei einer nicht-negativen Form sind die zum Eigenwert $\alpha = 0$ gehörigen Eigenvektoren dadurch charakterisiert, daß sie ihr den Wert Null erteilen. $A_n(x, x)$ und $B_n(x, x)$ sind nicht-negativ, und $B_n(x, x) = 0$ hat $A_n(x, x) = 0$ zur Folge. *Damit ist das behauptete Verhalten der zu α gehörigen Eigenräume von A_n und B_n bewiesen.* (Entsprechend verfährt man bei β.)

Im Vereine mit (32) folgt hieraus fast unmittelbar die Ungleichung

$$\chi(B_n) - \chi^*(B_n) \geqq \chi(A_n) - \chi^*(A_n)$$

und hieraus

$$\chi(B_n) - \chi(A_n) \geqq \chi^*(B_n) - \chi^*(A_n) \geq 0,$$

und damit ist der Beweis für die Monotonie $\chi(X_n)$ zu Ende geführt.

Zum Schluß sei bemerkt, daß man bei den vorangehenden Betrachtungen von dem Verhalten von $\chi(\omega)$ in den Grenzpunkten des Intervalls nur die Ungleichungen (32) benutzt hat. Man kann also den Satz aussprechen: *Eine in* $\alpha \leqq \omega \leqq \beta$ *von n-ter Stufe monotone Funktion behält diese Eigenschaft, wenn man den Funktionswert in* α *durch einen kleineren oder den in* β *durch einen größeren ersetzt.*

§ 4.

Zum Cauchyschen Interpolationsproblem.

Die abgeleiteten Kriterien für eine monotone Funktion stehen im engen Zusammenhange zu Fragestellungen, die das Cauchysche Interpolationsproblem betreffen. Dies soll jetzt besprochen werden. Ein Teil der gewonnenen Ergebnisse wird später benutzt werden, um die Differenzierbarkeitseigenschaften monotoner Funktionen genauer zu studieren, als es im § 2 geschehen ist.

Das Cauchysche Problem verlangt die Aufsuchung einer rationalen Funktion $\varrho(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$, deren Zähler $\sigma(\omega)$ und Nenner $\tau(\omega)$ dem Grade nach die vorgeschriebenen Werte m bzw. n nicht übersteigen und die an $m+n+1$ gegebenen Stellen $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{m+n}$ vorgeschriebene Werte $\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{m+n}$ annimmt:

$$\varrho(\omega_0) = \chi_0,\ \varrho(\omega_1) = \chi_1,\ \ldots,\ \varrho(\omega_{m+n}) = \chi_{m+n}. \tag{34}$$

Im folgenden wird nur der Fall $m = n$ eine Rolle spielen. Um Ausnahmefälle zu vermeiden, werden wir lieber statt von $\varrho(\omega)$ von dem Polynompaare $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ sprechen und die Forderungen (34) (im Falle $m = n$) durch

$$\sigma(\omega_0) = \chi_0 \tau(\omega_0),\ \sigma(\omega_1) = \chi_1 \tau(\omega_1),\ \ldots,\ \sigma(\omega_{2n}) = \chi_{2n} \tau(\omega_{2n}) \tag{35}$$

ersetzen. Es wird also — und das ist der wesentliche Unterschied gegenüber der früheren Formulierung — zugelassen, daß $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ einen gemeinsamen Teiler besitzen, daß somit insbesondere ein $\varrho(\omega_i)$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint. Selbstverständlich wird aber verlangt, daß $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ *nicht beide identisch* verschwinden. Zwei Polynompaare $\sigma(\omega), \tau(\omega)$ und $\alpha\sigma(\omega), \alpha\tau(\omega)$, die sich um einen konstanten, von Null verschiedenen Faktor α unterscheiden, sehen wir als nicht wesentlich verschieden an. Nun beweisen wir zunächst eine Reihe einfacher Hilfssätze.

1. Hilfssatz: *Es sei* $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ *ein Paar von Polynomen, deren Grad kleiner als n ist, und*

$$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_n, \eta_n \tag{36'}$$

ein System von $2n$ paarweise verschiedenen Werten. Genügen dann die weiteren $2n$ Werte

$$\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_n \tag{36''}$$

dem Gleichungssystem

$$\sigma(\xi_i) = \varphi_i \tau(\xi_i), \quad \sigma(\eta_i) = \psi_i \tau(\eta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{37}$$

so ist die Determinante

$$\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_{i,k=1}^{n} = 0. \tag{38}$$

Beweis: Die Gleichungen (37) können als ein System von $2n$ linearen homogenen Gleichungen für die $2n$ Koeffizienten der zwei Polynome $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ als Unbekannten aufgefaßt werden. Also muß ihre Determinante verschwinden. Die letztere ist aber auf Grund der Identität (15) bis auf einen von Null verschiedenen Faktor mit der linken Seite von (38) identisch.

2. Hilfssatz: *Sind $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ zwei teilerfremde Polynome höchstens n-ten Grades, von denen mindestens eines den Grad n hat, und sind die Gleichungen* (37) *erfüllt, so ist*

$$\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n \neq 0.$$

Beweis: Wir setzen

$$\frac{\sigma(\eta)\tau(\xi) - \tau(\eta)\sigma(\xi)}{\eta - \xi} = \sum_{p,q=0}^{n-1} c_{pq} \eta^p \xi^q. \tag{39}$$

Aus (37) folgt dann

$$\tau(\eta_i)\tau(\xi_k) \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} = \frac{\sigma(\eta_i)\tau(\xi_k) - \tau(\eta_i)\sigma(\xi_k)}{\eta_i - \xi_k} = \sum_{p,q=0}^{n-1} c_{pq} \eta_i^p \xi_k^q. \tag{40}$$

Durch Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinantentheorie schließt man hieraus auf

$$\prod_{l=1}^{n} \tau(\xi_l)\tau(\eta_l) \cdot \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n$$

$$= \prod_{i<k} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k) \cdot \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Der letzte Faktor auf der rechten Seite dieser Relation, die Bézoutsche Determinante der Polynome σ und τ, ist nun wegen der Teilerfremdheit der Polynome und der Voraussetzung über deren Grad bekanntlich von

Null verschieden, also ist die ganze rechte Seite ungleich Null und damit auch die Determinante $\left|\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right|_1^n$.

3. Hilfssatz: *Man denke sich jetzt die Wertsysteme* (36′) *und* (36″) *gegeben und bilde mit ihnen die Matrix*

$$M = \left(\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right)_{i,k=1}^{n}.$$

Ihre Determinante sei von Null verschieden. Dann gibt es genau ein Paar von Polynomen $\sigma(\omega), \tau(\omega)$ *höchstens n-ten Grades, das die Forderungen* (37) *erfüllt und das außerdem an einer von den* ξ_i *und* η_i *verschiedenen Stelle* η_0 *eine Gleichung von der Form*

$$\alpha\,\sigma(\eta_0) - \beta\,\tau(\eta_0) = 0 \tag{37′}$$

befriedigt. α *und* β *sind gegebene Konstante, die nicht beide verschwinden.*

Beweis: Man denke sich $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt. Aus (37) und (37′) erhält man zu deren Bestimmung ein System von $2n+1$ linearen homogenen Gleichungen mit der Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\eta_0 & \dots & \alpha\eta_0^n & \beta & \beta\eta_0 & \dots & \beta\eta_0^n \\ 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^n & \varphi_1 & \varphi_1\xi_1 & \dots & \varphi_1\xi_1^n \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_1^n & \psi_1 & \psi_1\eta_1 & \dots & \psi_1\eta_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^n & \varphi_n & \varphi_n\xi_n & \dots & \varphi_n\xi_n^n \\ 1 & \eta_n & \dots & \eta_n^n & \psi_n & \psi_n\eta_n & \dots & \psi_n\eta_n^n \end{pmatrix}\ [6]).$$

Es muß bewiesen werden, daß ihr Rang genau gleich $2n+1$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\eta_0 = 0$ ist. Ich behaupte, daß dann eine der beiden Determinanten D_1 und D_2 der Ordnung $2n+1$, die durch Streichung der $n+2$-ten bzw. ersten Kolonne in C entstehen, von Null verschieden ist. In der Tat ist offenbar

$$D_1 = \alpha \prod_{l=1}^{n} \xi_l\eta_l \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^{n-1} & \varphi_1 & \varphi_1\xi_1 & \dots & \varphi_1\xi_1^{n-1} \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_1^{n-1} & \psi_1 & \psi_1\eta_1 & \dots & \psi_1\eta_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^{n-1} & \varphi_n & \varphi_n\xi_n & \dots & \varphi_n\xi_n^{n-1} \\ 1 & \eta_n & \dots & \eta_n^{n-1} & \psi_n & \psi_n\eta_n & \dots & \psi_n\eta_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

[6]) In der $n+2$-ten bis $(2n+2)$-ten Kolonne sind die Vorzeichen abgeändert worden, was natürlich unwesentlich ist.

also nach der Identität (15)

$$D_1 = \alpha \prod_{l=1}^{n} \xi_l \eta_l \prod_{p,q=1}^{n} (\eta_p - \xi_q) \cdot \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_{i,k=1}^{n} . \tag{41'}$$

Ebenso erhält man

$$D_2 = (-1)^n \beta \prod_{l=1}^{n} \xi_l \eta_l \prod_{p,q=1}^{n} (\eta_p - \xi_q) \cdot \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_{i,k=1}^{n} . \tag{41''}$$

D_1 und D_2 unterscheiden sich also von α bzw. β um einen von Null verschiedenen Faktor, mindestens eine von ihnen ist somit von Null verschieden. Damit ist der Hilfssatz bewiesen[6a]).

Die Tatsache, daß D_2 und D_1 bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor mit $\sigma(0)$ und $(-1)^n \tau(0)$ übereinstimmen, führt zu folgendem

Zusatz zum 3. Hilfssatz: *Mindestens eine der Größen $\sigma(\eta_0)$ und $\tau(\eta_0)$ ist von Null verschieden.*

Wir ziehen nun aus dem Hilfssatze und dem Zusatze zwei wichtige Folgerungen.

1. Folgerung: *Mindestens eines der durch den Hilfssatz definierten Polynome ist vom Grade n.*

Im entgegengesetzten Falle würde nämlich durch Multiplikation von $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ mit derselben Funktion ersten Grades ein neues, dem Hilfssatze genügendes Funktionenpaar entstehen, was der Eindeutigkeitsaussage desselben widerspricht.

2. Folgerung: *Die Nullstellen des größten gemeinsamen Teilers von $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ sind alle einfach und gehören dem System* (36') *an.*

Der Zusatz lehrt, da η_0 durch jeden Wert außerhalb (36') ersetzt werden kann, daß eine solche Nullstelle (36') angehören muß. Die Weglassung eines gemeinsamen Linearfaktors von $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$, dessen Nullstelle mehrfach ist, würde aber zu einem neuen Funktionenpaar führen, das sowohl (37) als auch (37') befriedigt, was wieder zur Eindeutigkeitsaussage des Hilfssatzes im Widerspruch steht.

Das Polynom $\tau(\omega)$ kann gewiß nicht identisch verschwinden, weil dann, wie die Forderungen (37) lehren, auch $\sigma(\omega)$ identisch verschwände. Man kann also den Quotienten $\frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ bilden. Die zweite Folgerung lehrt, daß er *an keiner von den Werten aus* (36') *verschiedenen Stelle in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint.*

6a) Auf kürzerem Wege hätte man mit Benutzung des 1. Hilfssatzes zum dritten gelangen können. Wir haben den längeren des Textes vorgezogen, da die durchgeführten Rangbetrachtungen beim Beweise des 5. Hilfssatzes gebraucht werden.

Eine leichte Verallgemeinerung des Hilfssatzes erhält man, indem man die Werte (36′) und η_0 einer linearen Transformation unterwirft, etwa

$$\omega^* = \frac{a\,\omega + b}{c\,\omega + d}\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\right),$$

deren Pol außerhalb des Systems (36′) liegt und auch auf das System (36″) und ψ_0 eine weitere Transformation

$$\chi^* = \frac{a_1\,\chi + b_1}{c_1\,\chi + d_1}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0\right),$$

deren Pol dem System (36″) nicht angehören soll, anwendet. Setzt man

$$\xi_i^* = \frac{a\,\xi_i + b}{c\,\xi_i + d}, \qquad \eta_i^* = \frac{a\,\eta_i + b}{c\,\eta_i + d} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\varphi_i^* = \frac{a_1\,\varphi_i + b_1}{c_1\,\varphi_i + d_1}, \qquad \psi_i^* = \frac{a_1\,\psi_i + d_1}{c_1\,\psi_i + d_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so wird, wie man leicht nachrechnet,

$$\left|\frac{\varphi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i^* - \xi_k^*}\right|_1^n = \left(\frac{a_1 d_1 - b_1 c_1}{a\,d - b\,c}\right)^n \prod_{l=1}^{n} \frac{(c\,\xi_l + d)\,(c\,\eta_l + d)}{(c_1\,\varphi_l + d_1)\,(c_1\,\psi_l + d_1)} \cdot \left|\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right|_1^n.$$

Also ist $\left|\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right| \neq 0$ mit $\left|\frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i^* - \xi_k^*}\right| \neq 0$ gleichbedeutend. Die beiden Transformationen können nun so eingerichtet werden, daß η_0 bzw. ψ_0 ins Unendliche geworfen wird. Man sieht, daß man die Voraussetzung (37′) des Hilfssatzes durch die Forderung ersetzen kann, daß $\frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ *für ein endliches oder unendliches* η_0 *einen vorgeschriebenen Wert annimmt, der selbst unendlich sein darf. Die Aussage des Hilfssatzes bleibt sonst wörtlich bestehen, ebenso die beiden aus ihm gezogenen Folgerungen.*

Man denke sich nun in den Voraussetzungen des 3. Hilfssatzes das Zahlenpaar α, β durch ein anderes α_1, β_1 ersetzt und es sei $\left|\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{matrix}\right| \neq 0$. Hierzu gehört dann ein neues Polynompaar $\sigma_1(\omega)$, $\tau_1(\omega)$ höchstens n-ten Grades. Es gilt dann der

4. Hilfssatz. *Die Polynome* $\tau(\omega)$ *und* $\tau_1(\omega)$ *sind teilerfremd. Mindestens eines von ihnen ist vom Grade n.*

Beweis: Man bilde

$$\delta(\omega) = \begin{vmatrix} \sigma(\omega) & \tau(\omega) \\ \sigma_1(\omega) & \tau_1(\omega) \end{vmatrix}.$$

Es ist $\delta(\eta_0) \neq 0$ (vgl. den Zusatz zum 3. Hilfssatze) und $\delta(\omega)$ ist also *ein nicht identisch verschwindendes Polynom höchstens* $2n$*-ten Grades.* Wegen

des Bestehens der Gleichungen (37) *verschwindet es an den* $2n$ *verschiedenen Stellen* ξ_i, η_i. Also ist

$$\delta(\omega) = c \prod_{i=1}^{n} (\omega - \xi_i)(\omega - \eta_i) \tag{42}$$

mit einer von Null verschiedenen Konstanten c. Eine gemeinsame Nullstelle von $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ könnte, so lehrt der Ausdruck (42) für $\delta(\omega)$, nur eine der Zahlen ξ_i oder η_i sein. Dort müßten aber auch $\sigma(\omega)$ und $\sigma_1(\omega)$ verschwinden, wie wieder aus den Gleichungen (37) folgt, und $\delta(\omega)$ hätte eine mehrfache Nullstelle, was nach (42) nicht der Fall ist.

Die Gradangabe des Hilfssatzes folgt sofort aus der Tatsache, daß $\delta(\omega)$ vom Grade $2n$ ist und $\sigma, \tau, \sigma_1, \tau_1$ höchstens vom Grade n sind.

5. Hilfssatz; *Es sei wieder das System der Werte* (36′) *und* (36″) *gegeben. Wir setzen jedoch jetzt voraus, daß der Rang* r *von* M *kleiner als* n *sei. Dann gibt es genau ein Paar von Polynomen* $\sigma(\omega)$ *und* $\tau(\omega)$ *höchstens* r*-ten Grades, das* (37) *befriedigt.*

Beweis: Man kann annehmen, daß der aus den ersten r Zeilen und Kolonnen genommene Minor von Null verschieden ist. Man bilde nun die Matrix

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^r & \varphi_1 & \varphi_1\xi_1 & \dots & \varphi_1\xi_1^r \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_1^r & \psi_1 & \psi_1\eta_1 & \dots & \psi_1\eta_1^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^r & \varphi_n & \varphi_n\xi_n & \dots & \varphi_n\xi_n^r \\ 1 & \eta_n & \dots & \eta_n^r & \psi_n & \psi_n\eta_n & \dots & \psi_n\eta_n^r \end{pmatrix}.$$

Es muß gezeigt werden, daß ihr Rang gleich $2r+1$ ist. Die Rangbetrachtungen beim Beweise des 3. Hilfssatzes lehren, daß die ersten $2r$ Zeilen in C_1, durch irgendeine weitere Zeile ergänzt, ein System von $2r+1$ unabhängigen Zeilen ergeben. Auf der anderen Seite gibt die Hinzufügung einer ξ-Zeile: $(1, \xi_k, \dots, \xi_k^r, \varphi_k, \varphi_k\xi_k, \dots, \varphi_k\xi_k^r)$ mit $k > r$ und einer η-Zeile: $(1, \eta_i, \dots, \eta_i^r, \psi_i, \psi_i\eta_i, \dots, \psi_i\eta_i^r)$ mit $i > r$ eine quadratische Matrix, deren Determinante, wie eine neuerliche Anwendung von (15) lehrt, verschwindet. Diese beiden Bemerkungen lehren offenbar, daß C_1 den Rang nicht ändert, wenn man der Reihe nach eine ξ-Zeile und dann eine η-Zeile, deren Indizes größer als r sind, streicht, bis nur eine Zeile dieser Art übrigbleibt. Aus allem dem folgt offenbar, daß C_1 tatsächlich den angegebenen Rang besitzt.

Auf Grund der beiden Folgerungen aus dem 3. Hilfssatze können wir hinzufügen:

1. Zusatz: *Mindestens eines der Polynome* $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ *ist vom Grade* r.

2. Zusatz: *Die Nullstellen des größten gemeinsamen Teilers von* $\sigma(\omega)$ *und* $\tau(\omega)$ *sind einfach und gehören dem System* (36′) *an.*

6. Hilfssatz: *Ist der Rang der Matrix M gleich r, so gibt es in ihr stets einen von Null verschiedenen r-reihigen Hauptminor.*

Beweis: Die ganz Zahl s $(0 \leqq s \leqq r)$ sei durch die Eigenschaft definiert, daß ein von Null verschiedener s-reihiger Hauptminor in M vorhanden ist, während alle mehr als s-reihigen Hauptminoren Null sind. Sei etwa der aus den ersten s Zeilen und Kolonnen entnommene Hauptminor von Null verschieden. Bezeichnet man mit M_{ik} $(i > s,\ k > s)$ den aus ihm durch Hinzufügung der i-ten Zeile und k-ten Kolonne entstehenden Minor von M, so ist wegen $\mathsf{M}_{ll} = 0$ $(l > r)$ nach Kronecker $\mathsf{M}_{ik}\mathsf{M}_{ki} = 0$. Hieraus folgt durch Rangbetrachtungen an der Matrix

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^s & \varphi_1 & \varphi_1\xi_1 & \dots & \varphi_1\xi_1^s \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_1^s & \psi_1 & \psi_1\eta_1 & \dots & \psi_1\eta_1^s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \xi_s & \dots & \xi_s^s & \varphi_s & \varphi_s\xi_s & \dots & \varphi_s\xi_s^s \\ 1 & \eta_s & \dots & \eta_s^s & \psi_s & \psi_s\eta_s & \dots & \psi_s\eta_s^s \\ 1 & \xi_i & \dots & \xi_i^s & \varphi_i & \varphi_i\xi_i & \dots & \varphi_i\xi_i^s \\ 1 & \eta_i & \dots & \eta_i^s & \psi_i & \psi_i\eta_i & \dots & \psi_i\eta_i^s \\ 1 & \xi_k & \dots & \xi_k^s & \varphi_k & \varphi_k\xi_k & \dots & \varphi_k\xi_k^s \\ 1 & \eta_k & \dots & \eta_k^s & \psi_k & \psi_k\eta_k & \dots & \psi_k\eta_k^s \end{pmatrix},$$

ähnlich denjenigen, welche beim Beweise des 5. Hilfssatzes durchgeführt worden sind, daß $\mathsf{M}_{ik} = \mathsf{M}_{ki} = 0$ ist, daß also s mit dem Rang r von M identisch ist.

7. Hilfssatz; *Über die Voraussetzungen des 5. Hilfssatzes hinaus werde gefordert, daß sämtliche r-reihigen Hauptminoren von M von Null verschieden seien. Dann ist für das durch den Hilfssatz definierte $\tau(\omega)$*

$$\tau(\xi_i) \neq 0, \quad \tau(\eta_i) \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Also sind (vgl. den zweiten Zusatz zum 5. Hilfssatze) $\sigma(\omega)$ *und* $\tau(\omega)$ *teilerfremd.*

Der Satz ist eine unmittelbare Folge des Zusatzes zum 3. Hilfssatze, wenn man ihn auf *alle* r-reihigen Hauptminoren von M anwendet und unter η_0 jedesmal irgendeinen Wert aus der Reihe (36′) versteht, der unter den beim Aufbau des gerade in Betracht gezogenen Minors verwendeten Werten nicht vorkommt.

Von nun an werde vorausgesetzt, daß die Wertsysteme (36′) und (36″) reell sind und daß

$$\xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n \tag{43}$$

ist. *Wir sprechen dann von einer Grundmatrix.* Wir beweisen der Reihe nach die Sätze:

1′. Satz: *Es werde gefordert, daß die Matrix M den Rang $n-1$ habe und daß sämtliche $n-1$-reihigen Hauptminoren derselben positiv*

seien. Mit (α_{ik}) *sei die adjungierte Matrix von* M*, also die Matrix der algebraischen Komplemente der Elemente von* M *bezeichnet. Dann ist die Funktion*

$$\varkappa(\omega) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{(\omega - \eta_i)(\omega - \xi_k)}$$

(44)
$$= -\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\omega - \xi_1} & \cdots & \frac{1}{\omega - \xi_n} \\ \frac{1}{\omega - \eta_1} & \frac{\psi_1 - \varphi_1}{\eta_1 - \xi_1} & \cdots & \frac{\psi_1 - \varphi_n}{\eta_1 - \xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\omega - \eta_n} & \frac{\psi_n - \varphi_1}{\eta_n - \xi_1} & \cdots & \frac{\psi_n - \varphi_n}{\eta_n - \xi_n} \end{vmatrix}$$

für ein ω*, das dem Innern eines der Intervalle* $\langle \xi_i \eta_i \rangle$ *angehört, nichtpositiv, und für ein* ω*, das außerhalb aller dieser Intervalle liegt, nichtnegativ.*

Beweis: Wir wissen, daß die durch den 5. Hilfssatz gekennzeichneten Polynome teilerfremd sind und daß $\tau(\xi_i) \neq 0$, $\tau(\eta_i) \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ ist (vgl. den 7. Hilfssatz). Nun betrachte man die Gleichungen (40), in denen hier n durch $n-1$ zu ersetzen ist. Aus ihnen folgt durch Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinantentheorie

$$\alpha_{11} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{n} \tau(\xi_l)\tau(\eta_l)}{\tau(\xi_1)\tau(\eta_1)} = |c_{pq}|_{p,q=0}^{n-2} \cdot \prod_{2 \leqq i < k \leqq n} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k),$$

(45) . . . . . .

$$\alpha_{nn} \cdot \frac{\prod_{l=1}^{n} \tau(\xi_l)\tau(\eta_l)}{\tau(\xi_n)\tau(\eta_n)} = |c_{pq}|_{p,q=0}^{n-2} \cdot \prod_{1 \leqq i < k \leqq n-1} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k).$$

Alle α_{ii} sind als positiv vorausgesetzt und auch die Produkte auf der rechten Seite von (45) sind es wegen der Voraussetzungen über die Anordnung der Werte ξ_i und η_i. Aus allem dem folgt, daß die Produkte $\tau(\xi_1)\tau(\eta_1)$, $\tau(\xi_2)\tau(\eta_2)$, ..., $\tau(\xi_n)\tau(\eta_n)$, die sämtlich von Null verschieden sind, sogar von *gleichem* Vorzeichen sind. Negativ können sie nicht sein, weil dann für jedes i die Werte $\tau(\xi_i)$ und $\tau(\eta_i)$ im Vorzeichen verschieden wären, also *in jedem Intervall* $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$ *mindestens eine Wurzel von* $\tau(\omega) = 0$ *liegen müßte.* Das ist ausgeschlossen, weil $\tau(\omega)$ höchstens vom $(n-1)$-ten Grade ist. Es sind also alle $\tau(\xi_l)\tau(\eta_l)$ und auch $|c_{pq}|_0^{n-2}$ *positiv.* Berechnet man nun $\varkappa(\omega)$ auf Grund des Gleichungssystems (40),

in dem hier n durch $n-1$ zu ersetzen ist, so erhält man nach einer einfachen Rechnung

$$(46') \qquad \prod_{l=1}^{n} \tau(\xi_l)\,\tau(\eta_l)\cdot\varkappa(\omega) = |c_{pq}|_0^{n-2} \sum_{i,k} \frac{\tau(\eta_i)\,\tau(\xi_k)}{(\omega-\eta_i)(\omega-\xi_k)}\cdot(-1)^{i+k}\,\Pi_{ik}.$$

Hierin bedeutet Π_{ik} das Differenzenprodukt von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{i-1}, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_n$, multipliziert mit dem Differenzenprodukt von $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$. Auf Grund der Lagrangeschen Interpolationsformel folgt aus (46'), falls zur Abkürzung $\prod_{i<k} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k) = \delta$ gesetzt wird, die endgültige Formel

$$(46) \qquad \prod_{l=1}^{n} \tau(\xi_l)\,\tau(\eta_l)\cdot\varkappa(\omega) = \delta\,|c_{pq}|_0^{n-2}\,\frac{\tau^2(\omega)}{(\omega-\xi_1)\ldots(\omega-\xi_n)(\omega-\eta_1)\ldots(\omega-\eta_n)}.$$

Aus ihr und dem Vorzeichen der darin auftretenden Konstanten ist das im Satz behauptete Verhalten von $\varkappa(\omega)$ unmittelbar ersichtlich.

1. Zusatz zum 1'. Satz: *Schließt man die Nullstellen von $\tau(\omega)$ aus, so kann in der Aussage des ersten Satzes „nicht-negativ" bzw. „nicht-positiv" durch „positiv" bzw. „negativ" ersetzt werden.*

2. Zusatz zum 1'. Satz: *Durch Grenzübergang $\omega \to \infty$ ergibt sich aus dem 1'. Satz die Ungleichung*

$$(44') \qquad \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \geqq 0.$$

Man bezeichne mit μ_{ik} den Minor von M, der durch Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte von M entsteht. Es gilt dann der

1''. Satz: *Sei $i < n$ ein fester und k ein variabler Index aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$. Ist dann die Determinante von M gleich Null und $\mu_{i,i+1} > 0$, $\mu_{kk} > 0$ bzw. $\mu_{i+1,i} > 0$, $\mu_{kk} > 0$ für jedes $k \neq i$, so gelten die Vorzeichenaussagen des 1'. Satzes und seiner beiden Zusätze.*

Beweis: Die Funktionen $\varkappa(\omega)$ und $\frac{\tau^2(\omega)}{(\omega-\xi_1)\ldots(\omega-\xi_n)(\omega-\eta_1)\ldots(\omega-\eta_n)}$ können bei unseren Voraussetzungen offenbar nicht identisch verschwinden. Gleichung (46), die bei verschwindender Determinante von M eine algebraische Identität darstellt, lehrt, daß sie bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen und dieser ist *von Null verschieden.* Man muß beweisen, daß er *positiv* ist. Die entgegengesetzte Annahme würde nach dem beim Beweise des 1'. Satzes eingeschlagenen Verfahren z. B. bei Voraussetzung der ersten Gruppe von Minorenungleichungen zu $\tau(\eta_i)\,\tau(\xi_{i+1}) < 0$, $\tau(\eta_k)\,\tau(\xi_k) < 0$ für jedes $k \neq i$ führen. Es wären also n getrennte Intervalle mit Zeichenwechsel von $\tau(\omega)$ vorhanden. Das steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\tau(\omega)$ höchstens vom Grade $n-1$ ist, *also höchstens $n-1$ Nullstellen hat.*

2. Satz: *Es werde jetzt angenommen, daß neben* (43) *die Voraussetzung erfüllt sei, daß sämtliche Grundminoren von* M (siehe Definition einer Grundmatrix auf S. 200 unten) *positiv seien. Dann ist die ebenso wie früher definierte Funktion* $\varkappa(\omega)$ *im Innern der Intervalle* $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$ *negativ und außerhalb derselben positiv*[7]).

Beweis: Für $n = 1$ ist der Satz trivial. Wir nehmen nun an, er sei für alle Werte kleiner n ($n \geqq 2$) bewiesen, und wollen ihn für den Wert n selbst beweisen. Sei zunächst $\omega = \omega_0$ eine Stelle außerhalb aller Intervalle $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$. Wir setzen mit einer zunächst noch unbestimmten Konstanten γ

$$\varphi_i^* = \varphi_i + \frac{\gamma}{\omega_0 - \xi_i}, \quad \psi_i^* = \psi_i + \frac{\gamma}{\omega_0 - \eta_i}.$$

Dann ist

$$\frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} = \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} + \frac{\gamma}{(\omega_0 - \eta_i)(\omega_0 - \xi_k)}.$$

Hieraus folgt, wie eine leichte Determinantenrechnung lehrt,

$$\left| \frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n = \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n + \gamma \varkappa(\omega_0) \tag{47'}$$

und

$$\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right| = \left| \frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} \right| - \gamma \varkappa^*(\omega_0), \tag{47''}$$

wenn die Adjungierte der Matrix $M^* = \left(\frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} \right)$ mit (α_{ik}^*) bezeichnet und $\varkappa^*(\omega) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}^*}{(\omega - \eta_i)(\omega - \xi_k)}$ gesetzt wird. Nun variiere man in $\varkappa(\omega_0)$ die ψ_i. Da die entstehende Funktion nicht identisch verschwindet und in jedem einzelnen ψ_i linear ist, kann man durch Abänderung der ursprünglichen ψ_i-Werte eine *Verkleinerung* von $\varkappa(\omega_0)$ herbeiführen, und es kann dabei die Abänderung der ψ_i-Werte so klein angenommen werden, daß die Voraussetzungen des Satzes nicht zerstört werden. Wenn wir also die Unmöglichkeit von $\varkappa(\omega_0) < 0$ beweisen, ist auch die Möglichkeit von $\varkappa(\omega_0) = 0$ widerlegt.

Sei jetzt $\varkappa(\omega_0)$ als *negativ* angenommen. Dann kann man nach (47') $\gamma = \gamma_0$ eindeutig so wählen, daß die Determinante von M^* verschwindet, und γ_0 ist *positiv*. Wenden wir nach Einsetzung dieses besonderen Wertes von γ die Formel (47') nicht auf die ganze Determinante, sondern auf ihre Hauptminoren der Ordnung $n - 1$ an[7a]), so erkennen wir, da wir uns

---

[7]) Der auf die *äußeren Werte* bezügliche Teil der Aussage gilt, wie aus dem Beweis hervorgeht, schon unter der Voraussetzung der Positivität der *Hauptminoren*.

[7a]) Natürlich ist bei jedem dieser Minoren die ihm entsprechende Funktion $\varkappa$ einzusetzen.

den Satz für kleinere n bereits bewiesen denken, daß M^* den Voraussetzungen des 1'. Satzes genügt. Es ist also $\varkappa^*(\omega_0) \geqq 0$. Aus (47'') folgt dann

$$\left|\frac{\varphi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right|_1^n = -\gamma_0 \varkappa^*(\omega_0) \leqq 0$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes.

Gehört ω_0 dem Innern eines der Intervalle $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$ an, so kann der Beweis ganz entsprechend mit Hilfe des 1''. Satzes geführt werden.

Mit Hilfe der erhaltenen Sätze kann der folgende Hilfssatz bewiesen werden:

8. Hilfssatz: *Sind alle Grundminoren der Matrix M nicht-negativ, so kann man durch eine beliebig kleine Abänderung der Werte φ_i und ψ_i erreichen, daß sämtliche Grundminoren positiv werden. (Entsprechendes gilt für die Hauptminoren und wird ebenso bewiesen.)*

Beweis: Die Zahl ϱ sei durch die Eigenschaft charakterisiert, daß alle Grundminoren von M, deren Ordnung ϱ nicht übersteigt, positiv seien, während es einen verschwindenden Grundminor von der Ordnung $\varrho + 1$ gibt. Nun sei ω_0 eine Zahl außerhalb des Intervalles $\langle \xi_0, \eta_{2n} \rangle$ und ε eine beliebig kleine positive Größe. Man setze

$$\varphi_i^* = \varphi_i + \frac{\varepsilon}{\omega_0 - \xi_i}, \quad \psi_i^* = \psi_i + \frac{\varepsilon}{\omega_0 - \eta_i}.$$

Die Minoren der Matrix $M^* = \left(\frac{\varphi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k}\right)$ der Ordnung $\varrho + 1$ unterscheiden sich von den entsprechenden Minoren von M um mit ε multiplizierte Ausdrücke der Form (44), in denen $\omega = \omega_0$ und $n = \varrho + 1$ gesetzt ist. Wegen der Voraussetzung über die Lage von ω_0 und das Vorzeichen von ε ist die Änderung auf Grund unserer Sätze bei Grundminoren *eine nicht-negative* Größe. Vermeidet man bei der Wahl von ω_0 gewisse endlich viele Werte (vgl. den 1. Zusatz zum 1'. Satz), so ist sie bei *allen* Grundminoren der Ordnung $\varrho + 1$ *positiv*, wie klein auch ε gewählt ist. Durch Anwendung des 2. Satzes erkennt man, daß die Grundminoren niedrigerer als $(\varrho + 1)$-ter Ordnung eine *Vergrößerung* erfahren haben, also *positiv geblieben sind.* Somit ist in der neuen Matrix an Stelle von ϱ mindestens $\varrho + 1$ getreten. Jetzt schließe man analog von $\varrho + 1$ auf $\varrho + 2$ usf.

Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz kann man schließen: *Sind alle Grundminoren von M nicht-negativ, so gilt die Vorzeichenaussage des 1'. Satzes.*

Verallgemeinerung des 8. Hilfssatzes: *Sind aus zugeordneten Wertepaaren mehrere Matrizen der Gestalt M gebildet, deren Grundminoren alle nicht-negativ sind, so kann durch eine beliebig kleine Abänderung der Funktionswerte erreicht werden, daß alle Grundminoren in allen Matrizen positiv werden. Entsprechendes gilt für die Hauptminoren.*

Der Beweis kann ebenso geführt werden wie beim 8. Hilfssatz.

Verschärfung des 2. Satzes: *Wir führen das Polynom*

$$\lambda(\omega) = \varkappa(\omega) \prod_{i=1}^{n} (\omega - \xi_i)(\omega - \eta_i)$$

ein. Als Verschärfung der Aussage des 2. Satzes kann behauptet werden, daß es unter den dort gemachten Voraussetzungen beständig positiv ist und daß sein Grad genau gleich $2n-2$ *ist*[8]).

Beweis: Der erste Teil der Aussage ist für ein ω, daß nicht dem System (36′) angehört, mit dem 2. Satze gleichbedeutend. Fällt ω in das System (36′) hinein, so ist zunächst gewiß $\lambda(\omega) \geqq 0$. Die Möglichkeit von $\lambda(\omega) = 0$ kann aber durch eine Variation der ψ_i, ähnlich wie beim Beweise des 2. Satzes, widerlegt werden.

Ferner beweist man durch Variation der ψ_i, daß der Koeffizient von ω^{2n-2} in $\lambda(\omega)$

$$\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} > 0$$

sein muß, daß also tatsächlich $\lambda(\omega)$ vom Grade $2n-2$ ist. Dies kann übrigens auch als projektive Erweiterung des 2. Satzes auf $\omega = \infty$ angesehen werden. (Siehe die Überlegungen auf S. 198.)

Die *schon bei Positivität der Hauptminoren gültige* Aussage, daß $\lambda(\omega)$ an den Stellen ξ_i und η_i positiv ist, hat eine sehr einfache Bedeutung. Es ist z. B.

$$\lambda(\eta_1) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\eta_1-\xi_1} & \frac{1}{\eta_1-\xi_2} & \cdots & \frac{1}{\eta_1-\xi_n} \\ \frac{\psi_2-\varphi_1}{\eta_2-\xi_1} & \frac{\psi_2-\varphi_2}{\eta_2-\xi_2} & \cdots & \frac{\psi_2-\varphi_n}{\eta_2-\xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\psi_n-\varphi_1}{\eta_n-\xi_1} & \frac{\psi_n-\varphi_2}{\eta_n-\xi_2} & \cdots & \frac{\psi_n-\varphi_n}{\eta_n-\xi_n} \end{vmatrix}$$

$$(\eta_1-\xi_1)\ldots(\eta_1-\xi_n)(\eta_1-\eta_2)\ldots(\eta_1-\eta_n),$$

also

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\eta_1-\xi_1} & \frac{1}{\eta_1-\xi_2} & \cdots & \frac{1}{\eta_1-\xi_n} \\ \frac{\psi_2-\varphi_1}{\eta_2-\xi_1} & \frac{\psi_2-\varphi_2}{\eta_2-\xi_1} & \cdots & \frac{\psi_2-\varphi_n}{\eta_2-\xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\psi_n-\varphi_1}{\eta_n-\xi_1} & \frac{\psi_n-\varphi_2}{\eta_n-\xi_2} & \cdots & \frac{\psi_n-\varphi_n}{\eta_n-\xi_n} \end{vmatrix} > 0.$$

Dies besagt, daß die Determinante der Matrix M, falls darin ψ_1 durch eine Variable ersetzt wird, zu einer *streng wachsenden Funktion* wird.

[8]) Die Positivität *außerhalb der offenen Intervalle* (ξ_i, η_i) *und die Gradaussage* fließen, wie aus dem Beweis mit Benützung der Anm. [7]) leicht hervorgeht, schon aus der *Positivität der Hauptminoren.*

Allgemein erkennt man auf diese Art, daß bei *Ersetzung eines ψ_i durch eine Veränderliche stets eine wachsende, bei Ersetzung eines φ_i durch eine Veränderliche stets eine abnehmende Funktion entsteht.*

Bemerkung: Nimmt man nur an, daß alle Hauptminoren *nichtnegativ* sind, so kann man offenbar behaupten (vgl. den 8. Hilfssatz, Klammeraussage), daß die eben abgeleiteten Aussagen richtig bleiben, falls darin „Wachsen" durch „Nichtabnehmen" und „Abnehmen" durch „Nichtzunehmen" ersetzt wird[8a]).

Nun beweisen wir die wichtigen Sätze 3 bis 5.

3. Satz: *Es seien die Voraussetzungen des 2. Satzes erfüllt und $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ sei eines der ∞^1 Paare von Polynomen höchstens n-ten Grades, die den Gleichungen* (37) *genügen. Dann ist $\tau(\omega)$ mindestens vom Grade $n-1$, und seine Wurzeln sind reell und einfach.*

4. Satz: *Führt man neben $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ ein weiteres davon verschiedenes Polynompaar $\sigma_1(\omega)$, $\tau_1(\omega)$ von der im vorhergehenden Satze betrachteten Art ein, so ist mindestens eines der Polynome $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ vom Grade n, und die Wurzeln der Gleichungen $\tau(\omega)=0$ und $\tau_1(\omega)=0$ trennen einander gegenseitig.*

5. Satz: *Die mit einem Polynompaare des 3. Satzes gebildete rationale Funktion $\varrho(\omega)=\frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ hat lauter reelle einfache Pole, von denen keiner dem Wertsystem* (36′) *angehört. Das Residuum eines Pols ist positiv oder negativ, je nachdem, ob er innerhalb eines der Intervalle $\langle\xi_i, \eta_i\rangle$ liegt oder außerhalb aller.*

Wir beweisen die Sätze 3 und 4 gleichzeitig. Wir gehen von der Bemerkung aus: Das allgemeinste Polynompaar, wie es der 3. Satz fordert, ist offenbar $\alpha\sigma+\alpha_1\sigma_1$, $\alpha\tau+\alpha_1\tau_1$ (α, α_1 sind Konstante, die nicht beide Null sind). Nach dem 1. Hilfssatze[9]) genügt der Quotient $\chi(\omega)=\frac{\alpha\sigma+\alpha_1\sigma_1}{\alpha\tau+\alpha_1\tau_1}$ der Riccatischen Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} \chi'(\omega) & \frac{\chi(\omega)-\varphi_1}{\omega-\xi_1} & \cdots & \frac{\chi(\omega)-\varphi_n}{\omega-\xi_n} \\ \frac{\psi_1-\chi(\omega)}{\eta_1-\omega} & \frac{\psi_1-\varphi_1}{\eta_1-\xi_1} & \cdots & \frac{\psi_1-\varphi_n}{\eta_1-\xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\psi_n-\chi(\omega)}{\eta_n-\omega} & \frac{\psi_n-\varphi_1}{\eta_n-\xi_1} & \cdots & \frac{\psi_n-\varphi_n}{\eta_n-\xi_n} \end{vmatrix} = 0.$$

8a) Man könnte diese Monotoniesätze dazu verwenden, um die Beweise des zweiten Paragraphen durch neue zu ersetzen, die von der Differenzierbarkeit monotoner Funktionen höherer Stufe keinen Gebrauch machen.

9) Man ersetze darin n durch $n+1$ und lasse ein Wertepaar in ω zusammenrücken.

Nach $\chi'(\omega)$ aufgelöst, lautet sie

$$\chi'(\omega) = \frac{\varkappa(\omega)}{\left|\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right|_1^n}\chi^2 + \ldots. \tag{49'}$$

Die Punkte deuten die Glieder erster und nullter Ordnung in χ an. Nach einfachster Rechnung ergibt sich hieraus die Beziehung

$$\begin{vmatrix} \tau(\omega) & \tau_1(\omega) \\ \frac{d\tau(\omega)}{d\omega} & \frac{d\tau_1(\omega)}{d\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma(\omega) & \tau(\omega) \\ \sigma_1(\omega) & \tau_1(\omega) \end{vmatrix} \cdot \frac{\varkappa(\omega)}{\left|\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right|_1^n}$$

oder unter Beachtung von (42)

$$\begin{vmatrix} \tau(\omega) & \tau_1(\omega) \\ \frac{d\tau(\omega)}{d\omega} & \frac{d\tau_1(\omega)}{d\omega} \end{vmatrix} = c \prod_{i=1}^{n} (\omega - \xi_i)(\omega - \eta_i) \cdot \frac{\varkappa(\omega)}{\left|\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right|_1^n} = \frac{c\,\lambda(\omega)}{\left|\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right|_1^n}; \tag{49}$$

$\lambda(\omega)$ ist also, abgesehen von einem von Null verschiedenen konstanten Faktor c mit der Wronskischen Determinante von $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ identisch. Hieraus und aus der Tatsache, daß $\lambda(\omega)$ vom Grade $2n-2$ ist, $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ aber höchstens vom Grade n sind, schließt man sofort auf die Richtigkeit der Gradaussagen des 3. und 4. Satzes. Wenn man ferner beachtet, daß $\lambda(\omega)$ keine reelle Nullstelle hat, so kann man in bekannter Weise aus (49) schließen, daß die reellen Nullstellen von $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ *einfach* sind und *einander gegenseitig trennen* und dies gilt *in dem erweiterten Sinne, daß, falls eines der Polynome den Grad $n-1$ hat, ∞ als Nullstelle desselben angesehen wird und daß die Trennung der Wurzeln im projektiven Sinne aufgefaßt wird.* Der 3. und 4. Satz werden also vollständig bewiesen sein, wenn noch gezeigt wird, daß $\tau(\omega)$ *überhaupt keine komplexen Wurzeln haben kann.* Das sieht man so ein: Man bestimme die Konstanten α, $\alpha_1 \neq 0$, 0 so, daß das Polynom $\tau_2(\omega) = \alpha\tau(\omega) + \alpha_1\tau_1(\omega)$ in $\omega = \eta_n$ verschwindet. Da $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ nirgends gleichzeitig verschwinden, so ist dies genau auf eine Art möglich. Mit τ_2 verschwindet auch $\sigma_2(\omega) = \alpha\sigma(\omega) + \alpha_1\sigma_1(\omega)$ in η_n. Man kann also schreiben

$$\sigma_2(\omega) = (\omega - \eta_n)\sigma^*(\omega), \quad \tau_2(\omega) = (\omega - \eta_n)\tau^*(\omega);$$

$\sigma^*(\omega)$, $\tau^*(\omega)$ sind Polynome höchstens $(n-1)$-ten Grades und sie genügen dem Gleichungssystem (37), in dem die letzte Gleichung gestrichen ist. Denkt man sich nun die Behauptungen des 3. und 4. Satzes für kleinere n bereits bewiesen, so kann man schließen, daß $\tau^*(\omega)$ lauter

reelle Wurzeln hat[10]); *also ist dies auch bei* $\tau_2(\omega)$ *der Fall.* Ist $\tau = \text{const.}\,\tau_2$, so ist man fertig. Sei jetzt $\tau \neq \text{const.}\,\tau_2$. Da dann auch die reellen Nullstellen von $\tau(\omega)$ und $\tau_2(\omega)$ einander gegenseitig trennen, so *ist mit* $\tau_2(\omega)$ *offenbar auch* $\tau(\omega)$ *frei von komplexen Nullstellen.*

Für $n = 1$ sind die Aussagen der beiden Sätze trivial. Damit ist der Beweis derselben vollständig erbracht.

Der erste Teil des 5. Satzes folgt unmittelbar aus der Einfachheit der Nullstellen von $\tau(\omega)$ in Verbindnng mit den Relationen (37). Die weiteren Aussagen über die Residuen ergeben sich aus Gleichung (49′). Aus ihr folgt nämlich für das Residuum im Pole ω

$$1 : \text{Res.} = -\frac{\varkappa(\omega)}{\left|\frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k}\right|_1^n}$$

und hieraus nach dem 2. Satze das behauptete Vorzeichen von Res.

Es werde jetzt vorausgesetzt, daß der Rang r von M *kleiner als* n sei und daß sämtliche Grundminoren, deren Ordnung r nicht übersteigt, *positiv* seien. Wir wissen (vgl. den 5. Hilfssatz), daß dann die Gleichungen (37) ein Paar von Polynomen höchstens r-ten Grades $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ bestimmen, von denen eines den Grad r erreicht. Dem Hilfssatze 7 entnimmt man ferner, daß sie teilerfremd sind und daß $\tau(\xi_i) \neq 0$, $\tau(\eta_i) \neq 0$ ist. Darüber hinaus folgt nun fast unmittelbar aus dem 3. und 5. Satz, angewandt auf *alle* r-reihigen Hauptminoren, der

6. Satz: $\tau(\omega)$ *ist mindestens von* $(r-1)$*-tem Grade. Seine Nullstellen sind alle reell und einfach. Die rationale Funktion* r*-ten Grades* $\varrho(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ *hat lauter reelle einfache Pole, die außerhalb des Intervalles* $\langle \xi_0\, \eta_{2n} \rangle$ *liegen. Das Residuum aller Pole ist negativ.* Wir betonen noch, *daß wegen* $\tau(\xi_i) \neq 0$, $\tau(\eta_i) \neq 0$ *die Funktion an den Stellen* ξ_i *bzw.* η_i *die Werte* φ_i *bzw.* ψ_i wirklich annimmt.

§ 5.

Interpolation durch monotone Funktionen.

Wir denken uns ein System von $2n+1$ Werten

(50′) $$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{2n}$$

und eine zweite Größenreihe

(50″) $$\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{2n}$$

[10]) Streicht man nämlich in (36′) und (36″) die beiden letzten Werte und in (37) die Gleichungen $\sigma(\xi_n) = \varphi_n \tau(\xi_n)$, $\sigma(\eta_n) = \psi_n \tau(\eta_n)$, so sind offenbar die Voraussetzungen des 3. Satzes erfüllt, nur mit einem um 1 kleineren n.

gegeben und fragen: Gibt es eine im Intervall $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$ von n-ter Stufe monotone Funktion $\chi(\omega)$, die für $\omega = \omega_i$ den Wert χ_i annimmt:

$$\chi(\omega_i) = \chi_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2n). \tag{51}$$

Die im folgenden abgeleiteten Sätze enthalten eine Beantwortung dieser Frage.

Um zu Lösbarkeitsbedingungen zu gelangen, bilden wir die beiden Matrizen n-Grades

$$M_1 = \left(\frac{\chi_{2i-1} - \chi_{2k-2}}{\omega_{2i-1} - \omega_{2k-2}}\right)_{i,k=1}^{n}, \qquad M_2 = \left(\frac{\chi_{2i} - \chi_{2k-1}}{\omega_{2i} - \omega_{2k-1}}\right)_{i,k=1}^{n}$$

Aus den Ergebnissen von § 1 folgt, *daß eine Lösung der Aufgabe nur dann existieren kann, wenn sämtliche Minoren sowohl von M_1 als auch von M_2 nicht-negativ sind. Wir werden beweisen, daß schon die Nichtnegativität ihrer Grundminoren hierfür hinreichend ist, und wir werden einfache Interpolationsfunktionen angeben.*

Im folgenden werden wir es häufig mit rationalen Funktionen zu tun haben, deren Pole alle reell und einfach und mit negativen Residuen behaftet sind. Es sind bekanntlich die einzigen reellen rationalen Funktionen, die für Argumentwerte mit positivem Imaginärteil Funktionswerte liefern, deren Imaginärteil nicht negativ ist. Funktionen mit letzterer Eigenschaft sollen nach Pick hier „positive" Funktionen genannt werden. „Positive" reelle rationale Funktionen sind in jedem polfreien Intervall von *beliebig hoher Stufe monoton*, da dies ja schon für die Partialbrüche zutrifft.

Wir behandeln nun zuerst den allgemeinen Fall, daß alle Grundminoren sowohl von M_1 als auch von M_2 *positiv* sind, und beweisen den

1. Satz: *Es seien sämtliche Grundminoren von M_1 und von M_2 positiv. Man bilde das wohl bestimmte Paar von Polynomen $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ höchstens n-ten Grades, das die Relationen*

$$\sigma(\omega_i) = \chi_i \tau(\omega_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2n)$$

befriedigt. Dann ist $\tau(\omega_i) \neq 0$, die rationale Funktion $\varrho(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ befriedigt also die Forderungen (51). *Es ist eine „positive" Funktion von genau n-tem Grade und ihre Pole liegen außerhalb von $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$. Sie stellt also eine Lösung der Interpolationsaufgabe dar.*

Zum Beweise wenden wir die Sätze 3 und 5 des vorhergehenden Paragraphen zweimal an. Das eine Mal setzen wir

$$\xi_i = \omega_{2i-2}, \quad \eta_i = \omega_{2i-1}, \quad \varphi_i = \chi_{2i-2}, \quad \psi_i = \chi_{2i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

also $M = M_1$, das andere Mal

$$\xi_i = \omega_{2i-1}, \quad \eta_i = \omega_{2i}, \quad \varphi_i = \chi_{2i-1}, \quad \psi_i = \chi_{2i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

also $M = M_2$. Man erhält so über das Vorzeichen des Residuums eines etwaigen Pols von $\varrho(\omega)$ in einem Intervall (ω_{i-1}, ω_i) *entgegengesetzte* Aussagen, *es kann dort also überhaupt kein Pol liegen.* Dem Satz 5 des vorigen Paragraphen ist ferner zu entnehmen, daß auch die ω_i keine Pole sein können. Damit ist das ganze Intervall $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$ als polfrei festgestellt. Dem eben zitierten Satze zufolge sind aber alle Pole der Funktion reell und einfach, also auf der reellen Achse außerhalb von $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$ gelegen und, der Residuenaussage des Satzes entsprechend, mit negativen Residuen behaftet.

Das einzige, was noch fehlt, ist der Nachweis von $\tau(\omega_i) \neq 0$, denn dann ist auch die Gradaussage zufolge der beiden Folgerungen aus dem 3. Hilfssatze des vorigen Paragraphen mit bewiesen. Daß $\tau(\omega_0)$ und $\tau(\omega_{2n})$ nicht verschwinden können, folgt unmittelbar aus dem Zusatze zum 3. Hilfssatze des vorigen Paragraphen, wenn man ihn auf die beiden Matrizen M_2 und M_1 anwendet. Sei jetzt i ein Index aus der Reihe $1, 2, \ldots, 2n-1$. Nehmen wir entgegen der Behauptung an, daß $\tau(\omega_i) = 0$ ist! Dann kann man durch eine kleine Variation der χ_i, welche die Voraussetzungen des Satzes nicht zerstört, *da keine der Nullstellen* von $\tau(\omega)$ *hierbei festbleibt*, gewiß erreichen, daß ω_i in eine benachbarte, aber davon verschiedene Stelle des Intervalls $(\omega_{i-1}, \omega_{i+1})$ rückt. Da σ und τ außerhalb der Interpolationsstellen nicht gleichzeitig verschwinden können, widerspricht dies der bereits bewiesenen Endlichkeit von $\varrho(\omega)$ im ganzen Intervall $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$, die ja auch nach der Variation der χ_i bestehen muß. Damit ist der ganze 3. Satz bewiesen.

Unter den Voraussetzungen des 1. Satzes gibt es auch eine wohlbestimmte rationale Funktion $(n-1)$-ten Grades $\varrho^*(\omega)$, die allein den Forderungen

$$\varrho^*(\omega_i) = \chi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1) \tag{52}$$

genügt; denn die Matrix M_1^*, die aus M_2 durch Streichung der letzten Zeile und Spalte entsteht, erfüllt zusammen mit der Matrix M_2^*, die wiederum aus M_1 durch Weglassung der ersten Zeile und Kolonne hervorgeht, dieselben Forderungen wie M_1 mit M_2, nur mit einem um 1 kleineren n. $\varrho^*(\omega)$ ist also zufolge des 1. Satzes eine positive Funktion und das Intervall $\langle \omega_1, \omega_{2n-1} \rangle$ gewiß polfrei. Darüber hinaus gilt aber unter den Voraussetzungen des 1. Satzes der

2. Satz: *Die eben definierte Funktion* $\varrho^*(\omega)$ *hat ihre Pole außerhalb des Intervalls* $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$. *Es ist*

$$\varrho^*(\omega_0) > \varrho(\omega_0) = \chi_0, \quad \varrho^*(\omega_{2n}) < \varrho(\omega_{2n}) = \chi_{2n}; \tag{53}$$

$\varrho(\omega)$ bedeutet die durch den 1. Satz gekennzeichnete Funktion.

Beweis: Ist ω ein Wert aus dem Intervall $\omega_{2n-1} < \omega \leqq \omega_{2n}$, so ist die Determinante, die aus der von M_2 durch Ersetzung von ω_{2n} durch ω entsteht,

$$(54) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\varrho(\omega_2)-\varrho(\omega_1)}{\omega_2-\omega_1} & \cdots & \frac{\varrho(\omega_2)-\varrho(\omega_{2n-1})}{\omega_2-\omega_{2n-1}} \\ \frac{\varrho(\omega_4)-\varrho(\omega_1)}{\omega_4-\omega_1} & \cdots & \frac{\varrho(\omega_4)-\varrho(\omega_{2n-1})}{\omega_4-\omega_{2n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\

Daß es nicht mehr als eine Funktion $\varrho^{**}(\omega)$ geben kann, die (55) erfüllt, ist unmittelbar klar; denn die Differenz zweier Funktionen dieser Art wäre eine rationale Funktion vom Höchstgrade $2n-2$, die an $2n-1$ verschiedenen Stellen verschwindet.

Die Konstruktion der gewünschten Funktion und Feststellung ihrer Eigenschaften kann nun etwa in folgender Weise geschehen: Wie die Verallgemeinerung des 8. Hilfssatzes von § 4 lehrt, kann durch eine beliebig kleine Änderung der χ_i erreicht werden, daß die Voraussetzungen des 2. Satzes erfüllt sind. $\varrho^*(\omega)$ sei dann die durch den 2. Satz charakterisierte Funktion. Ich behaupte, daß sie in der ganzen komplexen ω-Ebene mit Ausschluß der Halbgeraden $\omega \leqq \omega_0$, $\omega \geqq \omega_{2n}$ mit gegen Null gehenden Variationen der χ_i gegen eine wohlbestimmte Grenzfunktion $\varrho^{**}(\omega)$ strebt und daß diese die gesuchte Funktion ist. Das sieht man so ein: $\varrho_1^*(\omega)$, $\varrho_2^*(\omega)$ seien die rationalen Funktionen $(n-1)$-ten Grades, die zu zwei verschiedenen Variationen der χ_i gehören. Die Differenz

$$\delta(\omega) = \varrho_1^*(\omega) - \varrho_2^*(\omega)$$

ist dann *eine rationale Funktion höchstens vom Grade* $2n-2$, *und ihre Pole sind reell und außerhalb von* $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$ *gelegen.* Nun werde angenommen, daß bei beiden Funktionen $\varrho_1^*(\omega)$ und $\varrho_2^*(\omega)$ die Variationen der χ_i alle absolut genommen kleiner als die positive Zahl ε seien. Aus den angegebenen Eigenschaften von $\delta(\omega)$ ergibt sich dann leicht nach Darstellung des Zählers von δ mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel die Abschätzungsformel

$$|\delta(\omega)| < 2\,\varepsilon_{a(\omega)}^{2n-2} \sum_{i=1}^{2n-1} \left| \frac{\Pi(\omega)}{\Pi'(\omega_i)(\omega-\omega_i)} \right|.$$

Darin bedeutet $\Pi(\omega)$ das Produkt $\prod_{i=1}^{2n-1}(\omega-\omega_i)$, ferner $a(\omega)$ eine Schranke von $\left|\frac{\beta-\alpha}{\omega-\alpha}\right|$ bei Beschränkung von β auf das Intervall $\langle \omega_1\ \omega_{2n-1} \rangle$ und von α auf die beiden Halbgeraden $\alpha \leqq \omega_0$, $\alpha \geqq \omega_{2n}$.

Aus der erhaltenen Abschätzungsformel ist zu ersehen, daß das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt ist. Der Leser kann sich nun leicht allein überlegen, daß aus den im 2. Satze bewiesenen Eigenschaften von $\varrho^*(\omega)$ die im 3. Satze behaupteten der Grenzfunktion $\varrho^{**}(\omega)$ folgen.

Aus den bewiesenen drei Sätzen lassen sich interessante Eigenschaften monotoner Funktionen ableiten. Wir geben drei an und überlassen die Beweise, da sie sehr einfach sind, dem Leser:

4. Satz: *Ist $\chi(\omega)$ monoton von n-ter Stufe und für ein System von $2n$ Werten des Definitionsintervalls $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \lambda_n < \mu_n$* die Determinante

$$\left| \frac{\chi(\mu_i) - \chi(\lambda_k)}{\mu_i - \lambda_k} \right|_1^n = 0, \tag{56}$$

so ist $\chi(\omega)$ im Innern von $\langle \lambda_1, \mu_n \rangle$ rational und höchstens vom Grade $n-1$.

5. Satz: *Ist $\chi(\omega)$ monoton von $(n+1)$-ter Stufe und* (56) *erfüllt, so ist $\chi(\omega)$ im ganzen Innern des Definitionsintervalls rational.*

6. Satz: *Ist $\chi(\omega)$ in zwei übereinandergreifenden Intervallen monoton von n-ter Stufe, so auch in deren Vereinigung.*

§ 6.

Differenzierbarkeitseigenschaften monotoner Funktionen.

Die Funktion $\chi(\omega)$ sei im Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ monoton von n-ter Stufe ($n \geqq 2$). Wir werden beweisen, *daß sie in jedem Intervall $\langle \alpha', \beta' \rangle$, das mit seinen Endpunkten im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ liegt, einen beschränkten $(2n-2)$-ten Differenzenquotienten besitzt. Hieraus folgt, daß $\chi(\omega)$* im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ *mindestens $(2n-3)$-mal stetig differenzierbar ist.* Man kann sich an Hand von Beispielen überzeugen, daß die Existenz von höheren Ableitungen allgemein nicht behauptet werden kann.

Sei $\omega_1, \omega_2 \ldots, \omega_{2n-1}$ ein System von $2n-1$ verschiedenen Werten aus dem Intervall $\langle \alpha', \beta' \rangle$ und

$$\alpha' \leqq \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{2n-1} \leqq \beta'.$$

Wir suchen eine Abschätzung des Betrages des mit ihnen gebildeten Differenzenquotienten q von $\chi(\omega)$ zu gewinnen. Zu dem Zwecke ziehen wir den Satz 3 des vorigen Paragraphen heran, in dem wir $\omega_0 = \alpha$, $\omega_{2n} = \beta$ setzen und $\chi_i = \chi(\omega_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, 2n)$. Wegen der vorausgesetzten Monotonie von $\chi(\omega)$ sind die Voraussetzungen desselben erfüllt. $\varrho(\omega)$ [11]) sei die rationale Interpolationsfunktion. Es ist also

$$\varrho(\omega_i) = \chi(\omega_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

und man kann den Differenzenquotienten q mit den Funktionswerten $\varrho(\omega_i)$ bilden.

Die Partialbruchzerlegung von $\varrho(\omega)$, über die Satz 3 eine Aussage enthält, erlaubt, die Funktion in der Form

$$\varrho(\omega) = a + a_0 \omega + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\alpha_i - \omega} \text{ [12])} \tag{57}$$

[11]) Der Einfachheit halber schreiben wir jetzt statt ϱ^{**} lieber ϱ.

[12]) Mindestens eine der Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ist Null.

anzusetzen. Die Größen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sind nicht-negative Zahlen und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ reell und außerhalb von $\langle \alpha, \beta \rangle$ gelegen. Es ist

$$\frac{q}{(2n-2)!} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2) \cdots (\alpha_i - \omega_{2n-1})} \quad (n \geqq 2).$$

Hieraus folgt, wenn mit b die kleinere der Differenzen $\beta - \beta'$, $\alpha' - \alpha$ bezeichnet wird,

$$\frac{|q|}{(2n-2)!} \leqq \frac{1}{b^{2n-3}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)}. \tag{58'}$$

Aus dem § 2 wissen wir bereits, daß der erste Differenzenquotient q_1 von $\chi(\omega)$ in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ beschränkt ist. Bilden wir ihn mit den Werten $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$, so erhalten wir

$$0 \leqq q_1 = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)} \leqq K = \text{Const}, \tag{59}$$

in (59) stehen lauter nicht-negative Summanden. Also ist auch

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)} \leqq K. \tag{60}$$

(58') und (60) ergeben zusammen

$$\frac{|q|}{(2n-2)!} \leqq \frac{K}{b^{2n-3}}, \tag{58''}$$

womit die Beschränktheit von q bewiesen ist.

Entsprechend bekommt man offenbar für jeden Differenzenquotienten q_m der Ordnung $m \leqq 2n-2$ die Abschätzung

$$\frac{|q_m|}{m!} \leqq \frac{K}{b^{m-1}} \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2n-2). \tag{58}$$

Wir fragen jetzt nach der Natur einer Funktion $\chi(\omega)$, die in $\langle \alpha, \beta \rangle$ *von beliebig hoher Stufe monoton ist.* Es liegt nahe, so vorzugehen: Wir teilen das Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ in 2^p gleiche Teile und bilden mit den Teilpunkten nach Satz 3 des vorigen Paragraphen die zugehörige Interpolationsfunktion $\varrho_p(\omega)$ vom Höchstgrade $2^{p-1} - 1$. Aus der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ und aller $\varrho_p(\omega)$ sowie der Stetigkeit von $\chi(\omega)$ im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ ergibt sich offenbar die Limesgleichung

$$\lim_{p \to \infty} \varrho_p(\omega) = \chi(\omega) \qquad (\alpha < \omega < \beta). \tag{61}$$

Es soll nun gezeigt wenden, daß $\lim_{p \to \infty} \varrho_p(\omega)$ auch für jedes komplexe ω existiert. Wir ziehen wieder die Darstellung (57) einer Inter-

polationsfunktion heran. Aus ihr ergibt sich für die Ableitung $\varrho'(\omega)$ die Abschätzung

$$|\varrho'(\omega)| \leqq a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{|\alpha_i - \omega|^2}.$$

Kombinieren wir sie wieder mit (59), so erhalten wir die Ungleichung

$$|\varrho'(\omega)| \leqq a_0 + \sum \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)} \cdot \frac{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)}{|\alpha_i - \omega|^2} \leqq K \cdot R(\omega),$$

wenn wir unter $R(\omega)$ die größte der Zahlen

$$1, \quad \frac{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)}{|\alpha_i - \omega|^2} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

verstehen. Aus ihr ist unmittelbar zu entnehmen, daß in jedem beschränkten abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{T}$ der komplexen ω-Ebene, der keinen Punkt der beiden Halbgeraden $\omega \geqq \beta$ und $\omega \leqq \alpha$ enthält, $|\varrho'(\omega)|$ unter einer endlichen von n und der Wahl von $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n-1}$ unabhängigen Schranke liegt. Nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie folgt hieraus und aus der Limesgleichung (61), daß $\varrho_p(\omega)$ in $\mathfrak{T}$ mit wachsendem p *gleichmäßig gegen eine analytische Grenzfunktion* $X(\omega)$ konvergiert. Die Funktion $X(\omega)$ ist also in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Halbgeraden $\omega \geqq \beta$, $\omega \leqq \alpha$ erklärt, und sie fällt im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ mit $\chi(\omega)$ zusammen.

Da alle Interpolationsfunktionen „positive" Funktionen sind, so auch die Grenzfunktionen $\chi(\omega)$. Wir fassen zusammen: *Eine in* $\langle \alpha, \beta \rangle$ *von beliebig hoher Stufe monotone Funktion ist im Innern von* $\langle \alpha, \beta \rangle$ *analytisch und gibt, ins Komplexe fortgesetzt, eine „positive" Funktion.*

Es gilt aber auch die Umkehrung: *Ist* $\chi(\omega)$ *eine „positive" Funktion, die in einem Intervall* (α, β) *der reellen Achse reelle Randwerte annimmt, so ist sie dort von beliebig hoher Stufe monoton. Sind die Grenzwerte*

$$\lim_{\omega \to \alpha + 0} \chi(\omega) = A \quad \text{und} \quad \lim_{\omega \to \beta - 0} \chi(\omega) = B$$

endlich, so kann sie also zu einer in ganz $\langle \alpha, \beta \rangle$ *von beliebig hoher Stufe monotonen Funktion erweitert werden, indem man für* $\chi(\alpha)$ *einen Wert, der nicht größer als* A, *und für* $\chi(\beta)$ *einen Wert, der nicht kleiner als* B *ist, wählt.*

Einen Beweis der Umkehrung kann man Ungleichungen entnehmen, die G. Pick[13]) für positive Funktionen abgeleitet hat: Ist $\chi(\omega)$ „positiv"

[13]) Math. Annalen 77, S. 7—23.

und sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ m Werte der oberen Halbebene (m beliebig), so ist nach Pick die Determinante

$$\left| \frac{\chi(\omega_i) - \overline{\chi(\omega_k)}}{\omega_i - \overline{\omega}_k} \right|_{i,\,k=1}^{m} \geqq 0.$$

Läßt man die ω_i gegen m reelle Werte ξ_i in (α, β) rücken, so erhält man die Differentialungleichungen

$$\left| \varkappa(\xi_i, \xi_k) \right|_{i,\,k=1}^{m} \geqq 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Diese sind aber gerade, wie wir aus § 1 bis 3 wissen, für die Monotonie von beliebig hoher Stufe in (α, β) charakteristisch.

§ 7.

Schlußbemerkungen.

Denkt man sich die Zahlenlinie durch einen Wert $\omega = \infty$ so abgeschlossen, wie es in der projektiven Geometrie üblich ist, so kann man auch von Funktionen $\chi(\omega)$ sprechen, deren Definitionsbereich $\omega = \infty$ umfaßt und die selbst des Wertes ∞ fähig sind. Erinnert man sich daran, daß die linearen Funktionen $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ mit positiver Determinante gleichzeitig mit ihrer Umkehrung in jedem polfreien Intervall monoton sind, so kommt man zu folgender (provisorischen) Verallgemeinerung des Begriffs der monotonen Funktion: Eine Funktion $\chi(\omega)$ im allgemeineren Sinne soll monoton von n-ter Stufe heißen, wenn sie nach passender linearer Transformation der ω-Geraden mit positiver Determinante und einer ebensolchen Transformation der χ-Geraden zu einer monotonen Funktion n-ter Stufe im bisherigen Sinne führt. Zu einer noch stärkeren, *endgültigen* Verallgemeinerung wird man geführt, wenn man an den Satz 6 des § 5 denkt:

Endgültige Definition: Eine Funktion $\chi(\omega)$ im allgemeinen Sinne soll monoton heißen, wenn man ihren Definitionsbereich mit (im projektiven Sinne) übereinandergreifenden Intervallen derart überdecken kann, daß in jedem derselben Monotonie n-ter Stufe im provisorischen Sinne besteht.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß die Resultate der Arbeit gültig bleiben, wenn überall statt von quadratischen, von Hermiteschen Formen gesprochen wird.

(Eingegangen am 3. Januar 1933.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Maßbegriffes.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung; Darstellung der Resultate.

Es sei $r \geqq 5$, r ganz;

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2 \quad (\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_r > 0). \tag{1}$$

Wenn $x > 0$ ist, so sei $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$; das Volumen dieses Ellipsoids ist

$$V_Q(x) = \frac{\pi^{r/2}\, x^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)};$$

endlich sei

$$\mathsf{P}_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x).$$

Wenn es eine reelle Zahl α gibt, so daß alle α_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ganzzahlige Vielfache von α sind, so heiße die quadratische Form $Q(u)$ „rational", sonst „irrational". Es sind (unter anderem) folgende Resultate bekannt[1]):

[1]) Satz I ist in der Abhandlung: V. Jarník, Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions (Bulletin international de l'Académie de Bohême 1928, 10 S.) bewiesen worden. Satz II steht bei E. Landau, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (zweite Abhandlung), Math. Zeitschr. 24 (1926), S. 299—310. Satz III stammt für $r \geqq 6$ von mir [Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (zweite Abhandlung), Math. Annalen 101 (1929), S. 136—146], für $r = 5$ von A. Walfisz [V. Jarník und A. Walfisz, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 152—160]. Satz IV wurde von A. Walfisz [Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (dritte Abhandlung), Math. Zeitschr. 27 (1927), S. 245—268] bewiesen. Satz VI rührt von E. Landau her [Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen (vierte Abhandlung), Göttinger Nachr. 1924, S. 137—150]. Die Sätze V, VII, VIII sind in meiner Abhandlung, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Annalen 100 (1928), S. 699—721, bewiesen (diese Abhandlung wird weiter mit Gp I zitiert). — Übrigens werde ich, um dieser Abhandlung eine gewisse Abrundung zu geben, dem Leser im § 6 die Beweise der Sätze I, II, VIII vorführen.

Satz I.

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Für rationale Q ist diese Abschätzung definitiv nach dem

Satz II. *Wenn $Q(u)$ rational ist, so ist*

$$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei irrationalen Formen, wie die folgenden Sätze zeigen:

Satz III. *Wenn $Q(u)$ irrational ist, so ist*

$$P_Q(x) = o\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right).$$

Satz IV. *Wenn $\varphi(x) > 0$ für $x > 0$, $\varphi(x) \to 0$ für $x \to +\infty$, so gibt es für jedes ganze $r \geqq 5$ eine irrationale Form* (1) *mit*

$$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1}\varphi(x)\right).$$

Satz V. *Für fast alle positiven Wertsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ist aber sogar*

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$[2]).

Ob man im Satz V den Exponenten $\frac{r}{4} + \varepsilon$ unter $\frac{r}{4}$ herabdrücken kann, weiß man nicht; man kennt aber folgende Abschätzung nach unten:

Satz VI.

$$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r-1}{4}}\right).$$

Für eine tiefere Untersuchung der Funktion $P_Q(x)$ empfiehlt es sich, die Form $Q(u)$ noch weiter zu spezialisieren; und zwar werden wir folgende Formen betrachten:

---

[2]) Der Satz V ist folgendermaßen zu verstehen: Es sei $r \geqq 5$, r ganz; dann gibt es im r-dimensionalen cartesischen Raume der Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ eine Punktmenge M_r vom Lebesgueschen Maß Null, welche folgende Eigenschaft besitzt: Ist $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\ldots$, $\alpha_r > 0$ und liegt der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ nicht in M_r, so gilt für die Form (1) die Abschätzung

$$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}+\varepsilon}\right)$$

bei jedem $\varepsilon > 0$.

Analog sind die Worte „fast alle" auch stets im folgenden zu verstehen.

Es sei $\sigma \geqq 2$, σ ganz; $r_j \geqq 4$, r_j ganz $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; wir setzen $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. Es sei $\beta_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; wir betrachten die Form

$$(2) \quad Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \beta_j (u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \ldots + u_{r_j,j}^2) \quad (\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0).$$

Die Sätze I, II, III gelten freilich auch für die Formen (2); statt der Sätze V, VI gelten hier folgende Sätze:

Satz VII. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, σ *ganz*; $r_j \geqq 4$, r_j *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Für fast alle positiven Wertsysteme* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\sigma$ *gilt für die Form* (2) *die Abschätzung*

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2} - \sigma + \varepsilon}\right)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Satz VIII. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, σ *ganz*; $r_j \geqq 4$, r_j *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Dann gilt für die Form* (2) *die Abschätzung*

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2} - \sigma}\right).$$

Wir sind hier also wesentlich weiter gekommen als bei den allgemeinen Formen (1): Der Exponent $\frac{r}{2} - \sigma + \varepsilon$ im Satz VII ist infolge des Satzes VIII schon der „wahre Exponent" (bis auf ε).

Wir ordnen nun jeder Form (1) eine Zahl $f = f(Q)$ folgendermaßen zu: $f(Q)$ sei die untere Grenze derjenigen reellen Zahlen a, für welche

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^a)$$

ist (d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\mathsf{P}_Q(x) = O(x^{f+\varepsilon}), \quad \mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x^{f-\varepsilon})).$$

Diese Größe $f(Q)$, welche die Größenordnung von $\mathsf{P}_Q(x)$ in erster Näherung charakterisiert, wollen wir nun insbesondere für die Formen (2) studieren.

Es sei also $\sigma \geqq 2$, σ ganz, $r_j \geqq 4$, r_j ganz, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$; $Q(u)$ sei durch (2) gegeben. Dann ist nach Satz I und VIII

$$\frac{r}{2} - \sigma \leqq f(Q) \leqq \frac{r}{2} - 1,$$

und diese beiden Schranken werden tatsächlich angenommen; denn für rationale Q ist nach Satz II $f(Q) = \frac{r}{2} - 1$, für fast alle Q ist nach Satz VII $f(Q) = \frac{r}{2} - \sigma$. Es entsteht nun die Frage, ob $f(Q)$ auch alle Werte

zwischen $\frac{r}{2} - \sigma$ und $\frac{r}{2} - 1$ annehmen kann, und diese Frage werden wir in dieser Abhandlung bejahend beantworten; wir beweisen also zunächst den

Satz 1. *Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben; es sei* f *eine reelle Zahl mit*

$$\frac{r}{2} - \sigma < f < \frac{r}{2} - 1 \quad (r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma).$$

Dann gibt es eine Form $Q(u)$ *von der Gestalt* (2), *so daß*

$$f(Q) = f.$$

Bevor wir die übrigen Resultate dieser Abhandlung aussprechen, schicken wir einige Bemerkungen voraus. Wenn $a > 0$ und wenn wir statt der Form (1) die Form $aQ(u) = a\alpha_1 u_1^2 + a\alpha_2 u_2^2 + \ldots + a\alpha_r u_r^2$ betrachten, so ist offenbar

$$\mathsf{P}_{aQ}(x) = \mathsf{P}_Q\left(\frac{x}{a}\right) \tag{3}$$

(also insbesondere $f(aQ) = f(Q)$); es bedeutet also keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir uns bei der Untersuchung der Formen (2) auf die Formen mit $\beta_1 = 1$ beschränken.

Es seien also ganze Zahlen $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ gegeben. Wir betrachten alle Formen (2) mit $\beta_1 = 1$, $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0$. Jeder solchen Form ist umkehrbar eindeutig das System $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ ihrer Koeffizienten zugeordnet; wir deuten diese Systeme $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ als Punkte im $(\sigma - 1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$.

Wenn $g(x)$ für hinreichend große x definiert und positiv ist, so sei

$$E(g(x)) = E(g(x);\ \sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma)$$

die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ mit $\beta_j > 0$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, für welche die zugehörige Form (2) (mit $\beta_1 = 1$) die Beziehung

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega(g(x))$$

erfüllt. Der Satz 1 wird bewiesen sein, wenn wir folgendes zeigen: Wenn

$$\frac{r}{2} - \sigma < f < \frac{r}{2} - 1 \quad (r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma),$$

so gibt es mindestens einen Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$, der zwar in $E(x^f)$, nicht aber in $E(x^f (\log x)^{6\sigma+5})$ liegt. Denn für die diesem Punkt zugeordnete Form (2) (mit $\beta_1 = 1$) ist dann

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega(x^f), \quad \mathsf{P}_Q(x) = o\left(x^f (\log x)^{6\sigma+5}\right),$$

also $f(Q) = f$.

Die Existenz eines solchen Punktes beweisen wir dadurch, daß wir zeigen: Die Menge $E(x^f)$ ist „wesentlich größer" als die Menge $E(x^f(\log x)^{6\sigma+5})$, so daß nicht jeder Punkt von $E(x^f)$ zu $E(x^f(\log x)^{6\sigma+5})$ gehören kann. Die Worte „wesentlich größer" müssen wir freilich noch präzisieren, und zwar werden wir es im Sinne der Maßtheorie tun; der Lebesguesche Maßbegriff zeigt sich aber dazu nicht geeignet, da, wie wir im Satz 4 (der ein genaues Analogon zum Satz VII bildet) beweisen werden, das Lebesguesche Maß von $E(x^f)$ gleich Null ist für jedes $f > \frac{r}{2} - \sigma$. Wir müssen also zu einem anderen Maßbegriff greifen, der die Mengen vom Lebesgueschen Maß Null noch weiter zu klassifizieren gestattet. Zu diesem Zweck eignet sich ein von Herrn F. Hausdorff eingeführter Maßbegriff[3]; wir wollen jetzt die Definition und die einfachsten Eigenschaften dieses Maßbegriffes (in einer für unsere Zwecke spezialisierten und etwas modifizierten Form) angeben.

Wir betrachten den $(\sigma-1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$ (σ ganz, $\sigma \geqq 2$) der Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$. Es sei eine positive Zahl λ gegeben; M sei eine Punktmenge aus $R_{\sigma-1}$. Wir ordnen der Menge M eine Zahl $L(M; x^\lambda)$ $(0 \leqq L(M; x^\lambda) \leqq \infty)$ folgendermaßen zu.

Es sei $\eta > 0$; $\mathfrak{S}$ sei ein höchstens abzählbares System von Würfeln W_1, $W_2, \ldots$, deren Kanten $d_1, d_2, \ldots$ sämtlich kleiner als η sind[4]); $\mathfrak{S}$ sei ein Überdeckungssystem von M (d. h. jeder Punkt von M sei in mindestens einem Würfel aus $\mathfrak{S}$ enthalten). Wir setzen

$$\Lambda(\mathfrak{S}) = \sum_i d_i^\lambda$$

(die rechte Seite soll $+\infty$ bedeuten, wenn $\sum_i d_i^\lambda$ divergiert). Die untere Grenze von $\Lambda(\mathfrak{S})$ für alle solche höchstens abzählbaren Überdeckungssysteme $\mathfrak{S}$ von M, die der Bedingung $d_i < \eta$ genügen, heiße $L_\eta(M; x^\lambda)$. Wenn η abnimmt, so verschärft sich die Bedingung $d_i < \eta$, also nimmt $L_\eta(M; x^\lambda)$ nicht ab, also existiert der Grenzwert

$$L(M; x^\lambda) = \lim_{\eta = 0} L_\eta(M; x^\lambda) \quad (0 \leqq L(M; x^\lambda) \leqq \infty).$$

Von den Eigenschaften der Mengenfunktion $L(M; x^\lambda)$ werden wir nur die folgenden trivialen Folgerungen der Definition brauchen:

---

[3]) F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß, Math. Annalen 79 (1919), S. 157 – 179. Der Leser braucht von der Hausdorffschen Theorie nichts zu kennen.

[4]) Unter einem Würfel verstehen wir hier und im folgenden stets einen $(\sigma-1)$-dimensionalen Würfel in $R_{\sigma-1}$, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind und zwar, wenn nichts weiter gesagt wird, einen offenen Würfel.

Eigenschaft 1. Aus $A \subset B$ folgt $L(A; x^\lambda) \leqq L(B; x^\lambda)$.

Eigenschaft 2. Wenn $V_1, V_2, \ldots$ höchstens abzählbar viele Mengen aus $R_{\sigma-1}$ sind, $V = \sum_i V_i$, so ist

$$L(V; x^\lambda) \leqq \sum_i L(V_i; x^\lambda).$$

Eigenschaft 3. $L(M; x^{\sigma-1})$ ist das äußere Lebesguesche Maß von M.

Eigenschaft 4. Es sei $\lambda > \mu > 0$; aus $L(M; x^\lambda) > 0$ folgt $L(M; x^\mu) = \infty$; aus $L(M; x^\mu) < \infty$ folgt also $L(M; x^\lambda) = 0$ (Beweis: folgt aus $\lim_{x=0+0} x^{\lambda-\mu} = 0$).

Eigenschaft 5. Für $\lambda > \sigma - 1$ ist $L(M; x^\lambda) = 0$ für jedes $M \subset R_{\sigma-1}$. (Beweis: Es sei W ein Würfel von der Kante 1. Für ganzes $n > 0$ kann man W mit $(n+1)^{\sigma-1}$ Würfeln der Kante $1/n$ überdecken; für $\lambda > \sigma - 1$ ist aber

$$\lim_{n=\infty} (n+1)^{\sigma-1} \frac{1}{n^\lambda} = 0;$$

daraus folgt sehr leicht $L(W; x^\lambda) = 0$, also (da sich $R_{\sigma-1}$ als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen solchen Würfeln darstellen läßt) $L(R_{\sigma-1}; x^\lambda) = 0$, also auch $L(M; x^\lambda) = 0$.)

Eigenschaft 6. Es sei M eine nichtleere Menge aus $R_{\sigma-1}$; mit $d(M)$ bezeichnen wir die untere Grenze derjenigen positiven Zahlen λ, für welche $L(M; x^\lambda) = 0$ ist. Nach den Eigenschaften 4, 5 ist

$$0 \leqq d(M) \leqq \sigma - 1,$$

$L(M; x^\lambda) = 0$ für $\lambda > d(M)$; $L(M; x^\lambda) = \infty$ für $0 < \lambda < d(M)$.

Eigenschaft 7. $L(M; x^\lambda)$ ändert sich nicht, wenn wir in seiner Definition die Überdeckungssysteme $\mathfrak{S}$ aus abgeschlossenen (statt aus offenen) Würfeln $W_1, W_2, \ldots$ zusammensetzen.

Das Hauptergebnis dieser Abhandlung ist in den beiden folgenden Sätzen enthalten.

Satz 2. *Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben; wir setzen* $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Weiter sei* $0 < \lambda < \sigma - 1$. *Dann ist*

$$L\left(E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}} (\log x)^{6\sigma+5}\right); x^\lambda\right) = 0.$$

Satz 3. *Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben; wir setzen* $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Weiter sei* $0 < \lambda < \sigma - 1$. *Dann ist*

$$L\left(E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right); x^\lambda\right) = \infty.$$

Aus diesen Sätzen folgt der Satz 1; denn es gibt mindestens einen Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$, der zwar in $E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right)$, nicht aber in $E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}(\log x)^{6\sigma+5}\right)$ liegt; für die zugehörige Form (2) (mit $\beta_1 = 1$) ist dann offenbar $f(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma-\lambda}$. Wenn aber λ das (offene) Intervall $(0, \sigma-1)$ durchläuft, so durchläuft $\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma-\lambda}$ genau das Intervall $\left(\frac{r}{2}-\sigma, \frac{r}{2}-1\right)$. Wir wollen aus den Sätzen 2, 3 noch einige weitere Folgerungen ziehen. Erstens folgt aus ihnen der

Satz 4. *Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben; wir setzen* $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. *Für fast alle positiven Wertsysteme* $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma$ *gilt für die Form* (2) (*mit* $\beta_1 = 1$) *die Gleichung*

$$f(Q) = \frac{r}{2} - \sigma^{5}).$$

Beweis: Wir wählen eine Folge $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots$ mit $\lim_{n=\infty} \lambda_n = \sigma - 1$; also ist $\lim_{n=\infty}\left(\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda_n}{\sigma-\lambda_n}\right) = \frac{r}{2} - \sigma$. Wenn für ein positives Wertsystem $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ die Form (2) (mit $\beta_1 = 1$)

$$f(Q) > \frac{r}{2} - \sigma$$

ergibt[6]), so muß der Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ für mindestens ein n in

$$E_n = E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda_n}{\sigma-\lambda_n}}(\log x)^{6\sigma+5}\right)$$

liegen; es ist aber nach Satz 2 $L(E_n; x^{\lambda_n}) = 0$, also (wegen $\sigma - 1 > \lambda_n$ und wegen der Eigenschaft 4) $L(E_n; x^{\sigma-1}) = 0$, also (Eigenschaft 2)

$$L\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n; x^{\sigma-1}\right) = 0;$$

damit ist aber der Satz 4 nach der Eigenschaft 3 bewiesen.

Wir wollen noch zwei Sätze angeben, die darüber berichten, wie „groß" die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ ist, welche für $f(Q)$ einen vorgegebenen Wert liefern.

Satz 5. *Voraussetzungen und Bezeichnungen. Es seien ganze Zahlen* $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *gegeben.* $G(f) = G(f; \sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma)$ *sei*

[5]) Dieser Satz ist das genaue „inhomogene" ($\beta_1 = 1$) Analogon des „homogenen" Satzes VII.

[6]) Nach Satz VIII ist $f(Q) \geqq \frac{r}{2} - \sigma$.

die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$, *für welche für die Form* (2) (*mit* $\beta = 1$) $f(Q) = f$ *ist.*

Behauptung:

a) $L\left(G\left(\frac{r}{2}-1\right); x^\alpha\right) = 0$ *für jedes* $\alpha > 0$.

b) $L\left(G\left(\frac{r}{2}-\sigma\right); x^\alpha\right) = \infty$ *für* $0 < \alpha \leqq \sigma - 1$.

c) *Für* $0 < \lambda < \sigma - 1$ *ist*

$$L\left(G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right); x^\alpha\right) = 0 \text{ bzw. } = \infty,$$

je nachdem $\lambda < \alpha \leqq \sigma - 1$ *oder* $0 < \alpha \leqq \lambda$ *ist*[7]).

Beweis: a) ist trivial; denn für $0 < \lambda < \sigma - 1$ ist

$$G\left(\frac{r}{2}-1\right) \subset E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}(\log x)^{6\sigma+5}\right);$$

also ist nach Satz 2 (und nach den Eigenschaften 1, 4)

$$L\left(G\left(\frac{r}{2}-1\right); x^\lambda\right) = 0$$

für jedes $\lambda > 0$.

b) ist auch trivial: Nach dem Satz 4 füllt die Menge $G\left(\frac{r}{2}-\sigma\right)$ den ganzen Winkelraum $\beta_2 > 0$, $\beta_3 > 0, \ldots, \beta_\sigma > 0$ mit Ausnahme einer Menge vom Lebesgueschen Maß Null aus; also ist

$$L\left(G\left(\frac{r}{2}-\sigma\right); x^\alpha\right) = \infty$$

für $\alpha = \sigma - 1$, also auch für $0 < \alpha \leqq \sigma - 1$.

c) folgt folgendermaßen: Für $\sigma - 1 \geqq \alpha > \lambda$ ist $\frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma-\lambda} > \frac{r}{2} - 1 - \frac{\alpha}{\sigma-\alpha}$, also

$$G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right) \subset E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\alpha}{\sigma-\alpha}}(\log x)^{6\sigma+5}\right),$$

also nach Satz 2

$$L\left(G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right); x^\alpha\right) = 0.$$

---

[7]) Man beachte, daß dem Intervall $(0, \sigma - 1)$ für λ genau das Intervall $\left(\frac{r}{2}-\sigma, \frac{r}{2}-1\right)$ für $\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}$ entspricht.

Andererseits ist offenbar

$$E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right) \subset E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}(\log x)^{6\sigma+5}\right) + G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right);$$

nach den Sätzen 2, 3 und den Eigenschaften 1, 2 ist also

$$L\left(G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right); x^{\lambda}\right) = \infty,$$

w. z. b. w.

Nach dem Satz 5 ist also

$$d\left(G\left(\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right)\right) = \lambda$$

für $0 \leqq \lambda \leqq \sigma - 1$ (man beachte, daß $G\left(\frac{r}{2}-1\right)$ nach den Sätzen I, II nicht leer ist); wenn wir

$$f = \frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}$$

setzen, bekommen wir also folgenden

Satz 6. *Dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie im Satz 5. Behauptung: Für* $\frac{r}{2}-\sigma \leqq f \leqq \frac{r}{2}-1$ *ist*

$$d(G(f)) = \left(1-\frac{2}{r-2f}\right)\sigma.$$

Die Aufgabe der folgenden Paragraphen wird also sein, die Sätze 2 und 3 zu beweisen. Die Hauptschwierigkeit liegt im Beweis des Satzes 2, dem die Paragraphen 2, 3, 4 gewidmet sind. Der Beweis verläuft analog wie der Beweis des Satzes VII in Gp I, ist aber komplizierter; und zwar wird in § 2 der leichteste Teil des Beweises durchgeführt, durch welchen die ganze Untersuchung auf die Betrachtung des Integrals

$$(4) \qquad \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{\sigma} \Theta^{r_j}(\beta_j s)\, e^{xs}\,(e^{\pm z s}-1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \qquad \left(B = \operatorname*{Max}_{1\leqq j\leqq\sigma} \frac{2\pi}{\beta_j}\right)$$

zurückgeführt wird. In § 3 wird hauptsächlich ein metrischer Hilfssatz über diophantische Approximationen bewiesen; in § 4 wird endlich das Integral (4) mit Hilfe des Hilfssatzes aus § 3 und mit Hilfe der Transformationen der Thetafunktion $\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}$ abgeschätzt.

Der Beweis des Satzes 3 ist eigentlich nicht einfacher als derjenige des Satzes 2; ich habe aber in meiner Arbeit „Über die simultanen diophantischen Approximationen“[8]) schon fast die ganze zum Beweis notwendige Vorarbeit geleistet, so daß ich den Beweis des Satzes 3 in § 5 schon auf wenigen Zeilen durchführen kann. Um aber dem Leser das Nachschlagen in der Literatur zu ersparen und um ihm ein gewissermaßen abgerundetes Bild dieser Theorie zu geben, beweise ich im § 6 noch die bekannten Sätze I, II, VIII; das kann ich auf verhältnismäßig engem Raum machen, da ich in den §§ 2, 4, 5 sowieso die meisten Hilfsmittel zum Beweis dieser Sätze (von welchen eigentlich nur der Satz I nicht trivial ist) entwickeln muß.

Ich will noch eine Bemerkung über den Satz 1 machen. Dieser Satz ist neu nur für $\sigma > 2$; für $\sigma = 2$ ist nicht nur der Satz 1, sondern auch noch ein wesentlich schärferer Satz bekannt[9]):

Satz 1*. *Es sei $\beta_2 > 0$; $\nu(\beta_2)$ sei die obere Grenze derjenigen reellen Zahlen a, welche folgende Eigenschaft haben: Es gibt eine Folge von Paaren ganzer Zahlen p_1, q_1; p_2, q_2; p_3, q_3; ..., so daß für wachsendes n gilt*

$$q_n \to \infty, \quad \beta_2 - \frac{p_n}{q_n} = O\left(\frac{1}{q_n^{2+a}}\right)^{10}).$$

Es sei nun r_1 ganz, r_2 ganz, $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, $r = r_1 + r_2$, $\beta_2 > 0$, $\nu(\beta_2) = \nu$ $(0 \leqq \nu \leqq \infty)$,

$$Q(u) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{r_1}^2 + \beta_2 (u_{r_1+1}^2 + u_{r_1+2}^2 + \ldots + u_r^2).$$

Dann ist

$$f(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$$

(für $\nu = \infty$ ist $\frac{1}{\nu+1} = 0$ zu setzen).

Man beachte, daß der Ausdruck $\frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\nu+1}$ genau das (abgeschlossene) Intervall $\left(\frac{r}{2} - 2, \frac{r}{2} - 1\right)$ durchläuft, wenn ν das Intervall $0 \leqq \nu \leqq \infty$ durchläuft; daraus und aus der Fußnote [10]) folgt, daß der Satz 1* tatsächlich den Satz 1 im Spezialfall $\sigma = 2$ enthält. Darüber hinaus gestattet uns der Satz 1*, zu jedem f mit $\frac{r}{2} - 2 \leqq f \leqq \frac{r}{2} - 1$

[8]) Math. Zeitschr. 33 (1931), S. 505—543 (weiter mit S. D. A. zitiert). Autorkorrektur.

[9]) V. Jarník, Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, The Tôhoku Mathematical Journal 30 (1929), S. 354—371.

[10]) Bekanntlich ist $0 \leqq \nu(\beta_2) \leqq \infty$; und umgekehrt: zu jedem ν mit $0 \leqq \nu \leqq \infty$ kann man (mit Hilfe der regelmäßigen Kettenbruchentwickelung der Zahl β_2) leicht eine positive Zahl β_2 mit $\nu(\beta_2) = \nu$ konstruieren.

eine Form (2) (im Falle $\sigma = 2$) mit $f(Q) = f$ wirklich zu konstruieren, während der Satz 1 ein reiner Existenzsatz ist, aus welchem sich (und ebenso aus seinem Beweis) keine Konstruktionsvorschrift ergibt. Dieser tiefe Unterschied zwischen den Fällen $\sigma = 2$ und $\sigma > 2$ beruht darin, daß es sich — roh gesagt — für $\sigma = 2$ um die diophantischen Approximationen *einer einzigen* Zahl β_2, für $\sigma > 2$ dagegen um die simultanen diophantischen Approximationen *mehrerer* Zahlen $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma$ handelt. Bekanntlich sieht aber das Problem der simultanen diophantischen Approximationen von n Zahlen wesentlich anders aus, je nachdem $n = 1$ oder $n > 1$ ist[11]) (für $n = 1$ leistet uns z. B. die Theorie der Kettenbrüche sehr gute Dienste); und dieser Unterschied zwingt uns, bei dem Beweis des Satzes 1 im Falle $\sigma > 2$ den „konstruktiven" Weg des Beweises des Satzes 1* zu verlassen und zu den mengentheoretischen Methoden zu greifen, auf welchen die vorliegende Abhandlung beruht.

§ 2.

Vorbereitende Betrachtungen.

Hilfssatz 1. *Es sei* $r \geqq 5$, r *ganz*; $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \ldots, \alpha_r > 0$;

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j^2.$$

Für $x > 0$ *sei* $A(x) = A_Q(x) = \sum_{Q(m) \leqq x} 1$ *die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid* $Q(u) \leqq x$. *Weiter sei* $n > 0$, n *ganz*, $B = \max_{1 \leqq j \leqq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}$, $\Theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-m^2 s}$ *für* $\Re(s) > 0$; $z = z(x)$ *sei eine für* $x > 1$ *definierte Funktion*, $0 < z(x) \leqq 1$. *Endlich sei*[12])

$$\mathsf{P}(x) = \mathsf{P}_Q(x) = A(x) - \frac{\pi^{r/2} x^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}\, \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right)}.$$

---

[11]) Dieser tiefgehende Unterschied ist besonders deutlich bei A. Khintchine, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 50 (1926), S. 170—195 hervorgehoben.

[12]) Alle vorkommenden Quadratwurzeln sind mit positivem Realteil zu nehmen; alle vorkommenden Integrationswege sind geradlinig; mit $\bar{c}$ bezeichne ich unterschiedslos absolute positive Konstanten; mit c bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von $r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, n, z(x)$ abhängen; mit μ bezeichne ich unterschiedslos Zahlen, die von irgendwelchen Veränderlichen abhängen dürfen und der Bedingung $|\mu| \leqq 1$ genügen.

Behauptung:

$$P(x) = O\left(x^{\frac{r}{4}} + x^{\frac{r}{2}-1} z + \frac{1}{z^n}\left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}\, (e^{zs}-1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right| \right.$$

$$\left. + \frac{1}{z^n}\left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}\, (e^{-zs}-1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right| \right).$$

Beweis. Wir setzen für $\Re(s) > 0$

$$\Theta(\alpha_1 s)\,\Theta(\alpha_2 s) \ldots \Theta(\alpha_r s) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} \quad (0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots);$$

dann ist für $x > 0$ offenbar $A(x) = \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m$, also

$$\int_0^x A(y)\, dy = \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m (x - \lambda_m).$$

Aus der bekannten Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{Ts}}{s^2}\, ds = \operatorname{Max}(T, 0) \qquad (a > 0,\ T \gtrless 0)$$

folgt für $x > 0$, $a > 0$

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs} \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} \cdot e^{xs} \frac{ds}{s^2}$$

$$= \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m (x - \lambda_m) = \int_0^x A(y)\, dy,$$

da der Integrand im zweiten Glied offenbar gliedweise integriert werden darf. Wir setzen nun für $-1 \leqq \xi \leqq 1$

$$A_1(x, \xi) = \int_x^{x+\xi} A(y)\, dy \quad \text{für } x > 1;$$

$$A_k(x, \xi) = \int_x^{x+\xi} A_{k-1}(y, \xi)\, dy \quad \text{für ganzes } k > 1 \text{ und für } x > k.$$

Für $x > k \geqq 1$ (k ganz), $a > 0$ ist

$$(6) \qquad A_k(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs} (e^{\xi s} - 1)^k \frac{ds}{s^{k+1}}.$$

(6) gilt nämlich wegen (5) für $k = 1$; gilt aber (6) für irgendein ganzes $k \geqq 1$, so gilt (6) auch für $k+1$ [man braucht nur in (6) rechts hinter dem Integralzeichen nach x in den Grenzen x, $x + \xi$ zu integrieren, was offenbar erlaubt ist]. Wir wenden nun (6) für $\xi = \pm z = \pm z(x)$, $k = n$, $x > n$ an und bekommen, wenn wir noch $a = \frac{1}{x}$ setzen,

$$(7) \qquad A_n(x, \pm z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs} (e^{\pm zs} - 1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \quad (x > n).$$

Wir bemerken noch, daß $A(x)$ für $x > 0$ offenbar eine positive, nicht abnehmende Funktion von x ist; daher ist für $x > n$

$$(8) \qquad \frac{1}{(-z)^n} A_n(x, -z) \leqq A(x) \leqq \frac{1}{z^n} A_n(x, z).$$

Es ist nun

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_n(x, \pm z) = J_1 + J_2 + J_3, \\ \text{wo} \\ J_1 = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\frac{1}{x}-i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}, \quad J_2 = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty}, \quad J_3 = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}-i\frac{B}{\sqrt{x}}} \\ \text{(derselbe Integrand wie in (7))}; \end{array} \right.$$

offenbar ist

$$(10) \qquad |J_2| = |J_3|.$$

Wir wollen noch J_1 berechnen. Nach einer bekannten Transformationsformel ist

$$\Theta(\alpha_j s) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_j s}} (1 + \psi_j(s)),$$

wo

$$\psi_j(s) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 \frac{\pi^2}{\alpha_j s}};$$

für $s = \frac{1}{x} + ti$, $|t| \leqq \frac{B}{\sqrt{x}}$ (t reell), $x > c$ ist

$$\Re\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{x}{1+x^2t^2} > c,$$

also

$$|\psi_j(s)| \leqq 2\, e^{-\frac{\pi^2 x}{\alpha_j(1+x^2t^2)}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(m^2-1)\frac{\pi^2}{\alpha_j}c} < c\, e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}.$$

Also ist

$$(11)\quad \left\{ J_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}} \int_{-\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{B}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+n+1}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)^n \left(1+\mu c\, e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}\right) dt. \right.$$

Es sei nun ein für allemal bemerkt: für $x > \bar{c}$ ist einerseits (man beachte $0 < z \leqq 1$)

$$(12)\quad \begin{aligned} &\left|e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right| = \left|e^{\pm\frac{z}{x}}(\cos zt \pm i\sin zt)-1\right| \\ &= \left|\left(1+\mu\bar{c}\frac{z}{x}\right)(1+\mu\bar{c}zt)-1\right| = \mu\bar{c}\frac{z}{x}+\mu\bar{c}zt, \end{aligned}$$

andererseits

$$(13)\quad \left|e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right| = \mu\bar{c}.$$

Für $x > c$ ist also

$$\int_{-\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{B}{\sqrt{x}}} \left| \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+n+1}} \left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)^n e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}} \right| dt$$

$$(14)\quad = O\left(x^{\frac{r}{2}+n+1} \int_0^{\frac{B}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}}{(1+x^2t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{n+1}{2}}} \cdot z^n \cdot \left(\frac{1}{x}+t\right)^n dt \right)$$

$$= O\left(x^{\frac{r}{2}+1} \cdot z^n \int_0^{\frac{B}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\frac{cx}{1+x^2t^2}}}{(1+x^2t^2)^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}} dt \right) = O\left(x^{r/4}\, z^n\right);$$

denn die Funktion $e^{-cxu} \cdot u^{\frac{r}{4}+\frac{1}{2}}$ nimmt im Intervall $0 < u < \infty$ ihren größten Wert für $u = \left(\frac{r}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{cx}$ an; und dieser Wert ist $O\left(x^{-\frac{r}{4}-\frac{1}{2}}\right)$.

Weiter ist

$$(15)\qquad \left|\int_{-\infty}^{-\frac{B}{\sqrt{x}}} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+n+1}}\left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)^n dt\right| = \left|\int_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\infty}\cdots\right|$$

$$= O\left(z^n \int_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+t\right)^n}{t^{\frac{r}{2}+n+1}}dt\right) = O\left(z^n \int_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{r}{2}+1}}\right) = O\left(z^n x^{r/4}\right).$$

Endlich ist für $x > n$

$$(16)\qquad \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x\left(\frac{1}{x}+it\right)}}{\left(\frac{1}{x}+it\right)^{\frac{r}{2}+n+1}}\left(e^{\pm z\left(\frac{1}{x}+it\right)}-1\right)^n dt$$

$$= \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty}\frac{e^{s(x\pm kz)}}{s^{\frac{r}{2}+n+1}}ds$$

$$= \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(x\pm kz)^{\frac{r}{2}+n}\frac{1}{2\pi i}\int_{1\pm\frac{kz}{x}-i\infty}^{1\pm\frac{kz}{x}+i\infty}\frac{e^s}{s^{\frac{r}{2}+n+1}}ds$$

$$= \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+n+1\right)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(x\pm kz)^{\frac{r}{2}+n}$$

Die letzte Summe ist aber gleich der n-ten Differenz der Funktion $X^{\frac{r}{2}+n}$ mit der Spanne z; also ist (mit $0 < \vartheta < n$)

$$(17)\qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(x \pm kz)^{\frac{r}{2}+n} = (\pm z)^n\left(\frac{d^n}{dy^n}\left(y^{\frac{r}{2}+n}\right)\right)_{y=x\pm\vartheta z}$$

$$= (\pm z)^n \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}(x \pm \vartheta z)^{\frac{r}{2}}$$

$$= (\pm z)^n \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\left(x^{\frac{r}{2}} + O\left(x^{\frac{r}{2}-1}z\right)\right).$$

Aus (7), (9), (10), (11), (14), (15), (16), (17) folgt

$$A_n(x, \pm z) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}} \frac{(\pm z)^n}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$$

$$+ O\left(x^{\frac{r}{4}} z^n + x^{\frac{r}{2}-1} z^{n+1} + \left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}\,(e^{\pm zs} - 1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right| \right).$$

Nach (8) ist also

$$\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$$

$$+ O\left(x^{\frac{r}{4}} + x^{\frac{r}{2}-1} z + \frac{1}{z^n} \left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}\,(e^{-zs} - 1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right| \right)$$

$$\leqq A(x) \leqq \frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}$$

$$+ O\left(x^{\frac{r}{4}} + x^{\frac{r}{2}-1} z + \frac{1}{z^n} \left| \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{xs}\,(e^{zs} - 1)^n \frac{ds}{s^{n+1}} \right| \right);$$

damit ist aber die Behauptung bewiesen.

§ 3.

Metrische Hilfssätze.

Es seien fünf Zahlen σ, λ, C, D, a gegeben:

$$\sigma \geqq 2, \sigma \text{ ganz}, \quad 0 < \lambda < \sigma - 1, \quad 0 < C < D, \quad a > 0.$$

Wir bilden den $(\sigma - 1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$ der Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ und bezeichnen mit $W = W(C, D)$ den Würfel $C < \gamma_j < D$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$. Wenn h_j, k_j, n_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, ϱ ganze Zahlen sind, $h_j > 0$, $k_j > 0$, $n_j \geqq 0$, $\varrho > 0$, so wollen wir sagen, daß das System

$$\{h_1, \ldots, h_\sigma; k_1, \ldots, k_\sigma; n_1, \ldots, n_\sigma; \varrho\} = \{h; k; n; \varrho\}$$

„zur Ordnung $[l; m_1, \ldots, m_\sigma; n_1, \ldots, n_\sigma; \varrho] = [l; m; n; \varrho]$ gehört", wenn die ganzen Zahlen $l, m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$ die Ungleichungen

$$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}, \quad 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{18}$$

erfüllen; es ist dann sicher $l \geqq 0$, $m_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$. Wir wollen uns aber — ohne es wiederholt zu betonen — in diesem Paragraphen auf solche Ordnungen $[l; m; n; \varrho]$ $(l, m_j, n_j, \varrho$ ganz, $l \geqq 0$, $m_j \geqq 0$, $n_j \geqq 0$, $\varrho > 0)$ beschränken, für welche

$$2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \geqq \ldots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma} \tag{19}$$

gilt.

Es liege nun eine Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ mit (19) vor. Wenn $\{h; k; n; \varrho\}$ ein zu dieser Ordnung gehöriges System ist, so bezeichnen wir mit $M(h; k; n; \varrho)$ die Menge aller Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus W, welche die $\sigma - 1$ Ungleichungen

$$\left| \frac{h_1}{k_1} - \frac{h_j}{k_j} \gamma_j \right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma) \tag{20}$$

erfüllen. (20) ist aber mit

$$\left| \frac{h_1}{k_1} \frac{k_j}{h_j} - \gamma_j \right| < \frac{a}{2^{n_j} h_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)$$

gleichbedeutend. Wenn $\varrho > c'$[13]), so ist $a \cdot 2^{-n_j} \cdot h_j^{-1} 2^{-\varrho} < \frac{C}{2}$; wenn also $M(h; k; n; \varrho)$ nicht leer sein soll, so muß

$$\frac{C}{2} < \frac{h_1 k_j}{k_1 h_j} < D + \frac{C}{2}$$

sein, also

$$c' 2^{l+m_j-m_1} < h_j < c' 2^{l+m_j-m_1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma), \tag{21}$$

[13]) Mit c' bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von σ, λ, C, D, a abhängen.

wenn $\varrho > c'$. Von nun an sei bis zum Schluß dieses Paragraphen stets $\varrho > c'$. Die Anzahl derjenigen Systeme $\{h; k; n; \varrho\}$ der Ordnung $[l; m; n; \varrho]$, denen ein nichtleeres $M(h; k; n; \varrho)$ entspricht, ist also höchstens

$$(22) \qquad c' 2^l \cdot 2^{l+m_2-m_1} \cdot 2^{l+m_3-m_1} \dots 2^{l+m_\sigma-m_1} \cdot 2^{m_1+m_2+\dots+m_\sigma} = c' 2^{\sigma l-(\sigma-2)m_1+2m_2+2m_3+\dots+2m_\sigma} = \mathfrak{A}.$$

Wir setzen zur Abkürzung $[\lambda] = \omega$ (also ω ganz, $\omega \leqq \lambda < \omega + 1$, also $0 \leqq \omega \leqq \sigma - 2$),

$$(23) \qquad \alpha = \alpha(l; m; n; \varrho) = 2^{-l+m_1-m_{\sigma-\omega}-n_{\sigma-\omega}-\varrho}$$

und wir überdecken den Raum $R_{\sigma-1}$ mit abzählbar vielen abgeschlossenen Würfeln (ich werde sie „α-Würfel" nennen)

$$p_j \alpha \leqq \gamma_j \leqq (p_j + 1)\alpha \quad (p_j \text{ ganz}; j = 2, 3, \dots, \sigma).$$

Wenn $\{h; k; n; \varrho\}$ ein zur Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ gehöriges System ist, so bilden diejenigen α-Würfel, die mit $M(h; k; n; \varrho)$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, eine endliche [für leeres $M(h; k; n; \varrho)$ eine leere] Menge von α-Würfeln, die wir als „die Würfelschar $\{h; k; n; \varrho\}$" bezeichnen. Die Menge $M(h; k; n; \varrho)$ ist ein offenes Parallelepiped (wenn sie nicht leer ist), dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel und der Reihe nach höchstens gleich

$$(24) \qquad \frac{2a}{2^{n_j} h_j 2^\varrho} < c' 2^{-l+m_1-m_j-n_j-\varrho} \qquad (j = 2, 3, \dots, \sigma)$$

sind. Wegen (19), (23), (24) besteht also die Würfelschar $\{h; k; n; \varrho\}$ aus höchstens

$$(25) \qquad c' \prod_{j=\sigma-\omega+1}^{\sigma} \left(2^{-l+m_1-m_j-n_j-\varrho} \cdot \frac{1}{\alpha}\right) = c' \alpha^{-\omega} 2^{-l\omega-\varrho\omega+m_1\omega} \prod_{j=\sigma-\omega+1}^{\sigma} 2^{-m_j-n_j} = \mathfrak{B}$$

α-Würfeln[14]).

Es sei

$$(26) \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}(l; m; n; \varrho) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha^\lambda \left((l+1)(\varrho+1) \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j+1)(n_j+1)\right)^2;$$

[14]) Für $\omega = 0$ soll $\prod_{j=\sigma-\omega+1}^{\sigma} 2^{-m_j-n_j} = 1$ sein; überhaupt sollen leere Produkte stets 1 bedeuten.

es sei $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ die Menge derjenigen Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus W, die folgende Eigenschaft haben: Es gibt mindestens $\mathfrak{N}$ zur Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ gehörige Systeme $\{h; k; n; \varrho\}$, für welche $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ in $M(h; k; n; \varrho)$ liegt.

Jeder Punkt von $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ liegt in (mindestens) einem α-Würfel und dieser α-Würfel gehört offenbar zur Würfelschar $\{h; k; n; \varrho\}$ für mindestens $\mathfrak{N}$ zur Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ gehörige Systeme $\{h; k; n; \varrho\}$; es kann aber offenbar nicht mehr als

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}:\mathfrak{N} = \alpha^{-\lambda}\left((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\right)^{-2}$$

derartige α-Würfel geben. Daher sieht man: $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ läßt sich mit höchstens

$$\alpha^{-\lambda}\left((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\right)^{-2}$$

α-Würfeln überdecken.

Es sei nun $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(C, D, a, \sigma, \lambda)$ die Menge derjenigen Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus W, die folgende Eigenschaft haben: „Zu jedem $\varrho_0 > 0$ gibt es mindestens eine Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ mit $\varrho > \varrho_0$ (und mit (19)), so daß der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ für mindestens

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha^{\lambda}\left((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\right)^{2}$$

Systeme $\{h; k; n; \varrho\}$ der Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ die Ungleichungen (20) erfüllt."

Ich behaupte nun: $L(\mathfrak{M}; x^\lambda) = 0$.

Beweis: Es sei $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$. Wenn zu einer Ordnung $[l; m; n; \varrho]$ (mit (19)) mindestens ein System $\{h; k; n; \varrho\}$ mit nichtleerem $M(h; k; n; \varrho)$ gehören soll, so muß nach (21)

$$2^{l+m_j-m_1} > c' \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)$$

sein (da $h_j \geqq 1$); wegen (23) muß also

$$\alpha < c'\,2^{-\varrho}$$

sein. Wir können also $\varrho_0 > c'$ so wählen, daß

$$(27)\quad c'\,2^{-\varrho_0} < \eta, \quad \sum_{l,\, m_j,\, n_j}\ \sum_{\varrho > \varrho_0} \frac{1}{\left((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\right)^{2}} < \varepsilon.$$

[Dabei wird für alle ganzen, nichtnegativen l, m_j, n_j mit (19) summiert.]

Jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ muß in mindestens einer Menge $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ mit $\varrho > \varrho_0$ liegen, also

$$\mathfrak{M} \subset \sum_{l,\, m_j,\, n_j}\ \sum_{\varrho > \varrho_0} \mathfrak{P}(l; m; n; \varrho).$$

Man kann aber jede nichtleere Menge $\mathfrak{P}(l; m; n; \varrho)$ $(\varrho > \varrho_0)$ mit höchstens

$$\alpha^{-\lambda}\Big((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)(n_j+1)\Big)^{-2}$$

abgeschlossenen Würfeln der Kante α überdecken, wobei $\alpha < c'\,2^{-\varrho} < c'\,2^{-\varrho_0} < \eta$. Multiplizieren wir diese Anzahl mit α^λ und summieren über l, m_j, n_j, ϱ $(\varrho > \varrho_0)$, bekommen wir nach (27)

$$L_\eta(\mathfrak{M}; x^\lambda) < \varepsilon \text{ für jedes } \varepsilon > 0,\ \eta > 0,$$

also

$$L_\eta(\mathfrak{M}; x^\lambda) = 0 \text{ für jedes } \eta > 0,$$

also

$$L(\mathfrak{M}; x^\lambda) = 0.$$

Wir wollen das eben Bewiesene im folgenden Hilfssatz zusammenfassen:

Hilfssatz 2. *Es sei $\sigma \geqq 2$, σ ganz, $0 < \lambda < \sigma - 1$, $0 < C < D$, $a > 0$; $R_{\sigma-1}$ sei der $(\sigma-1)$-dimensionale cartesische Raum der Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$; W sei der Würfel $C < \gamma_j < D$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$. Dann gibt es im $R_{\sigma-1}$ eine Punktmenge*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(C, D, a, \sigma, \lambda) \quad \textit{mit} \quad L(\mathfrak{M}; x^\lambda) = 0,$$

die folgende Eigenschaft besitzt:

Wenn $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ ein Punkt aus W ist, der nicht in $\mathfrak{M}$ liegt, so gibt es eine positive Zahl $\varrho_0 = \varrho_0(C, D, a, \sigma, \lambda, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ mit folgender Eigenschaft:

Sind l, m_j, n_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, ϱ nichtnegative ganze Zahlen mit

$$2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \geqq \ldots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma},\ \varrho > \varrho_0,$$

so haben die Ungleichungen

$$\left|\frac{h_1}{k_1} - \frac{h_j}{k_j}\gamma_j\right| < \frac{a}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma),$$

$$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1},\quad 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

weniger als $\mathfrak{N}(l; m; n; \varrho)$ Lösungen in ganzen Zahlen h_j, k_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$. Dabei ist[15])

$$\mathfrak{N}(l; m; n; \varrho) = c'\,2^{(\sigma-\lambda)l} \cdot 2^{(\lambda-\sigma+2)m_1} \cdot 2^{(2-\lambda+\omega)m_\sigma - \omega - (\lambda-\omega)n_\sigma - \omega}$$

$$\cdot\, 2^{-\varrho\lambda} \cdot \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j-n_j} \cdot \Big((l+1)(\varrho+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(n_j+1)\Big)^2$$

$$(\omega = [\lambda];\ \text{für } \omega = 0 \text{ soll } \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j-n_j} = 1 \text{ sein};$$

$$\text{für } \omega = \sigma - 2 \text{ soll } \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} = 1 \text{ sein}).$$

---

[15]) Vgl. (26), (22), (25), (23).

Wir führen noch zwei einfache Hilfssätze an, welche das äußere Maß $L(M; x^\lambda)$ betreffen.

Hilfssatz 3. *Es sei σ ganz, $\sigma \geqq 2$, $0 < \lambda < \sigma - 1$. M sei eine Punktmenge im $(\sigma-1)$-dimensionalen cartesischen Raum $R_{\sigma-1}$. Es sei $i_2, i_3, \ldots, i_\sigma$ irgend eine Permutation der Ziffern $2, 3, \ldots, \sigma$. N sei die Punktmenge, welche vom Punkt $(\gamma_{i_2}, \gamma_{i_3}, \ldots, \gamma_{i_\sigma})$ durchlaufen wird, wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ die Punktmenge M durchläuft.*

Behauptung: $L(N; x^\lambda) = L(M; x^\lambda)$.

Beweis: klar.

Hilfssatz 4. *Es sei $\sigma \geqq 2$, σ ganz, $0 < \lambda < \sigma - 1$, $0 < C < D$; g ganz, $1 \leqq g \leqq \sigma$. $R_{\sigma-1}$ sei der $(\sigma-1)$-dimensionale cartesische Raum der Punkte $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$.*

Es sei M eine Punktmenge aus $R_{\sigma-1}$, die ganz im Würfel $C < \gamma_j < D$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ liegt. Jedem Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus M ordnen wir σ Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ folgendermaßen zu:

$$\delta_g = 1, \quad \gamma_j = \frac{\delta_1}{\delta_j} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma)^{16}). \tag{28}$$

Es sei N die Menge, die der Punkt $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ durchläuft, wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ die Menge M durchläuft.

Behauptung. *Wenn $L(M; x^\lambda) = 0$, so ist auch $L(N; x^\lambda) = 0$.*

Beweis. Es sei $L(M; x^\lambda) = 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem $g = 1$ oder $g > 1$ ist.

1. Fall: $g = 1$. In diesem Fall ist nach der letzten Fußnote $\delta_j = \gamma_j^{-1}$ für $j = 2, 3, \ldots, \sigma$.

Es sei $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$. Es gibt eine höchstens abzählbare Menge von Würfeln

$$W_i: \quad a_{ij} < \gamma_j < b_{ij} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma; i = 1, 2, \ldots),$$

welche die Menge M überdeckt, so daß

$$0 < b_{i2} - a_{i2} = b_{i3} - a_{i3} = \ldots = b_{i\sigma} - a_{i\sigma} = l_i < \operatorname{Min}\left(\frac{C}{2}, \frac{\eta C^2}{2}\right),$$

$$\sum_i l_i^\lambda < \left(\frac{C^2}{2}\right)^\lambda \varepsilon.$$

---

16) Dadurch ist tatsächlich jedem Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ aus M genau ein System $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ zugeordnet. Denn ist $g = 1$, so besagt (28): $\gamma_j = \delta_j^{-1}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, also

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_j = \frac{1}{\gamma_j} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma);$$

ist aber $g > 1$, so besagt (28): $\gamma_g = \delta_1$, $\gamma_j = \frac{\gamma_g}{\delta_j}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, also

$$\delta_1 = \gamma_g, \quad \delta_j = \gamma_g \gamma_j^{-1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $b_{ij} > C$ $\left(\text{also } a_{ij} > \frac{C}{2}\right)$ voraussetzen, da sonst der Durchschnitt $W_i \cdot M$ leer wäre. Wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ in W_i liegt, so liegt der Punkt $(\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_\sigma)$ im Parallelepiped

$$W_i': \quad \frac{1}{b_{ij}} < \delta_j < \frac{1}{a_{ij}} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Die Parallelepipede W_i' $(i = 1, 2, \ldots)$ überdecken also die Menge N und es ist

$$0 < \frac{1}{a_{ij}} - \frac{1}{b_{ij}} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{a_{ij} b_{ij}} < \frac{2 l_i}{C^2} < \eta.$$

Man kann also W_i' mit einem Würfel W_i'' mit der Kante $2 l_i C^{-2} < \eta$ überdecken; die Würfel W_i'' $(i = 1, 2, \ldots)$ überdecken die Menge N und es ist

$$\sum_i \left(\frac{2 l_i}{C^2}\right)^\lambda < \varepsilon.$$

Daher ist $L_\eta(N; x^\lambda) < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, also $L_\eta(N; x^\lambda) = 0$ für jedes $\eta > 0$, also $L(N; x^\lambda) = 0$.

2. Fall: $g > 1$. In diesem Falle ist nach der letzten Fußnote $\delta_1 = \gamma_\sigma$, $\delta_j = \gamma_\sigma \gamma_j^{-1}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma, j \neq g)$. Es sei $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$. Es gibt eine höchstens abzählbare Menge von Würfeln

$$W_i: \quad a_{ij} < \gamma_j < b_{ij} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma;\ i = 1, 2, \ldots),$$

welche die Menge M überdeckt, so daß

$$0 < b_{i2} - a_{i2} = b_{i3} - a_{i3} = \ldots = b_{i\sigma} - a_{i\sigma} = l_i < \text{Min}\left(\frac{C}{2}, \frac{C^2 \eta}{6D + C^2}\right),$$

$$\sum_i l_i^\lambda < \left(\frac{C^2}{6D + C^2}\right)^\lambda \varepsilon.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $b_{ij} > C$ $\left(\text{also } a_{ij} > \frac{C}{2}\right)$ und $a_{ij} < D$ $\left(\text{also } b_{ij} < D + \frac{C}{2} < 2D\right)$, da sonst der Durchschnitt $W_i \cdot M$ leer wäre.

Wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ in W_i liegt, so liegt der Punkt $(\delta_1, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ im Parallelepiped

$$W_i': \quad a_{i\sigma} < \delta_1 < b_{i\sigma}$$

$$\frac{a_{ig}}{b_{ij}} < \delta_j < \frac{b_{ig}}{a_{ij}}$$

$$(j = 2, 3, \ldots, \sigma;\ j \neq g;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Die Parallelepipede W_i' überdecken also die Menge N und es ist

$$0 < b_{ig} - a_{ig} = l_i < \frac{6D + C^2}{C^2} l_i < \eta,$$

$$0 < \frac{b_{ig}}{a_{ij}} - \frac{a_{ig}}{b_{ij}} = \frac{b_{ig} b_{ij} - a_{ig} a_{ij}}{a_{ij} b_{ij}}$$

$$= \frac{b_{ig}(b_{ij} - a_{ij}) + a_{ij}(b_{ig} - a_{ig})}{a_{ij} b_{ij}} < \frac{6D}{C^2} l_i < \frac{6D + C^2}{C^2} l_i < \eta$$

$$(j = 2, 3, \ldots, \sigma; j \neq g; i = 1, 2, \ldots).$$

Man kann also W_i' $(i = 1, 2, \ldots)$ mit einem Würfel W_i'' von der Kante

$$\frac{6D + C^2}{C^2} l_i < \eta$$

überdecken; die Würfel W_i'' $(i = 1, 2, \ldots)$ überdecken die Menge N und es ist

$$\sum_i \left(\frac{6D + C^2}{C^2}\right)^\lambda l_i^\lambda < \varepsilon.$$

Daher ist $L_\eta(N; x^\lambda) < \varepsilon$ für jedes $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$, also $L_\eta(N; x^\lambda) = 0$ für jedes $\eta > 0$, also $L(N; x^\lambda) = 0$.

§ 4.

Schluß des Beweises des Satzes 2.

Hilfssatz 5. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, $r_1 \geqq 4$, $r_2 \geqq 4$, …, $r_\sigma \geqq 4$, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$; σ, r_j *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $0 < \lambda < \sigma - 1$. *Wir bilden den* $(\sigma - 1)$*-dimensionalen cartesischen Raum der Punkte* $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$. *Für ganzes* $\nu > 1$ *sei* $\mathfrak{M}_\nu$ *die Menge derjenigen Punkte* $(\beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ *mit* $\frac{1}{\nu} < \beta_j < \nu$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, *die folgende Eigenschaft haben: wenn*

$$Q(u) = u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + \ldots + u_{r_1,1}^2 + \sum_{j=2}^{\sigma} \beta_j (u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \ldots + u_{r_j,j}^2) \tag{29}$$

und (*für* $x > 1$) $z = x^{-\frac{\lambda}{\sigma - \lambda}}$ *gesetzt wird, so ist*

$$\int_{\frac{1}{x} + i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x} + i\infty} \prod_{j=1}^{\sigma} \Theta^{r_j}(\beta_j s)\, e^{xs}\, (e^{\pm zs} - 1)^\sigma \frac{ds}{s^{\sigma+1}} = \Omega\left(x^{\frac{r}{2} - 1 - \lambda} z^{1+\lambda} (\log x)^{6\sigma + 5}\right)$$

$$\left(\beta_1 = 1,\ B = \max_{1 \leqq j \leqq \sigma} \frac{2\pi}{\beta_j}\right).$$

Behauptung: $L(\mathfrak{M}_\nu; x^\lambda) = 0$.

Wir behaupten zunächst: beweisen wir den Hilfssatz 5, so wird damit der Satz 2 bewiesen sein. Beweis: Der Hilfssatz 5 sei wahr; wir setzen $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_4 + \ldots$; dann ist

$$L(\mathfrak{M}; x^\lambda) \leqq \sum_{\nu=2}^{\infty} L(\mathfrak{M}_\nu; x^\lambda) = 0.$$

Wenn ein Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ mit $\beta_j > 0$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, so gibt es ein ganzes $\nu > 1$, so daß $\frac{1}{\nu} < \beta_j < \nu$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$; andererseits aber liegt dieser Punkt nicht in $\mathfrak{M}_\nu$. Nach dem Hilfssatz 1 mit $z = x^{-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}$, $n = \sigma$ und nach dem Hilfssatz 5 ist also (man beachte $\lambda < \sigma - 1 \leqq \frac{r}{4} - 1$, also

$$\frac{\lambda}{\sigma-\lambda} < \frac{\sigma-1}{1} \leqq \frac{r}{4} - 1, \text{ also } \frac{r}{4} < \frac{r}{2} - 1 - \frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\Big)$$

für die Form (29)

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_Q(x) &= O\Big(x^{\frac{r}{4}} + x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\Big) + o\Big(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda-\frac{1+\lambda-\sigma}{\sigma-\lambda}\lambda} \log^{6\sigma+5} x\Big) \\ &= o\Big(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}} \log^{6\sigma+5} x\Big), \end{aligned}$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Beweis des Hilfssatzes 5. $\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, r, \nu$ seien den Voraussetzungen gemäß gegeben; W' sei der Würfel $\frac{1}{\nu} < \beta_j < \nu$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$; wir greifen einen Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ aus W' heraus und bilden das Integral

$$(30) \qquad J = \int_{\frac{1}{x}+i\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+i\infty} \prod_{j=1}^{\sigma} \Theta^{r_j}(\beta_j s)\, e^{xs}\, (e^{\pm zs} - 1)^\sigma \frac{ds}{s^{\sigma+1}}.$$

Den Integrationsweg teilen wir in abzählbar viele Stücke folgendermaßen (bis zum Schluß dieses Paragraphen sei $x > 4$).

Eine Zahl h/k nenne ich eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt, wenn $h \geqq 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$. Ein für allemal bemerke ich: wenn ich einen Bruch h/k aufschreibe und ihn eine Fareyzahl oder einen Fareypunkt nenne, verstehe ich darunter, daß der Bruch schon in seiner reduzierten Gestalt aufgeschrieben ist, d. h. daß $h \geqq 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$. Zwei Fareypunkte (und ebenso später zwei Medianten) heißen benachbart, wenn zwischen ihnen kein Fareypunkt (bzw. keine Mediante)

liegt. Dabei bezeichne ich als Medianten alle Zahlen $\frac{h+h'}{k+k'}$, wo $\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ zwei benachbarte Fareypunkte sind. Wenn h/k ein Fareypunkt mit $h>0$ ist, so sei $\mathfrak{B}_{h,k}$ dasjenige linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, welches den Punkt h/k enthält und zu Endpunkten zwei benachbarte Medianten hat. Wenn $J=\langle a,b)$ und $\delta>0$, so bedeute δJ das Intervall $\langle \delta a, \delta b)$. Die kleinste Mediante ist $\frac{0+1}{1+[\sqrt{x}]}<\frac{1}{\sqrt{x}}$; wenn also bei festem $j\,(1\leqq j\leqq\sigma)$ die Zahl h/k alle Fareybrüche mit $h>0$ durchläuft, so überdeckt die Vereinigungsmenge der Intervalle $\frac{2\pi}{\beta_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ sicher das ganze Intervall $\left(\frac{B}{\sqrt{x}},+\infty\right)$ $\left(\text{denn } \frac{2\pi}{\beta_j}\leqq B\right)$. Bekanntlich ist

$$\mathfrak{B}_{h,k}=\left\langle \frac{h}{k}-\frac{\vartheta'}{k\sqrt{x}},\ \frac{h}{k}+\frac{\vartheta''}{k\sqrt{x}}\right), \tag{31}$$

wo $\frac{1}{2}\leqq\vartheta'\leqq 1$, $\frac{1}{2}\leqq\vartheta''\leqq 1$.

Im Integral (30) setzen wir nun $s=\frac{1}{x}+ti$ (t reell) und bekommen sofort

$$|J|\leqq e\int\limits_{\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\infty}\prod_{j=1}^{\sigma}|\Theta^{r_j}(\beta_j s)|\cdot|e^{\pm zs}-1|^{\sigma}\frac{dt}{t^{\sigma+1}}.$$

Zu jedem t des Integrationsintervalls $\left(\frac{B}{\sqrt{x}},+\infty\right)$ und zu jedem j $(1\leqq j\leqq\sigma)$ gibt es genau eine Fareyzahl h_j/k_j (wo $h_j>0$), so daß t in $\frac{2\pi}{\beta_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ liegt; wenn dazu noch $t\neq\frac{2\pi}{\beta_j}\frac{h_j}{k_j}$, so gibt es genau eine ganze Zahl n_j, so daß

$$\frac{2\pi}{\beta_j 2^{n_j+1}k_j\sqrt{x}}<\left|t-\frac{2\pi}{\beta_j}\frac{h_j}{k_j}\right|\leqq\frac{2\pi}{\beta_j 2^{n_j}k_j\sqrt{x}}\qquad(1\leqq j\leqq\sigma); \tag{32}$$

nach (31) ist

$$\left|t-\frac{2\pi}{\beta_j}\frac{h_j}{k_j}\right|\leqq\frac{2\pi}{\beta_j k_j\sqrt{x}},$$

also ist $n_j\geqq 0$. Also: zu jedem $t>\frac{B}{\sqrt{x}}$, welches mit keinem der abzählbar vielen Punkte $\frac{2\pi}{\beta_j}\frac{h}{k}$ $(0<k\leqq\sqrt{x},\ h>0,\ (h,k)=1,\ j=1,2,\ldots,\sigma)$ übereinstimmt, gibt es ein System von 3σ eindeutig bestimmten ganzen Zahlen

$$h_j,\ k_j,\ n_j\ (j=1,2,\ldots,\sigma;\ h_j>0;\ 0<k_j\leqq\sqrt{x};\ (h_j,k_j)=1;\ n_j\geqq 0),$$

so daß t im Durchschnitt der σ Intervalle $\frac{2\pi}{\beta_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ $(j=1,2,\ldots,\sigma)$ liegt und die Ungleichungen (32) erfüllt.

Umgekehrt, wenn ein System von 3σ ganzen Zahlen

$$h_j, k_j, n_j \quad (j=1,2,\ldots,\sigma;\ h_j>0;\ 0<k_j\leqq\sqrt{x};\ (h_j,k_j)=1;\ n_j\geqq 0)$$

gegeben ist, so sei

$$S(h_1,h_2,\ldots,h_\sigma;k_1,k_2,\ldots,k_\sigma;n_1,n_2,\ldots,n_\sigma)=S(h;k;n)$$

die Menge derjenigen t des Intervalls $\left(\frac{B}{\sqrt{x}},+\infty\right)$, die im Durchschnitt der σ Intervalle $\frac{2\pi}{\beta_j}\mathfrak{B}_{h_j,k_j}$ liegen und den Ungleichungen (32) genügen[17]). Die Vereinigungsmenge aller Mengen $S(h;k;n)$ überdeckt offenbar, mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten, das Intervall $\frac{B}{\sqrt{x}}<t<+\infty$. Daher ist

$$|J|\leqq e\sum_{\substack{h_1,\ldots,h_\sigma\\ k_1,\ldots,k_\sigma\\ n_1,\ldots,n_\sigma}}\int_{S(h;k;n)}\prod_{j=1}^{\sigma}|\Theta^{r_j}(\beta_j s)|\cdot|e^{\pm zs}-1|^\sigma\frac{dt}{t^{\sigma+1}}.$$

Es sei nun $i_1,i_2,\ldots,i_\sigma$ irgend eine Permutation der Ziffern $1,2,\ldots,\sigma$; $U(i_1,i_2,\ldots,i_\sigma)$ sei die Menge derjenigen $S(h;k;n)$, für welche

$$2^{n_{i_1}}k_{i_1}\geqq 2^{n_{i_2}}k_{i_2}\geqq\ldots\geqq 2^{n_{i_\sigma}}k_{i_\sigma}$$

ist. Der Hilfsatz 5 wird offenbar bewiesen sein, wenn wir folgende Behauptung beweisen:

Behauptung A. *Es sei $(i_1,i_2,\ldots,i_\sigma)$ irgend eine Permutation der Ziffern $1,2,\ldots,\sigma$. Dann gibt es im cartesischen Raume der Punkte $(\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_\sigma)$ eine Menge $\mathfrak{M}_\nu(i_1,i_2,\ldots,i_\sigma)$ mit*

$$L(\mathfrak{M}_\nu(i_1,i_2,\ldots,i_\sigma);x^\lambda)=0,$$

die folgende Eigenschaft besitzt:

Ist $(\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_\sigma)$ irgend ein Punkt mit $\frac{1}{\nu}<\beta_j<\nu$ $(j=2,3,\ldots,\sigma)$, der nicht zu $\mathfrak{M}_\nu(i_1,i_2,\ldots,i_\sigma)$ gehört, so ist ($\beta_1=1$ gesetzt)

$$\sum_{S(h;k;n)}\int\prod_{j=1}^{\sigma}|\Theta^{r_j}(\beta_j s)|\cdot|e^{\pm zs}-1|^\sigma\frac{dt}{t^{\sigma+1}}$$
$$=o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda}z^{1+\lambda}\log^{6\sigma+5}x\right);$$

dabei ist die Summe über alle $S(h;k;n)$ aus $U(i_1,i_2,\ldots,i_\sigma)$ zu erstrecken.

[17]) $S(h;k;n)$ kann freilich auch leer sein.

Wir numerieren nun die Summationsbuchstaben um: statt $h_{i_f}, k_{i_f}, n_{i_f}$ schreiben wir h_f, k_f, n_f, und statt β_{i_f} schreiben wir δ_f (also $\delta_g = 1$, wenn g durch $i_g = 1$ definiert ist). Statt der Behauptung A beweisen wir nun die äquivalente[18])

Behauptung A'. *Es seien* $\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, r, \lambda, \nu$ *gemäß den Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 gegeben; es sei weiter eine ganze Zahl* g *gegeben,* $1 \leqq g \leqq \sigma$. *Wir setzen* $\delta_g = 1$ *und betrachten den* $(\sigma - 1)$*-dimensionalen cartesischen Raum* $R_{\sigma-1}$ *der Punkte* $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$. *Dann gibt es in* $R_{\sigma-1}$ *eine Punktmenge* $\mathfrak{M}_\nu(g)$ *mit*

$$L(\mathfrak{M}_\nu(g); x^\lambda) = 0,$$

so daß folgendes gilt: Ist $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ *ein Punkt mit* $\frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu\,(1 \leqq j \leqq \sigma, j \neq g)$, *der nicht zu* $\mathfrak{M}_\nu(g)$ *gehört, so ist*[19])

$$\sum_{h;\,k;\,n} \int_{S(h;\,k;\,n)} \prod_{j=1}^{\sigma} |\Theta^{r_j}(\delta_j s)| \cdot |e^{\pm z s} - 1|^\sigma \frac{dt}{t^{\sigma+1}} = o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda} z^{1+\lambda} \log^{6\sigma+5} x\right). \tag{33}$$

Dabei wird über alle Systeme ganzer Zahlen $h_j; k_j; n_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *summiert, für welche*

$$h_j > 0, \quad 0 < k_j \leqq \sqrt{x}, \quad (h_j, k_j) = 1, \quad n_j \geqq 0, \tag{34}$$

$$k_1 2^{n_1} \geqq k_2 2^{n_2} \geqq \ldots \geqq k_\sigma 2^{n_\sigma} \text{ gilt.} \tag{35}$$

$$S(h; k; n) = S(h_1, h_2, \ldots, h_\sigma; k_1, k_2, \ldots, k_\sigma; n_1, n_2, \ldots, n_\sigma)$$

ist als die Menge derjenigen t *des Intervalls* $\left(\frac{B}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ *definiert, die im Durchschnitt der* σ *Intervalle* $\frac{2\pi}{\delta_j}\mathfrak{B}_{h_j, k_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ *liegen und den Ungleichungen*

$$\frac{2\pi}{\delta_j 2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \left| t - \frac{2\pi}{\delta_j} \frac{h_j}{k_j} \right| \leqq \frac{2\pi}{\delta_j 2^{n_j} k_j \sqrt{x}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{36}$$

genügen; B *ist durch* $B = \underset{1 \leqq j \leqq \sigma}{Max} \frac{2\pi}{\delta_j}$ *definiert.*

Es liege nun ein Punkt $(\delta_1, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ mit $\frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu$ vor.

Es seien $l; m_1, m_2, \ldots, m_\sigma; n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$ ganze nichtnegative Zahlen; wir wollen sagen, daß eine Menge

$$S(h; k; n) = S(h_1, h_2, \ldots, h_\sigma; k_1, k_2, \ldots, k_\sigma; n_1, n_2, \ldots, n_\sigma)$$

---

[18]) Die Äquivalenz folgt aus dem Hilfssatz 3.

[19]) Ich schreibe r_j statt r_{i_j}; das schadet nicht, da die Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 in den r_j symmetrisch sind.

mit (34), (35) zur Klasse

$$[l;\, m;\, n] = [l;\, m_1, m_2, \ldots, m_\sigma;\, n_1, n_2, \ldots, n_\sigma]$$

gehört, wenn

$$(37) \qquad 2^l \leqq h_1 < 2^{l+1};\ 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)^{20}).$$

Jede von unseren Mengen $S(h;\, k;\, n)$ gehört also genau zu einer Klasse $[l;\, m;\, n]$; für diese Klasse gilt dann nach (34), (35), (37) offenbar

$$(38) \qquad 2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \geqq \ldots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma};\ 2^{m_j} \leqq \sqrt{x} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

Wenn eine Menge $S(h;\, k;\, n)$ der Klasse $[l;\, m;\, n]$ nicht leer sein soll, so muß nach (36) und (35) sein $\left(\text{da } \frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu\right)$:

$$\left|\frac{2\pi}{\delta_1}\frac{h_1}{k_1} - \frac{2\pi}{\delta_j}\frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{2\pi}{\delta_1 2^{n_1} k_1 \sqrt{x}} + \frac{2\pi}{\delta_j 2^{n_j} k_j \sqrt{x}} < 2\pi \cdot 3\nu \cdot \frac{1}{2^{n_j} k_j \sqrt{x}}$$
$$(j = 2, 3, \ldots, \sigma),$$

also

$$\left|\frac{h_1}{k_1} - \frac{\delta_1}{\delta_j}\frac{h_j}{k_j}\right| < \frac{3\nu^2}{2^{n_j} k_j 2^\varrho} \qquad (j = 2, 3, \ldots, \sigma),$$

wenn die ganze (wegen $x > 4$ positive) Zahl ϱ durch $2^\varrho \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$ definiert ist.

Wir wenden nun den Hilfssatz 2 mit $C = \frac{1}{\nu^2}$, $D = \nu^2$, $a = 3\nu^2$ an. Wir setzen $\gamma_j = \frac{\delta_1}{\delta_j}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ und bezeichnen mit $\mathfrak{N}_\nu(g)$ die Menge, welche der Punkt $(\delta_1, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ durchläuft, wenn der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$ die Menge $\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\nu^2}, \nu^2, 3\nu^2, \sigma, \lambda\right)$ durchläuft[21]). Nach Hilfssatz 2 ist

$$L\left(\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\nu^2}, \nu^2, 3\nu^2, \sigma, \lambda\right);\, x^\lambda\right) = 0;$$

nach Hilfssatz 4 ist also auch

$$L(\mathfrak{N}_\nu(g);\, x^\lambda) = 0.$$

Es sei $\mathfrak{M}_\nu(g)$ der Durchschnitt der Menge $\mathfrak{N}_\nu(g)$ mit dem Würfel

$$\frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma;\ j \neq g);$$

dann ist auch

$$L(\mathfrak{M}_\nu(g);\, x^\lambda) = 0.$$

---

[20]) Wenn die Klasse $[l;\, m;\, n]$ gegeben ist, so sind für die zugehörigen Mengen $S(h;\, k;\, n)$ die n_j bereits bestimmt, während die h_j, k_j noch einen gewissen Spielraum haben.

[21]) Ich bemerke noch einmal [vgl. die Fußnote [16])], daß $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ $(\delta_g = 1)$ durch die Angabe von $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma$ eindeutig bestimmt sind.

Wir greifen nun aus dem Würfel

$$\frac{1}{\nu} < \delta_j < \nu \qquad (j = 1, 2, \ldots, \sigma;\ j \neq g)$$

einen Punkt $(\delta_1, \ldots, \delta_{g-1}, \delta_{g+1}, \ldots, \delta_\sigma)$ heraus, welcher nicht in $\mathfrak{M}_\nu(g)$ [d. h. nicht in $\mathfrak{N}_\nu(g)$] liegt; diesen Punkt wollen wir bis zum Schluß dieses Paragraphen festhalten. Wir setzen noch $\delta_g = 1$ und werden für dieses System $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ die Abschätzung (33) beweisen. Dadurch wird offenbar die Behauptung A' bewiesen sein. Mit c'' werde ich jetzt unterschiedslos positive Zahlen bezeichnen, die nur von $\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, \lambda, \nu, g, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ abhängen.

Es sei $[l; m; n] = [l; m_1, m_2, \ldots, m_\sigma; n_1, n_2, \ldots, n_\sigma]$ eine Klasse [mit (38)]; wir wollen den Beitrag abschätzen, den die zur Klasse $[l; m; n]$ gehörigen Mengen $S(h; k; n)$ zu der Summe in (33) liefern.

Dazu bemerken wir folgendes:

I. Wenn t in $S(h; k; n)$ liegt und $S(h; k; n)$ zur Klasse $[l; m; n]$ gehört, so ist nach (36) (wegen $n_j \geqq 0$)

$$\left| t - \frac{2\pi}{\delta_1} \frac{h_1}{k_1} \right| \leqq \frac{2\pi}{\delta_1 k_1 \sqrt{x}},$$

also für $x > c''$ (da $h_1 \geqq 1$)

$$c'' \frac{h_1}{k_1} < t < c'' \frac{h_1}{k_1},$$

also

$$c'' 2^{l-m_1} < t < c'' 2^{l-m_1}.$$

Bis zum Schluß dieses Paragraphen sei von nun an stets $x > c''$.

II. Es sei $s = \frac{1}{x} + ti$, wo t in $S(h; k; n)$ liegt; $S(h; k; n)$ gehöre zur Klasse $[l; m; n]$. Dann liegt t für $j = 1, 2, \ldots, \sigma$ in $\frac{2\pi}{\delta_j} \mathfrak{B}_{h_j, k_j}$, also ist[22])

$$|\Theta(\delta_j s)| < \frac{c''}{\sqrt{k_j} \sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\delta_j} \frac{h_j}{k_j}\right)^2}};$$

wegen (36), (37) ist also

$$|\Theta(\delta_j s)| < c'' \operatorname{Min}\left(x^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m_j}{2}}, x^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{n_j}{2}}\right).$$

III. Es sei t in $S(h; k; n)$; die Menge $S(h; k; n)$ gehöre zur Klasse $[l; m; n]$. Nach den Abschätzungen (12), (13) haben wir (man beachte $t > \frac{B}{\sqrt{x}} > \frac{1}{x}$, $t < c'' 2^{l-m_1}$)

$$|e^{\pm zs} - 1| < c'' \operatorname{Min}(1, z 2^{l-m_1}).$$

---

[22]) Vgl. *G p* I, Formel (13), S. 708.

IV. Das Maß von $S(h; k; n)$ (welches zur Klasse $[l; m; n]$ gehört) ist nach (36), (37) kleiner als

$$\frac{c''}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}}.$$

V. Der Punkt $(\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_\sigma)$, wo $\gamma_j = \delta_1 \delta_j^{-1}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, gehört dem Würfel $\frac{1}{\nu^2} < \gamma_j < \nu^2$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ an, liegt aber nicht in der Menge $\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\nu^2}, \nu^2, 3\nu^2, \sigma, \lambda\right)$. Daher gilt nach Hilfssatz 2 [23]): die Anzahl der nichtleeren Mengen $S(h; k; n)$, die zur Klasse $[l; m; n]$ gehören, ist für $\varrho > c''$ (d. h. für $x > c''$) kleiner als

$$c'' \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \log^2 x \cdot 2^{(\sigma-\lambda)l} \cdot 2^{(\lambda-\sigma+2)m_1} \cdot 2^{(2-\lambda+\omega)m_{\sigma-\omega}-(\lambda-\omega)n_{\sigma-\omega}} \cdot$$

$$\prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j-n_j} \cdot \left((l+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\prod_{j=1}^{\sigma}(n_j+1)\right)^2.$$

Der Beitrag, den die Klasse $[l; m; n]$ zu der Summe links in (33) liefert, ist also höchstens ($[\lambda] = \omega$ gesetzt)

$$(39)\quad c''\, 2^{-m_1-n_1} \cdot x^{-1/2} \cdot 2^{-(\sigma+1)l+(\sigma+1)m_1} \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} \operatorname{Min}\left(x^{\frac{r_j}{2}} \cdot 2^{-\frac{r_j}{2}m_j},\ x^{\frac{r_j}{4}} 2^{\frac{r_j}{2}n_j}\right)$$

$$\cdot \operatorname{Min}(1, z^\sigma 2^{\sigma l-\sigma m_1}) \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \log^2 x \cdot 2^{(\sigma-\lambda)l} \cdot 2^{(\lambda-\sigma+2)m_1}$$

$$\cdot 2^{(2-\lambda+\omega)m_{\sigma-\omega}-(\lambda-\omega)n_{\sigma-\omega}} \cdot \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j-n_j}$$

$$\cdot \left((l+1)\cdot\prod_{j=1}^{\sigma}(m_j+1)\cdot\prod_{j=1}^{\sigma}(n_j+1)\right)^2.$$

Diesen Ausdruck sollen wir über alle ganzen nichtnegativen l, m_j, n_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ mit

$$(40)\quad 2^{m_1+n_1} \geqq 2^{m_2+n_2} \geqq \ldots \geqq 2^{m_\sigma+n_\sigma};\ 2^{m_j} \leqq \sqrt{x}\ \ (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

summieren; wenn die Summe gleich

$$(41)\qquad o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda} z^{1+\lambda} \log^{6\sigma+5} x\right)$$

herauskommt, so wird der Hilfssatz 5 bewiesen sein.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zuerst, daß die Summation über l ergibt (man beachte $\sigma - 1 - \lambda > 0$)

$$(42)\qquad \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-(1+\lambda)l} \operatorname{Min}(1, z^\sigma 2^{\sigma l-\sigma m_1}) \cdot (l+1)^2$$

$$< c''\, z^{1+\lambda} \cdot 2^{-m_1(1+\lambda)} \cdot \log^2(2^{m_1}; z)$$

$$< c''\, z^{1+\lambda} 2^{-m_1(1+\lambda)} \cdot \log^2 x.$$

---

[23]) Man beachte $2^\varrho \leqq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$.

Wir vereinigen nun die Klassen $[l; m; n]$ in $\sigma + 1$ Oberklassen „0“, „1“, „2“, …, „σ“ folgendermaßen: $[l; m; n]$ gehöre zur Oberklasse „τ“, wenn

$$\text{(43)} \qquad \begin{cases} 2^{m_j + n_j} \geqq \sqrt{x} & \text{für } j \leqq \tau, \\ 2^{m_j + n_j} < \sqrt{x} & \text{für } j > \tau; \end{cases}$$

und wir werden den Ausdruck (39) über jede Oberklasse gesondert summieren; wenn dabei bei jeder der $\sigma + 1$ Oberklassen

$$\text{(44)} \qquad o\left(x^{\frac{r}{2}-1-\lambda} z^{1+\lambda} \log^{6\sigma+5} x\right)$$

herauskommt, so wird der Hilfssatz 5 bewiesen sein.

I. Die Oberklasse „0“. Wir sollen den Ausdruck[24])

$$c'' z^{1+\lambda} \cdot \log^2 x \cdot 2^{-(1+\lambda)m_1} \cdot 2^{-m_1-n_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{(\sigma+1)m_1} \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} 2^{\frac{r_j}{2} n_j} \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \log^2 x \cdot 2^{(\lambda-\sigma+2)m_1}$$
$$\cdot 2^{(2-\lambda+\omega)m_{\sigma-\omega} - (\lambda-\omega)n_{\sigma-\omega}} \cdot \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j - n_j}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j+1)^2 \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (n_j+1)^2$$

über die $m_j \geqq 0$, $n_j \geqq 0$ mit den Nebenbedingungen (40) und $2^{m_j+n_j} < \sqrt{x}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ summieren. Die Summation ergibt:

$$\sum_{m_1, n_1} 2^{m_1 + \left(\frac{r_1}{2}-1\right)n_1} (m_1+1)^2 (n_1+1)^2$$
$$\leqq c'' \cdot \log^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} \sum_{n_1} 2^{\left(\frac{r_1}{2}-2\right)n_1} \leqq c'' x^{\frac{r_1}{4}-\frac{1}{2}} \log^5 x.$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{2m_j + \frac{r_j}{2} n_j} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2 \leqq c'' \cdot \log^4 x \cdot x \sum_{n_j} 2^{\left(\frac{r_j}{2}-2\right)n_j}$$
$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4}} \cdot \log^5 x \quad \text{für } 1 < j < \sigma - \omega.$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{(2-\lambda+\omega)m_j + \left(\frac{r_j}{2}-\lambda+\omega\right)n_j} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2$$
$$\leqq c'' \log^4 x \cdot x^{1-\frac{\lambda-\omega}{2}} \sum_{n_j} 2^{\left(\frac{r_j}{2}-2\right)n_j}$$
$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4}-\frac{\lambda-\omega}{2}} \log^5 x \quad \text{für } j = \sigma - \omega.$$

[24]) Die Summation über l wurde bereits in (42) durchgeführt; bei der folgenden Rechnung beachte man $2 \leqq \sigma - \omega \leqq \sigma$, $r_j \geqq 4$.

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{m_j + \left(\frac{r_j}{2}-1\right) n_j} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2$$
$$\leqq c'' \log^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} \sum_{n_j} 2^{\left(\frac{r_j}{2}-2\right) n_j} \leqq c'' x^{\frac{r_j}{4}-\frac{1}{2}} \log^5 x \quad \text{für } \sigma-\omega < j \leqq \sigma.$$

Die Summation über die Oberklasse „0" ergibt also zusammen

$$O\left(z^{1+\lambda} \cdot \log^4 x \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} \cdot \log^{5\sigma} x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{\lambda-\omega}{2}} \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} x^{-\frac{1}{2}} \right)$$
$$= O\left(z^{1+\lambda} \cdot x^{\frac{r}{2}-1-\lambda} \cdot \log^{5\sigma+4} x \right),$$

im Einklang mit (44).

II. Die Oberklasse „τ" mit $1 \leqq \tau < \sigma - \omega$. Wir sollen den Ausdruck[24])

$$c'' z^{1+\lambda} \cdot \log^2 x \cdot 2^{-(1+\lambda) m_1} \cdot 2^{-m_1-n_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{(\sigma+1) m_1}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\tau} x^{\frac{r_j}{2}} 2^{-\frac{r_j}{2} m_j} \cdot \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} 2^{\frac{r_j}{2} n_j} \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \log^2 x \cdot 2^{(\lambda-\sigma+2) m_1}$$
$$\cdot 2^{(2-\lambda+\omega) m_{\sigma-\omega} - (\lambda-\omega) n_{\sigma-\omega}} \cdot \prod_{1<j<\sigma-\omega} 2^{2 m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma} 2^{m_j - n_j}$$
$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j+1)^2 \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (n_j+1)^2$$

über die $m_j \geqq 0$, $n_j \geqq 0$ mit den Nebenbedingungen (40), (43) summieren. Wir summieren zunächst über die m_j, n_j mit $1 \leqq j \leqq \tau$ (man beachte $\tau < \sigma - \omega$); dabei benutzen wir, daß nach (40)

$$2^{n_j} \leqq 2^{m_j + n_j} \leqq 2^{m_1 + n_1} \leqq \sqrt{x} \cdot 2^{n_1},$$

also

$$n_j + 1 \leqq c'' \operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1)$$

ist:

$$\sum_{\substack{m_j, n_j \\ 1\leqq j\leqq\tau}} 2^{-\left(\frac{r_1}{2}-1\right) m_1 - n_1} \prod_{1<j\leqq\tau} 2^{-\left(\frac{r_j}{2}-2\right) m_j} \prod_{1\leqq j\leqq\tau} (m_j+1)^2 (n_j+1)^2$$
$$\leqq c'' \log^{3(\tau-1)} x \cdot \sum_{m_1, n_1} 2^{-\left(\frac{r_1}{2}-1\right) m_1 - n_1} (m_1+1)^2 (n_1+1)^2 \cdot (\operatorname{Max}(\log x, n_1+1))^{3(\tau-1)}$$
$$\leqq c'' \log^{6(\tau-1)+4} x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{m_1} 2^{-\left(\frac{r_1}{2}-2\right) m_1}$$
$$\leqq c'' \log^{6(\tau-1)+5} x \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Weiter ist

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{2m_j + \frac{r_j}{2} n_j} \cdot (m_j+1)^2 (n_j+1)^2 \leqq c'' \log^4 x \cdot x^{\frac{r_j}{4}} \cdot \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2}-2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4}} \log^5 x \quad \text{für} \quad \tau < j < \sigma - \omega;$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{(2-\lambda+\omega) m_j + \left(\frac{r_j}{2} - \lambda + \omega\right) n_j} \cdot (m_j+1)^2 (n_j+1)^2$$

$$\leqq c'' \log^4 x \cdot x^{\frac{r_j}{4} - \frac{\lambda-\omega}{2}} \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2}-2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4} - \frac{\lambda-\omega}{2}} \cdot \log^5 x \quad \text{für} \quad j = \sigma - \omega;$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{m_j + \left(\frac{r_j}{2} - 1\right) n_j} \cdot (m_j+1)^2 (n_j+1)^2$$

$$\leqq c'' \cdot \log^4 x \cdot x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \cdot \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2}-2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \cdot \log^5 x \quad \text{für} \quad \sigma - \omega < j \leqq \sigma.$$

Die Summation über die Oberklasse „τ“ ergibt also zusammen

$$O\Bigg(z^{1+\lambda} \cdot \log^4 x \cdot x^{-\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{\tau} x^{\frac{r_j}{2}} \cdot \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} \cdot x^{-\frac{\lambda-\omega}{2}} \cdot \prod_{\sigma-\omega < j \leqq \sigma} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \log^{6\sigma} x \Bigg)$$

$$= O\left(z^{1+\lambda} \cdot x^{\frac{r}{2} - 1 - \lambda} \cdot \log^{6\sigma+4} x \right),$$

im Einklang mit (44).

III. Die Oberklasse „τ“ mit $\sigma - \omega \leqq \tau \leqq \sigma$. Wir sollen den Ausdruck[24])

$$c'' z^{1+\lambda} \cdot \log^2 x \cdot 2^{-(1+\lambda) m_1} \cdot 2^{-m_1 - n_1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{(\sigma+1) m_1}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{\tau} x^{\frac{r_j}{2}} 2^{-\frac{r_j}{2} m_j} \cdot \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} x^{\frac{r_j}{4}} 2^{\frac{r_j}{2} n_j} \cdot x^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \log^2 x \cdot 2^{(\lambda - \sigma + 2) m_1}$$

$$\cdot 2^{(2-\lambda+\omega) m_{\sigma-\omega} - (\lambda-\omega) n_{\sigma-\omega}} \cdot \prod_{1 < j < \sigma-\omega} 2^{2m_j} \cdot \prod_{\sigma-\omega < j \leqq \sigma} 2^{m_j - n_j}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (m_j+1)^2 \cdot \prod_{j=1}^{\sigma} (n_j+1)^2$$

über die $m_j \geqq 0$, $n_j \geqq 0$ mit den Nebenbedingungen (40), (43) summieren. Wir summieren zunächst über die m_j, n_j mit $1 \leqq j \leqq \sigma - \omega$ (man beachte $\tau \geqq \sigma - \omega$); dabei benutzen wir wieder, daß

$$n_j + 1 \leqq c'' \operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1)$$

ist:

$$\sum_{\substack{m_j, n_j \\ 1 \leqq j \leqq \sigma - \omega}} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 1\right) m_1 - n_1}$$

$$\prod_{1 < j < \sigma - \omega} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j} \cdot 2^{-\left(\frac{r_{\sigma-\omega}}{2} - 2 + \lambda - \omega\right) m_{\sigma-\omega} - (\lambda - \omega) n_{\sigma - \omega}}$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{\sigma - \omega} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2$$

$$\leqq c'' \log^{2(\sigma-\omega)} x \cdot x^{-\frac{\lambda - \omega}{2}} \cdot \log x \cdot \sum_{\substack{m_j, n_j \\ 1 \leqq j < \sigma - \omega}} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 1\right) m_1 - n_1}$$

$$\cdot \prod_{1 < j < \sigma - \omega} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j} \cdot \prod_{1 \leqq j < \sigma - \omega} (n_j + 1)^2 \cdot (\operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1))^3$$

$$\leqq c'' \log^{3(\sigma-\omega)-1} x \cdot x^{-\frac{\lambda - \omega}{2}} \cdot \sum_{m_1, n_1} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 1\right) m_1 - n_1} \cdot (n_1 + 1)^2$$

$$\cdot (\operatorname{Max}(\log x, n_1 + 1))^{3(\sigma - \omega - 1)}$$

$$\leqq c'' \cdot \log^{3(\sigma-\omega)-1} x \cdot x^{-\frac{\lambda - \omega}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \log^{3(\sigma - \omega - 1) + 2} x \cdot \sum_{m_1} 2^{-\left(\frac{r_1}{2} - 2\right) m_1}$$

$$\leqq c'' \cdot x^{-\frac{1}{2} - \frac{\lambda - \omega}{2}} \log^{6(\sigma - \omega) - 1} x.$$

Weiter ist

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 1\right) m_j - n_j} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2 \leqq c'' \log^4 x \cdot x^{-\frac{1}{2}} \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{-\frac{1}{2}} \log^5 x \quad \text{für} \quad \sigma - \omega < j \leqq \tau;$$

$$\sum_{m_j, n_j} 2^{m_j + \left(\frac{r_j}{2} - 1\right) n_j} (m_j + 1)^2 (n_j + 1)^2$$

$$\leqq c'' \log^4 x \cdot x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \sum_{m_j} 2^{-\left(\frac{r_j}{2} - 2\right) m_j}$$

$$\leqq c'' x^{\frac{r_j}{4} - \frac{1}{2}} \log^5 x \quad \text{für} \quad \tau < j \leqq \sigma.$$

Die Summation über die Oberklasse „τ“ ergibt also zusammen

$$O\left(z^{1+\lambda}\cdot\log^{4}x\cdot x^{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}}\cdot\prod_{j=1}^{\tau}x^{\frac{r_j}{2}}\cdot\prod_{j=\tau+1}^{\sigma}x^{\frac{r_j}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda-\omega}{2}}\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{\sigma-\omega<j\leqq\sigma}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\prod_{j=\tau+1}^{\sigma}x^{\frac{r_j}{4}}\cdot\log^{6\sigma}x\right)=O\left(z^{1+\lambda}x^{\frac{r}{2}-1-\lambda}\log^{6\sigma+4}x\right),$$

wieder im Einklang mit (44).

Damit ist also Hilfssatz 5 bewiesen.

§ 5.

Beweis des Satzes 3.

Es sei $\sigma\geqq 2$, σ ganz; $\beta_j>0$ $(j=2,3,\ldots,\sigma)$; $\alpha>0$. Wir wollen sagen, daß das System $(\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_\sigma)$ die Approximation $x^{-\alpha}$ zuläßt, wenn es zu jedem $C>0$ ein System von ganzen Zahlen $p_2,p_3,\ldots,p_\sigma,q$ mit

$$q>C,\quad\left|\beta_j-\frac{p_j}{q}\right|<\frac{1}{q^{\alpha}}\qquad(j=2,3,\ldots,\sigma)$$

gibt.

Hilfssatz 6. *Es sei*

$$\alpha>1,\quad Q(u)=\sum_{j=1}^{\sigma}\beta_j(u_{1,j}^2+u_{2,j}^2+\ldots+u_{r_j,j}^2)$$

(σ *ganz*, $\sigma\geqq 2$, r_j *ganz*, $r_j\geqq 4$ $(j=1,2,\ldots,\sigma)$, $r=r_1+r_2+\ldots+r_\sigma$, $\beta_1=1$, $\beta_j>0$ $(j=2,3,\ldots,\sigma)$). *Wenn das System* $(\beta_2,\beta_3,\ldots,\beta_\sigma)$ *die Approximation* $x^{-\alpha}$ *zuläßt, so ist*

$$\mathsf{P}_Q(x)=\Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}\right).$$

Beweis: Es sei $b=\operatorname{Max}_{1\leqq j\leqq\sigma}\beta_j^{-1}$; es sei $C>0$. Dann gibt es ein System von ganzen Zahlen $p_2,p_3,\ldots,p_\sigma,q$, so daß

$$q>C,\quad\frac{1}{3b}q^{\alpha}>3,\quad\left|\beta_j-\frac{p_j}{q}\right|<\frac{1}{q^{\alpha}}\quad(j=2,3,\ldots,\sigma).$$

Wir setzen

$$\overline{Q}(u)=u_{1,1}^2+u_{2,1}^2+\ldots+u_{r_1,1}^2+\sum_{j=2}^{\sigma}\frac{p_j}{q}(u_{1,j}^2+u_{2,j}^2+\ldots+u_{r_j,j}^2).$$

Dann ist stets

$$|Q(u) - \overline{Q}(u)| \leqq \frac{b\,Q(u)}{q^\alpha}. \tag{45}$$

Wir setzen nun $l = \left[\frac{1}{3b} q^\alpha\right] - 2$ (also l ganz, $l > 0$).

Wenn

$$\frac{l+\frac{1}{3}}{q} \leqq Q(u) \leqq \frac{l+\frac{2}{3}}{q}, \tag{46}$$

so ist nach (45)

$$\frac{l}{q} < \frac{l+\frac{1}{3}}{q} - b\frac{l+1}{q^{1+\alpha}} < \overline{Q}(u) < \frac{l+\frac{2}{3}}{q} + b\frac{l+1}{q^{1+\alpha}} < \frac{l+1}{q}. \tag{47}$$

Für jeden Gitterpunkt (d. h. für ganze $u_{j,k}$) ist $\overline{Q}(u)$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von $\frac{1}{q}$. Nach (47) können daher im Bereich (46) keine Gitterpunkte liegen. Also ist $A_Q(x)$ konstant im Intervall

$$\frac{l+\frac{1}{3}}{q} \leqq x \leqq \frac{l+\frac{2}{3}}{q};$$

in diesem Intervall ist also nach der Definition von $\mathsf{P}_Q(x)$ [25])

$$\frac{d\,\mathsf{P}_Q(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\beta_2^{r_2}\dots\beta_\sigma^{r_\sigma}}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right) < -c'''\left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1};$$

also ist

$$\mathsf{P}_Q\left(\frac{l+\frac{2}{3}}{q}\right) - \mathsf{P}_Q\left(\frac{l+\frac{1}{3}}{q}\right) < -c''' \cdot \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1};$$

entweder für $\xi = \frac{l+\frac{1}{3}}{q}$ oder für $\xi = \frac{l+\frac{2}{3}}{q}$ ist also

$$|\mathsf{P}_Q(\xi)| > c''' \cdot \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{l}{q}\right)^{\frac{r}{2}-1} > c'''\,\xi^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}$$

(man beachte

$$c''' q^\alpha < l < c''' q^\alpha, \quad c''' \frac{l}{q} < \xi < c''' \frac{l}{q},$$

---

[25]) Mit c''' bezeichne ich unterschiedslos positive Zahlen, die nur von σ, r_j $(j = 1, 2, \dots, \sigma)$, β_j $(j = 2, 3, \dots, \sigma)$, α abhängen.

also

$$\frac{l}{q} > c''' q^{\alpha-1}, \quad \frac{1}{q} > c''' \left(\frac{l}{q}\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}} > c''' \xi^{-\frac{1}{\alpha-1}}\Big).$$

Wegen $\alpha > 1$ ist $\xi > \frac{l}{q} > c''' q^{\alpha-1} \to \infty$ für $q \to \infty$, also für $C \to \infty$; also ist in der Tat

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}\right),$$

w. z. b. w.

Beweis des Satzes 3. Es sei $\sigma \geqq 2$, σ ganz, $r_j \geqq 4$, r_j ganz $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$. Es sei $0 < \lambda < \sigma - 1$; wir setzen $\alpha = \frac{\sigma}{\lambda}$ $\left(\text{also } \alpha > 1 + \frac{1}{\sigma-1},\ \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\lambda}{\sigma-\lambda}\right)$.

Es sei $R_{\sigma-1}$ der $(\sigma-1)$-dimensionale cartesische Raum der Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$; $M(x^{-\alpha}; \sigma-1)$ sei die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ mit $1 \leqq \beta_j < 2$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, welche die Approximation $x^{-\alpha}$ zulassen (statt zu sagen, daß das System $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ die Approximation $x^{-\alpha}$ zuläßt, sage ich auch, daß der Punkt $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ die Approximation $x^{-\alpha}$ zuläßt). Nach S. D. A., Satz 1 ist

$$L\left(M(x^{-\alpha}; \sigma-1); x^{\frac{\sigma}{\alpha}}\right) = \infty,$$

d. h.

$$L(M(x^{-\alpha}; \sigma-1); x^{\lambda}) = \infty \quad [26]). \tag{48}$$

Wenn aber ein Punkt $(\beta_2, \ldots, \beta_\sigma)$ in $M(x^{-\alpha}; \sigma-1)$ liegt, so ist nach Hilfssatz 6 für die zugehörige Form $Q(u)$

$$\mathsf{P}_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right);$$

also ist

$$M(x^{-\alpha}; \sigma-1) \subset E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right),$$

also nach (48) auch

$$L\left(E\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{\lambda}{\sigma-\lambda}}\right); x^{\lambda}\right) = \infty,$$

w. z. b. w.

---

[26]) In S. D. A., Satz 1 wurde $M(x^{-\alpha}; \sigma-1)$ als die Menge derjenigen Punkte $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ definiert, welche die Approximation $x^{-\alpha}$ zulassen und den Ungleichungen $0 \leqq \beta_j < 1$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ genügen. Die Translation $\beta_j' = \beta_j + 1$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ ändert aber weder die betreffende Approximationseigenschaft noch den Wert von $L(M(x^{-\alpha}; \sigma-1); x^{\lambda})$.

§ 6.

Beweis der Sätze I, II, VIII.

Beweis des Satzes I. Wir sollen für die Form (1) (mit $r \geqq 5$) die Abschätzung

$$\mathsf{P}_Q(x) = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

beweisen. Wenn wir im Hilfssatz 1 $n = 1$, $z = 1$ setzen, sehen wir, daß es genügt, die Abschätzung

$$\int_{\frac{1}{x}+t\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+t\infty} \prod_{j=1}^{r} \Theta(\alpha_j s)\, e^{x s}\,(e^{\pm s}-1)\frac{d s}{s^2} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

zu beweisen $\left(B = \max_{1 \leqq j \leqq r} \frac{2\pi}{\alpha_j}\right)$. Für $a_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ist

$$\sqrt[r]{a_1 a_2 \ldots a_r} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_r}{r};$$

es genügt also, wenn wir für jedes j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ die Abschätzung [27])

$$K_j = \int_{\frac{1}{x}+t\frac{B}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{x}+t\infty} |\Theta^r(\alpha_j s)\cdot(e^{\pm s}-1)|\,\frac{|d s|}{|s^2|} = O\left(x^{\frac{r}{2}-1}\right)$$

beweisen. Die Vereinigungsmenge aller Intervalle $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$ überdeckt (bei festem j) das ganze Intervall $\left(\frac{B}{\sqrt{x}}, +\infty\right)$ (vgl. § 4); also ist (man beachte (12), (13)) für $x > c$

$$K_j \leqq c \sum_{h,k} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} |\Theta^r(\alpha_j s)|\cdot \operatorname{Min}(1,t)\,\frac{d t}{t^2} \qquad \left(s = \frac{1}{x} + t i\right);$$

der Summationsbereich ist dabei durch

$$h > 0, \quad 0 < k \leqq \sqrt{x}, \quad (h,k) = 1$$

gegeben.

Es sei nun t eine Zahl des Intervalls $\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}$; dann ist erstens nach (31)

$$\left| t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right| \leqq \frac{2\pi}{\alpha_j k\sqrt{x}},$$

---

[27]) Man beachte $|e^{x s}| = e$.

also (wegen $h \geqq 1$)

$$c\frac{h}{k} < t < c\frac{h}{k}$$

für $x > c$; zweitens ist für $x > c$, $s = \frac{1}{x} + ti$ [28])

$$|\Theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2}};$$

also ist

$$K_j \leqq c \sum_{h,k} \mathrm{Min}\left(1, \frac{h}{k}\right) \cdot \frac{k^2}{h^2} \int_{\frac{2\pi}{\alpha_j}\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{dt}{k^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{x^2} + \left(t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right)^2\right)^{\frac{r}{4}}}$$ [29])

$$\leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{h,k} \mathrm{Min}\left(1, \frac{h}{k}\right) \frac{1}{h^2 k^{\frac{r}{2}-2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{r}{4}}}$$

$$\leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1} \sum_{k} \frac{\log k}{k^{\frac{r}{2}-1}} \leqq c\, x^{\frac{r}{2}-1},$$

w. z. b. w.

Beweis des Satzes II. In der Form (1) seien alle α_j ganzzahlige Vielfache einer und derselben Zahl $\alpha > 0$. Für ganzzahlige u_j ist dann $Q(u)$ gleich einem ganzzahligen Vielfachen von α. Wenn also l ganz, $l > 0$, so liegen im Gebiet $l\alpha < Q(u) < (l+1)\alpha$ keine Gitterpunkte, also ist $A_Q(x)$ konstant im Intervall $l\alpha < x < (l+1)\alpha$. In diesem Intervall ist also

$$\frac{d\,\mathsf{P}_Q(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi^{\frac{r}{2}} x^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)}\right) < -c\,(\alpha l)^{\frac{r}{2}-1};$$

nach dem Mittelwertsatz ist also

$$\mathsf{P}_Q\left(\left(l+\frac{2}{3}\right)\alpha\right) - \mathsf{P}_Q\left(\left(l+\frac{1}{3}\right)\alpha\right) < -c\,\alpha\,(\alpha l)^{\frac{r}{2}-1};$$

entweder für $\xi = \left(l+\frac{1}{3}\right)\alpha$ oder für $\xi = \left(l+\frac{2}{3}\right)\alpha$ ist also

$$|\mathsf{P}_Q(\xi)| > c\,\alpha\,(\alpha l)^{\frac{r}{2}-1} > c\,\alpha\,\xi^{\frac{r}{2}-1},$$

w. z. b. w.

---

[28]) Vgl. Gp I, Formel (13) (S. 708).

[29]) Substitution $t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k} = \frac{u}{x}$.

Beweis des Satzes VIII. Es seien ganze Zahlen $\sigma \geqq 2$, $r_j \geqq 4$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ gegeben; $Q(u)$ sei durch (2) gegeben; ohne Beschränkung der Allgemeinheit (wegen (3)) sei $\beta_1 = 1$. Das System $(\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\sigma)$ läßt bekanntlich die Approximation $x^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}}$ zu; nach dem Hilfssatz 6 (mit $\alpha = \frac{\sigma}{\sigma-1}$, also $\alpha - 1 = \frac{1}{\sigma-1}$) ist also

$$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-1-\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \Omega\left(x^{\frac{r}{2}-\sigma}\right),$$

w. z. b. w.

Prag, den 4. 1. 1933.

(Eingegangen am 5. Januar 1933.)

Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

J. Schauder in Lwów, z. Z. in Leipzig[1]).

Bei der Behandlung der Randwertaufgaben in der Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichungen ist es üblich, nach dem Verfahren von E. E. Levi[2]), zuerst eine Grundlösung oder eine Funktion mit ähnlichen Eigenschaften zu konstruieren. Vielfach gelangt dabei auch die Theorie der verallgemeinerten Potentiale (der einfachen Schicht, der doppelten Schicht und der Volumladung) zur Darstellung[3]). In der vorliegenden Arbeit will ich eine Methode entwickeln, die uns, ohne auf die Konstruktion der Grundlösung bzw. der Greenschen Funktionen zurückzugreifen, die Lösbarkeit der ersten Randwertaufgabe sichert. Dabei wird nur die Kenntnis der entsprechenden Sätze der speziellen Potentialtheorie vorausgesetzt[4]). Der Kern der Untersuchung besteht in der Gewinnung gewisser scharfen Abschätzungen für die Lösungen und ihre Derivierten[5]). Sie bilden das eigentliche Ziel und das Hauptresultat dieser Arbeit. Für die hier benutzte Methode ist es gerade wesentlich, daß man Ungleichheiten der Potentialtheorie zugrunde legt, die bereits auf *Teilmengen* des Randes

[1]) International Research Fellow.

[2]) E. E. Levi, Sulle equazione lineari totalmente ellitiche. Rend. d. Circ. mat. di Palermo **24** (1907), S. 275—317.

[3]) W. Sternberg, Über die lineare elliptische Differentialgleichung, Math. Zeitschr. **21** (1924), S. 286—311; G. Giraud, Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique, Bull. des Sc. Math. **56** (1932), S. 1—93; dort werden auch die früheren Arbeiten dieses Verfassers zitiert.

[4]) a) Ältere Literatur siehe den Enzyklopädieartikel von Herrn Lichtenstein über Potentialtheorie. b) Die in Betracht kommenden Ungleichheiten findet man für Gebiete der Klasse Ah und erste Ableitungen bei J. Schauder, Potentialtheoretische Untersuchungen I. Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 602—640, für zweite und höhere Ableitungen (Gebiete der Klasse Bh) bei O. D. Kellog, On the derivates of harmonic functions on the boundary, Trans. of the Math. Soc. **33** (1931), S. 486—510. An den erwähnten Stellen werden die Beweise im Raume durchgeführt, das Beweisverfahren bleibt auch im Falle $n = 2$ und $n > 3$ gültig.

[5]) Die in der Theorie der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen eine wesentliche Rolle spielen. Vgl. z. B. J. Schauder, Über das Dirichletsche Problem im Großen für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen, diese Zeitschrift **37** (1933), und eine demnächst erscheinende Arbeit von J. Leray und J. Schauder.

gelten, um zu Abschätzungen derselben Art bei elliptischen Differentialgleichungen zu gelangen[6]). Aus der Möglichkeit einer solchen Abschätzung a priori folgen dann leicht die Existenzsätze. Der in dieser Arbeit eingeschlagene Weg führt, wie ich am anderen Orte zeigen werde, auch dann zum Ziele, wenn die Koeffizienten $a_{i,k}$ der zweiten Ableitungen der Lösung lediglich stetig sind.

Ich erwähne zuletzt noch folgendes. Gewöhnlich wird die Diskussion der allgemeinen linearen elliptischen Differentialgleichung in der Weise erledigt, daß man von einer selbstanjungierten Differentialgleichung ausgehend vermittels der Greenschen Funktion eine Integralgleichung bildet. Ich fange mit der einfachen Gleichung $\sum_{i,k} a_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f$ an. Die Theorie der allgemeineren Differentialgleichung für einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiete ergibt sich dann in wenigen Schritten durch geeignete Anwendung eines Satzes des Herrn F. Riesz[7]) [8]).

Erstes Kapitel.

Vorbereitende Bemerkungen zu einigen Sätzen der Potentialtheorie.

Definitionen. 1. Es möge die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in dem n-dimensionalen Bereiche $\bar{G}$[9]) eine Hölderbedingung mit dem Exponenten $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ erfüllen, d. h. es gelte für alle Punktepaare P_1, P_2 aus $\bar{G}$: $|f(P_1) - f(P_2)| \leqq C r^{\alpha}_{P_1 P_2}$. Die kleinste von den, dieser Ungleichheit genügenden Zahlen C nennen wir die Hölderkonstante von f in $\bar{G}$ [in Zeichen $H^{G}_{\alpha}(f)$].

2. Besitzt die Funktion f im Bereiche G partielle Ableitungen bis zu m-ter Ordnung einschließlich und genügen die m-ten Ableitungen einer

---

[6]) Die in den Abschätzungen vorkommenden Konstanten habe ich immer mit $C(M)$ bezeichnet, doch lassen sich für $C(M)$ in Abhängigkeit von M leicht numerische Schranken gewinnen [siehe die Fußnoten [12]), [25]), [30]), [48]) usw.]. Die Gewinnung passender noch schärferer Schranken wäre für die Theorie der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen von fundamentaler Bedeutung.

[7]) Die Resultate dieser Arbeit habe ich in zwei C. R.-Noten zusammengefaßt: **195**, S. 1365 (27. XII. 1932) und **196**, S. 89 (9. I. 1933).

[8]) Alle Sätze dieser Arbeit gelten ohne weiteres für Systeme von elliptischen Differentialgleichungen von der Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} a^{(j)}_{ik} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{m=1}^{s} \sum_{r=1}^{n} b^{(j)}_{rm} \frac{\partial u_m}{\partial x_r} + \sum_{m=1}^{s} c^{(j)}_{m} u_m = f_j(x_1, \ldots, x_n),$$

für $j = 1, 2, \ldots, s$.

[9]) Bereich $\bar{G}$ = abgeschlossene Hülle des Gebietes G; G besteht nur aus inneren Punkten.

Hölderbedingung mit dem Exponenten $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, so wird f als m-mal α-H-stetig differentiierbar bezeichnet. Unter ihrer α, m-Norm in G verstehen wir den Ausdruck

$$(1)\qquad \|f\|^G_{\alpha,m} = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=0}^{i_1+i_2+\ldots+i_n=m} \frac{1}{i_1!\,i_2!\ldots i_n!}\left[\operatorname*{Max}_G\left|\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1}\,\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\right| + H^G_\alpha\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1}\,\partial x_2^{i_2}\ldots\partial x_n^{i_n}}\right)\right]^{10}).$$

Ähnliche Definitionen und Bezeichnungen führt man auch dann ein, wenn es sich um Funktionen $f(\sigma)$ handelt, die auf gewissen im Raume der Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$ eingebetteten Mannigfaltigkeiten S erklärt sind (σ ein Punkt der Mannigfaltigkeit S).

Es ist nützlich, diejenigen Sätze aus der Potentialtheorie zusammenzustellen, von denen im folgenden wiederholt Gebrauch gemacht wird. Wir knüpfen daran einige fast selbstverständliche, ihren Inhalt aber erweiternde Bemerkungen.

Satz A. Es sei K eine n-dimensionale Vollkugel im n-dimensionalen Raume, und es seien φ die stetigen[11]) Randwerte der in K vorgegebenen Potentialfunktion v. Man bezeichne mit $d(P) > 0$ die Entfernung eines beliebigen Punktes P im Innern der Kugel von ihrem Rande. Es gibt dann eine absolute Konstante C, so daß die Abschätzung

$$(2)\qquad |v(P)| + |D_1 v(P)| + |D_2 v(P)| + |D_3 v(P)| \leqq \frac{C}{(d(P))^3}\operatorname{Max}|\varphi|,$$

($D_i f$ Ableitung i-ter Ordnung)

gilt: C ist eine absolute Konstante, sie hängt vom Radius der Kugel K nicht ab. Man überzeugt sich davon leicht durch eine Ähnlichkeitstransformation. Aus dem Vorhergehenden folgt übrigens sofort, daß (2) für beliebige *beschränkte* Gebiete gilt.

Satz A'. Sei $\overline{G}$ ein beschränkter n-dimensionaler Bereich, u eine Lösung in G der elliptischen Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten

$$(3)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} a^0_{i,k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0;\quad \operatorname{Diskrim}(a^0_{i,k}) = 1;\quad |a^0_{i,k}| \leqq M.$$

---

[10]) Es ist $\|f\|^G_{\alpha,m} = \|f\|^{\overline{G}}_{\alpha,m}$. Für $H^G_\alpha(f)$ benutzen wir auch die Abkürzungen $H_\alpha(f)$, $H^G(f)$.

[11]) Ich verstehe darunter immer auch den stetigen Anschluß an den Rand.

Mit φ bezeichnen wir wieder die stetigen[11]) Randwerte von u. Es gibt dann eine Konstante $C(M)$, so daß für jeden im Innern gelegenen Punkt die Abschätzung

$$(4) \qquad |u(P)| + |D_1 u(P)| + |D_2 u(P)| + |D_3 u(P)| \leqq \frac{(CM)}{d(P)^3} \operatorname{Max} |\varphi|$$

gilt[12]).

Beweis. Da die Diskriminante $(a^0_{i,k}) = 1$ und $|a^0_{i,k}| \leqq M$ ist, so liegen die Wurzeln der Eigenwerte λ_i der Matrix $(a^0_{i,k})$ zwischen zwei nur von M abhängigen positiven Zahlen $k(M)$, $k'(M)$

$$(5) \qquad 0 < k(M) \leqq \sqrt{\lambda_i} \leqq k'(M).$$

Für diejenige lineare Koordinatentransformation $X_j = X_j(x_1, \ldots, x_n)$, welche die Gleichung (3) in $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial X_j^2} = 0$ überführt, gilt also [unter $w(M)$, $w'(M)$ zwei neue positive Konstanten verstanden]

$$(6) \qquad 0 < w'(M) < \frac{R_{12}}{r_{12}} < w(M);$$

r_{12} bzw. R_{12} sind die Entfernungen zweier Punkte im x-Raume, bzw. ihrer Bildpunkte im X-Raume. Beschränkte Gebiete gehen also in beschränkte Gebiete über und da die Richtigkeit der Abschätzung wegen (2) bereits für den X-Raum feststeht, so folgert man daraus (4) durch Anwendung von (6).

Satz B[13]). Es sei K_r eine Kugel vom Radius r und v_r die an ihrem Rande verschwindende Lösung der Poissonschen Differentialgleichung

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 v_r}{\partial X_j^2} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

mit α-H-stetigem f. Dann ist

$$(8) \qquad \| v_r \|^{K_r}_{\alpha, 2} \leqq C(r) \| f \|^{K_r}_{\alpha},$$

wobei $C(r)$ nur von r abhängt. Es gilt auch, wie man sich durch eine Ähnlichkeitstransformation sofort überzeugt, der folgende

---

[12]) a) Daraus folgt sofort für jeden um δ vom Rande des Gebietes G entfernten Bereich B

$$\| u \|^{B}_{\alpha, 2} \leqq \frac{C(M)}{\delta^{2+\alpha}} \operatorname{Max} |\varphi|.$$

b) Ich brauche kaum zu bemerken, daß $C(M)$ explizite abgeschätzt werden kann. c) Die Schreibweise $C(M)$ soll uns an die Abhängigkeit von M erinnern. Dasselbe gilt für andere Formeln. Ich habe von einer Numerierung der Konstanten abgesehen und alle mit demselben Symbol C bzw. $C(M)$, $C(G)$ usw. bezeichnet.

[13]) Siehe Enc. d. Math. Wiss. II, C 3, insbesondere S. 286—287.

Zusatz zum Satze B. Es bestehen die genaueren Abschätzungen

$$\|v_r\|^{K_r}_{\alpha,2} \leqq C(1)\Big[\frac{1}{r^\alpha}\operatorname*{Max}_{K_r}|f| + H^{K_r}_\alpha(f)\Big],$$

$$\operatorname*{Max}_{K_r}|v_r| + \operatorname*{Max}_{K_r}|D_1 v_r| + \operatorname*{Max}_{K_r}|D_2 v_r| \leqq C(1)\|f\|^{K_r}_\alpha,$$

wobei die der Kugel vom Radius 1 entsprechende Konstante mit $C(1)$ bezeichnet wurde.

Satz B'. Wir betrachten die elliptische Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten

$$(10)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} a^0_{i,k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = f(x_1, \ldots, x_n);\quad |a^0_{i,k}| \leqq M,\ \text{Diskrim}\,(a^0_{i,k}) = 1.$$

Sie geht, wie bereits anläßlich der homogenen Differentialgleichung (3) gesagt wurde, durch eine lineare Koordinatentransformation $X_j = X_j(x_1, \ldots, x_n)$ in $\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial X_i^2} = \bar{f}$ über. Wir fassen im x-Raume dasjenige „Fundamentalellipsoid" E ins Auge, welches durch die erwähnte Transformation in die Einheitskugel im X-Raume übergeht. In E betrachten wir die auf dem Rande verschwindende Lösung u von (10). Nach der Transformation gilt für $u(X)$ die Abschätzung (8), also wegen (6) für $u(x)$ die Abschätzung

$$\|u\|^E_{\alpha,2} \leqq C(M)\|f\|^{E\ 12b)}_\alpha$$

Zusatz zum Satze B'. Es sei E_λ das aus dem Fundamentalellipsoid durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Verhältnis λ entstandene Ellipsoid. Für die am Rande von E_λ verschwindende Lösung u von (10) gilt

$$(11)\qquad \|u\|^{E_\lambda}_{\alpha,2} \leqq C(M)\Big[\frac{1}{\delta_\lambda^\alpha}\operatorname*{Max}_{E_\lambda}|f| + H^{E_\lambda}_\alpha(f)\Big]^{12b)},$$

wo δ_λ der Durchmesser von E_λ ist.

Satz C[19]). Voraussetzungen: Es möge G ein beliebiges beschränktes Kontinuum (zusammenhängendes Gebiet) bezeichnen, dessen Rand $\mathfrak{R}$ ein Flächenstück S der Klasse Bh enthält. Die Randwerte φ der Lösung v von $\sum_j \frac{\partial^2 v}{\partial X_j^2} = 0$ sollen auf $\mathfrak{R}$ stetig und speziell auf S zweimal α-H-stetig differentiierbar sein.

Behauptung[14]). Jedem ganz im „Innern“[15]) von S gelegenen Teilflächenstück S' und jeder ganz in G gelegenen „Halbumgebung“ U[16]) von S' entspricht eine Konstante $C(S, S', G, U)$ [lies C ist eine Funktion von S, S', G, U], so daß

$$\|v\|^{U}_{\alpha,2} \leqq C\,(\|\varphi\|^{S}_{\alpha,2} + \operatorname*{Max}_{\mathfrak{R}} |\varphi|) \tag{12}$$

gilt.

Satz C'[19]). Es sei g ein beschränktes Kontinuum, dessen Rand $\mathfrak{r}$ eine $(n-1)$-dimensionale *lineare* Mannigfaltigkeit (ebenes Flächenstück) s enthält. Die Randwerte φ der Lösung u von (3) sind auf $\mathfrak{r}$ stetig und speziell auf s zweimal α-H-stetig differentiierbar.

Behauptung. Für jedes s', das ganz im Innern von s gelegen ist, und entsprechende Halbumgebungen[16]) U von s' gibt es eine Konstante $C(M)$, so daß für Lösungen von (3)

$$\|u\|^{U}_{\alpha,2} \leqq C(M)\,(\|\varphi\|^{s}_{\alpha,2} + \operatorname*{Max}_{\mathfrak{r}} |\varphi|) \tag{13}$$

gilt.

Beweis. Daß auch für Lösungen von (3) die Abschätzung (12) besteht, ist klar. Man überzeugt sich davon durch eine Koordinatentransformation und Anwendung des Satzes C. Es bleibt nur zu zeigen, daß für alle Matrizen A mit $|a^0_{i,k}| \leqq M$, Diskriminante $(a^0_{i,k}) = 1$ dasselbe C genommen werden kann. Durch die lineare Koordinatentransformation $X_j = X_j(x)$[17]) geht g in G_A, s in ein *ebenes* Flächenstück S_A über, wobei wegen (6) das Verhältnis der Dimensionen nach unten und oben beschränkt bleibt. Hieraus folgert man nun leicht (13). Sei nämlich p ein Punkt des Flächenstückes s, P_A sein Bildpunkt. Man bringe im X-Raume durch eine Verschiebung alle G_A zur teilweisen Deckung, so daß die Punkte P_A zusammenfallen und natürlich auch gewisse Teile von S_A. Dann gibt es wegen (6) eine Halbumgebung O von P_A, welche zu allen G_A gehört. Ihre durch die inversen Transformationen $x = X^{-1}(O)$ entworfenen Bilder besitzen wieder wegen (6) eine gemeinsame Teilumgebung o von p, in welcher dann (13) besteht. So kann man mit jedem Punkte p von s verfahren.

Satz D[19]). Die Voraussetzungen betreffend G und seinen Rand sind dieselben, wie beim Satz C'.

---

[14]) Vgl. Kellog, loc. cit. 4b) Theorem VI, S. 508.

[15]) Dies bedeutet, daß S' ein $(n-1)$-dimensionales Teilgebiet von S ist, das mit dem $(n-2)$-dimensionalen Rande von S keinen Punkt gemeinsam hat. Diesen Sachverhalt werden wir immer durch das Anführungszeichen „ “ kennzeichnen.

[16]) Diese Relativumgebung ist als abgeschlossen zu denken. Ist $\mathfrak{R}$ der Rand des ganzen Gebietes, so soll $\overline{U}$ von $\mathfrak{R} - S$ eine positive Entfernung besitzen.

[17]) Sie hängen von den Matrizen A ab.

Jetzt handelt es sich aber um die am ganzen Rande von G verschwindende Lösung v von (7); dabei ist f in G überdies α-H-stetig. Dann gilt für $S' \subset S$ und Halbumgebungen U von S' [15])

$$\|v\|^{U}_{\alpha,2} \leqq C \|f\|^{G}_{\alpha}. \tag{14}$$

Beweis: Für G der Klasse Bh reduziert sich der Satz D auf den Satz B, welcher bekanntlich für beliebige Gebiete der Klasse Bh gilt. Allgemein verfährt man folgendermaßen: Man nimmt irgendeine geschlossene Fläche σ vom Typus Bh, die ganz in $\bar{G}$ liegt und die vorgegebene Halbumgebung U von S' im Innern enthält. Sie muß sich also an S anschmiegen. Man wählt weiter σ so, daß die Menge S^* der „Anschmiegungspunkte" das Teilflächenstück S' ganz in ihrem „Innern" enthält. Bezeichnen wir mit τ das Innere von σ, so ist, da $\bar{U} \subset \tau + \sigma$ und für $\tau + \sigma$ die Abschätzung (8) besteht, für die am Rande von τ, d. h. in σ verschwindende Lösung v_1 von (7)

$$\|v_1\|^{U}_{\alpha,2} \leqq \|v_1\|^{\tau+\sigma}_{\alpha,2} \leqq C \|f\|^{G}_{\alpha,2}.$$

Es bleibt noch die Abschätzung der Differenz $v - v_1$ in U übrig; $v - v_1$ ist eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung in U, somit gilt nach Satz C, Formel (12), da auf S^* $v - v_1 \equiv 0$ ist,

$$\|v - v_1\|^{U}_{\alpha,2} \leqq C \operatorname*{Max}_{\tau+\sigma} |v - v_1| \leqq C \left(\operatorname*{Max}_{G} |v| + \operatorname*{Max}_{\tau+\sigma} |v_1|\right).$$

Nun läßt sich bekanntlich $\operatorname{Max}|v|$ und $\operatorname{Max}|v_1|$, die beide an entsprechenden Rändern verschwindende Lösungen der Poissonschen Gleichung darstellen, durch $\operatorname{Max}|f|$ abschätzen [18]). Dies alles zusammenfassend, erhält man die verlangte Relation (14).

Satz D' [19]). Seine Voraussetzungen unterscheiden sich von denen des Satzes D nur darin, daß statt (7) die Gleichung (10) betrachtet wird. Verschwindet u am Rande, so gilt

$$\|u\|^{U}_{\alpha,2} \leqq C(M) \|f\|^{G}_{\alpha}. \tag{15}$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie bei Satz C'.

Zweites Kapitel.

Abschätzung der Lösung im Innern.

Wir beginnen mit zwei einfachen Hilfssätzen.

Hilfssatz I. Wir betrachten zwei n-dimensionale Quader W_1, W_2 mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen und setzen voraus, daß diese *genau* eine $n-1$-dimensionale Wand *gemeinsam* haben. Es soll weiter die in $W_1 + W_2$ definierte und dort stetige Funktion f in jedem

[18]) Siehe Enc. d. Math. Wiss. II, C 3, insb. S. 286.

[19]) Er wird erst im Kapitel III benutzt.

W_i, einzeln genommen, α-H-stetig sein. Dann ist sie auch in $W_1 + W_2$ α-H-stetig und es ist

$$\|f\|_\alpha^{W_1 + W_2} \leqq \|f\|_\alpha^{W_1} + \|f\|_\alpha^{W_2}.$$

Hilfssatz II. Es sei W_0 ein n-dimensionaler Würfel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Seiten. Sein Mittelpunkt möge P_0, die Kantenlänge a heißen. Mit W bezeichnen wir einen anderen, ebenfalls um P_0 als Mittelpunkt achsenparallel gebildeten Würfel, dessen Kantenlänge gleich μa ($\mu > 1$) ist. Es sei weiter jedem Punkte P, der α) am Rande von W_0 oder β) in $W - W_0$ liegt, ein Würfel W_P um P als Mittelpunkt mit achsenparallelen Seiten und von der Kantenlänge νa ($0 < \nu < 1$) zugeordnet. Die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ soll in $W_0 + \sum_P W_P$, wobei die Summation sich über alle den Bedingungen α), β) genügende Punkte P erstreckt, erklärt und stetig sein und in jedem Würfel einzeln sich α-H-stetig verhalten. Dann ist f auch in $W_0 + \sum_P W_P$ α-H-stetig und es gilt, falls $\|f\|_\alpha^{W_0} \leqq \varrho$ und $\|f\|_\alpha^{W_P} \leqq \varrho$ für jedes P, die genauere Abschätzung

$$\|f\|_\alpha^{W_0 + \sum_P W_P} \leqq C(\mu, \nu, n)\,\varrho; \tag{16}$$

dabei hängt C nicht von a ab. Die Konstante C kann leicht numerisch abgeschätzt werden.

Beweis. Auch dieser Hilfssatz ist geometrisch vollkommen evident. Ich will, um das Prinzip besser hervortreten zu lassen, mich auf den zweidimensionalen Fall beschränken. Die Übertragung auf höhere Dimensionen bietet nicht die geringste Schwierigkeit. Die Summe $W' = W_0 + \sum_P W_P$ bildet wieder ein Quadrat mit P_0 als Mittelpunkt. Seine Kantenlänge beträgt $\mu a + \nu a = (\mu + \nu) a$. Nun teilen wir durch achsenparallele Schnitte W' in kongruente Teilquadrate Q_j von der Kantenlänge a/s (s eine ganze Zahl) ein. Eventuell können dabei auch Teilrechtecke vorkommen. Die Einteilung soll so vorgenommen werden, daß 1. das Quadrat W_0 aus einer vollen Anzahl der Teilquadrate Q_j besteht, 2. jedes Q_j, das zu $W - W_0$ gehört, eine Teilmenge von irgendeinem W_P ist. Man überzeugt sich leicht, daß *s unabhängig von der Kantenlänge a gewählt werden kann.* In jedem Q_j ist also nach Voraussetzung $\|f\|_\alpha^{Q_j} \leqq \varrho$. Wir beginnen mit dem links oben stehenden Q_{j_1} und betrachten das rechts an ihn grenzende Q_{j_2}; Q_{j_1} und Q_{j_2} haben genau eine Seite gemeinsam, also gilt wegen des Hilfssatzes I

$$\|f\|_\alpha^{Q_{j_1} + Q_{j_2}} \leqq \|f\|_\alpha^{Q_{j_1}} + \|f\|_\alpha^{Q_{j_2}} \leqq 2\varrho.$$

An das Rechteck $Q_{j_1} + Q_{j_2}$ grenzt rechts Q_{j_3}. Der Hilfssatz I liefert $\|f\|_\alpha^{Q_{j_1}+Q_{j_2}+Q_{j_3}} \leqq 3\varrho$. So fortfahrend gelangen wir in der obersten Schicht zu der Abschätzung $\|f\|_\alpha^{Q_{j_1}+Q_{j_2}+\cdots} \leqq (\mu+\nu)s\varrho$. Dasselbe gilt in den anderen Schichten. Nun ist jede der Schichten wieder ein Rechteck und die weitere sukzessive Anwendung des Hilfssatzes I liefert das Endergebnis (16).

Im Falle $n > 2$ teilt man wieder $W_0 + \sum_P W_P$ durch achsenparallele Schnitte in Teilwürfel ein, faßt sie zu Schichten zusammen und wendet jedesmal den Hilfssatz I an.

Satz 1. Voraussetzungen. *Es sei G ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten die Lösung u der linearen, elliptischen Differentialgleichung*

$$(17)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f(x_1, \ldots, x_n); \qquad \textit{Diskrim}\ (a_{i,k}) = 1.$$

Die Koeffizienten $a_{i,k}$ sollen im abgeschlossenen $\bar{G}$ $(\alpha+\varepsilon)$-H-stetig sein, wobei genauer

$$(18)\qquad \|a_{i,k}\|_{\alpha+\varepsilon}^{G} \leqq M, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \varepsilon > 0$$

gilt. Das freie Glied f sei auch in G α-H-stetig, d. h. $\|f\|_\alpha^G < \infty$. Die Lösung u selbst soll in G beschränkt und zweimal α-H-stetig differentiierbar sein[9]).

Behauptung. *Es gibt eine positive Konstante $C(M)$, so daß in jedem ganz im Innern von G gelegenen Bereiche B die Abschätzung*

$$(19)\qquad \|u\|_{\alpha,2}^{B} \leqq \frac{C(M)}{\delta^4}\left(\|f\|_\alpha^G + \operatorname*{Max}_G |u|\right)\ ^{20}),\ ^{12\,b})$$

besteht. Dabei wird mit δ die Entfernung des Bereiches B vom Rande des Gebietes G bezeichnet.

Beweis. Wir setzen vorläufig noch zusätzlich voraus, daß die vorgegebene Lösung auch am Rande des Gebietes zweimal α-H-stetig differentiierbar ist. Wir definieren die Funktion $w(P, \lambda)$, wobei P einen Punkt des Gebietes G, und λ eine vorläufig beliebige Zahl $(0 < \lambda < 1)$ bezeichnen. Sei $d(P)$ die Entfernung des Punktes P vom Rande des Gebietes G. Um P als Mittelpunkt konstruieren wir achsenparallel den

---

[20]) a) Wendet man die Abschätzung der Fußnote [12a]) statt der Formel (4) an, so läßt sich der im Nenner vorkommende Exponent erniedrigen. b) Der Satz gilt auch für nicht beschränkte Gebiete, wenn die Koeffizienten a_{ik} im Unendlichen gewisse Regularitätsforderungen erfüllen. c) Es dürfen auch, wie es aus dem Beweisgang hervorgeht, die „Normen" der Koeffizienten $a_{i,k}$ nur in jedem im Innern von G gelegenen Bereiche beschränkt bleiben und bei der Annäherung an den Rand unendlich von bestimmter Ordnung werden.

Würfel $W(P, \lambda)$ [21]) von der Kantenlänge $a_P = \frac{2\lambda d(P)}{\sqrt{n}}$. Alle Punkte des Würfels $W(P, \lambda)$ liegen, wie man sofort einsieht, innerhalb von G [21 b]). Wir definieren nun

$$w(P, \lambda) = \|u\|_{\alpha, 2}^{W(P,\lambda)} \cdot d^3(P), \quad \text{falls} \quad P \varepsilon G; \tag{20}$$

$w(P, \lambda)$ ist im allgemeinen keine stetige Funktion. Es sei $N(\lambda)$ ihre obere Grenze bei konstantem λ und veränderlichem P; $N(\lambda)$ ist auf jeden Fall positiv und es gibt einen Punkt $P_0 = P_0(\lambda)$ im *Innern* von G, so daß

$$w(P_0, \lambda) \geqq \frac{N(\lambda)}{2} > 0 \tag{21}$$

ist. Den dem Punkte P_0 entsprechenden Würfel $W(P_0, \lambda)$ bezeichnen wir kurz mit W_0.

Ich erinnere jetzt an die im ersten Kapitel gegebene Definition des Fundamentalellipsoids E [22 a]). Wir bilden es speziell für die Matrix $a_{i,k}^0 = a_{i,k}(P_0)$ und betrachten um P_0 als Mittelpunkt das Ellipsoid $E_{2\lambda d(P_0) k' M}$ [22 b]); $k'(M)$ kommt in (5) vor. Die Hauptachsen dieses Ellipsoids sind wegen (5) gewiß $> 2\lambda d(P_0)$ und $< 2\lambda d(P_0) \frac{k'(M)}{k(M)}$; $E_{2\lambda d(P_0) k'(M)}$ enthält also W_0 ganz in seinem Innern und die Entfernung W_0 vom Rande dieses Ellipsoids ist $> \lambda d(P_0)$. Anderseits ist $E_{2\lambda d(P_0) k'(M)}$ in jedem Würfel enthalten, dessen halbe Kantenlänge $> 2\lambda d(P_0) \frac{k'(M)}{k(M)}$ ist. Wir betrachten nun den Würfel W um P_0, dessen Kantenlänge a genau [23])

$$a = \frac{6\lambda d(P_0) k'(M)}{k(M)} = \frac{3\sqrt{n} k'(M)}{k(M)} a_{P_0} = \mu a_{P_0}; \quad \left(\mu = \frac{3\sqrt{n} k'(M)}{k(M)} > 1\right)$$

beträgt. Es sei P α) ein Punkt am Rande von W_0, oder β) ein Punkt von $W - W_0$ [24]). Wir wollen seine Entfernung $d(P)$ vom Rande des Gebietes G nach unten abschätzen,

$$d(P) \geqq d(P_0) - r_{PP_0} \geqq d(P_0 \left[1 - 3\sqrt{n}\lambda \frac{k'(M)}{k(M)}\right].$$

---

[21]) a) $w(P, \lambda)$ ist eine Funktion, $W(P, \lambda)$ ein Würfel. b) Der halbe Durchmesser von $W(P, \lambda)$ beträgt $\lambda d(P)$.

[22]) a) S. 261, Zeile 11—13 von oben. b) S. 261, Zeile 18—20 von oben. Aus dieser Bezeichnung ersieht man sofort, daß P_0 der Mittelpunkt von $E_{2\lambda d(P_0) k'(M)}$ ist und daß dieses $2\lambda d(P_0) k'(M)$-mal kleiner als das Fundamentalellipsoid E ist.

[23]) Eine halbe Kantenlänge $a/2$ ist größer als die größte Halbachse von $E_{2\lambda d(P_0) k'(M)}$.

[24]) Wir passen unsere Bezeichnungen denjenigen des Hilfssatzes II an.

Beschränken wir uns auf

$$0 < \lambda \leqq \frac{k(M)}{6\sqrt{n}\,k'(M)} \quad (22)$$ [25]),

so wird

$$d(P) > \tfrac{1}{2} d(P_0). \quad (23)$$

Es entspricht also jedem Punkte P, der α) oder β) erfüllt, ein Würfel $W(P, \lambda)$, dessen Kantenlänge (wegen (23))

$$a_P = \frac{2\lambda d(P)}{\sqrt{n}} > \tfrac{1}{2} a_{P_0} = \nu a_{P_0};\ (\nu = \tfrac{1}{2})$$

ist. In jedem $W(P, \lambda)$ besteht die Abschätzung [vgl. (21)]

$$\|u\|_{\alpha,2}^{W(P,\lambda)} d^3(P) = w(P, \lambda) \leqq N(\lambda) \leqq 2\, w(P_0, \lambda) = 2\,\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} \cdot d^3(P_0), \quad (24)$$

somit mit Rücksicht auf (23)

$$\|u\|_{\alpha,2}^{W(P,\lambda)} \leqq 16\,\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} = \varrho. \quad (25)$$

Wird nun der Hilfssatz II herangezogen, so bekommt man für alle λ, die der Ungleichheit (22) genügen,

$$\|u\|_{\alpha,2}^{E_{2\lambda d(P_0)k'(M)}} \leqq \|u\|_{\alpha,2}^{W} \leqq C(\mu, \nu, n)\,\varrho = C(M)\,\|u\|_{\alpha,2}^{W_0}$$ [26]). (26)

Wir schreiben nun die Differentialgleichung (17) in der in solchen Fällen üblichen Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}(P_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} [a_{i,k}(P_0) - a_{i,k}(x_1, \ldots, x_n)] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + f(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n) \quad (27)$$

und betrachten sie in dem größeren Würfel W. Das Ellipsoid $E_{2\lambda d(P_0)k'(M)}$ schaltet sich zwischen W_0 und W ein. Nach den Sätzen A', B' des ersten Kapitels und den diesbezüglichen Zusätzen hat man für die Lösung (u) von (27), *wenn man sie im Ellipsoid* $E_{2\lambda d(P_0)k'(M)}$ [27]) *betrachtet und die Abschätzung nur im Würfel* W_0 *vornimmt* [28]),

$$\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} \leqq C(M)\left[\frac{\operatorname{Max}_{W} |\psi|}{\lambda^{\alpha} d^{\alpha}(P_0)} + H_{\alpha}^{W}(\psi) + \frac{\operatorname{Max}_{G} |u|}{\lambda^3 d^3(P_0)}\right]. \quad (28)$$

---

[25]) Dadurch bekommt λ eine erste numerische von M abhängige Abschätzung.

[26]) a) Vgl. die Definition von W (S. 266, Zeile 20) und Formel (25). b) Man beachte, daß $E_{2\lambda d(P_0)k'(M)}$ zu W gehört. c) $\mu = \dfrac{3\sqrt{n}\,k'(M)}{k(M)} = C(M)$.

[27]) Die Entfernung des Würfels W_0 vom Rande des Ellipsoids $E_{2\lambda d(P_0)k'(M)}$ ist $> \lambda d(P_0)$ (S. 266, Zeile 17—18).

[28]) $E_{2\lambda d(P_0)k'(M)} \subset W$.

Der weitere Beweisgang ist klar. Man muß zuerst $\|\psi\|_\alpha^W$ abschätzen. Zu diesem Zweck gehen wir von den nach (18) in W geltenden Ungleichheiten

$$\text{(29)}\quad \begin{aligned} &\operatorname*{Max}_W |a_{ik} - a_{ik}^0| \leqq M\left(\frac{\text{Durchm. } W}{2}\right)^{\alpha+\varepsilon} \leqq C(M)\,\lambda^{\alpha+\varepsilon} d^{\alpha+\varepsilon}(P_0)^{29}),\\ &\|a_{i,k} - a_{i,k}^0\|_\alpha^W \leqq C(M)\,\lambda^\varepsilon d^\varepsilon(P_0), \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

aus. Mit Rücksicht auf (26), (27) und (29) ist

$$\text{(30)}\quad \begin{aligned} \operatorname*{Max}_W |\psi| &\leqq \sum_{i,k=1}^{n} \operatorname*{Max}_W |a_{i,k} - a_{i,k}^0| \operatorname*{Max}_W \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\right| + \operatorname*{Max}_W |f|\\ &\leqq C(M)\,\lambda^{\alpha+\varepsilon} d^{\alpha+\varepsilon}(P_0)\,\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} + \operatorname*{Max}_G |f|. \end{aligned}$$

Dazu kommt noch wieder wegen (26), (27) und (29)

$$\text{(31)}\quad \begin{aligned} H_\alpha^W(\psi) &\leqq \sum_{i,k=1}^{n} \operatorname*{Max}_W |a_{i,k} - a_{i,k}^0| \cdot H_\alpha^W\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\right)\\ &\quad + \operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\right| \cdot H_\alpha^W(a_{i,k} - a_{i,k}^0) + \|f\|_\alpha^G\\ &\leqq C(M)\,\lambda^{\alpha+\varepsilon} d^{\alpha+\varepsilon}(P_0)\,\|u\|_{\alpha,2}^{W_0}\\ &\quad + C(M)\,\lambda^\varepsilon d^\varepsilon(P_0)\,\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} + \|f\|_\alpha^G. \end{aligned}$$

Führt man (30), (31) in (28) ein, so erhält man eine Abschätzung von der Form

$$\text{(32)}\quad \|u\|_{\alpha,2}^{W_0} \leqq C(M)\left[\lambda^\varepsilon d^\varepsilon(P_0)\,\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} + \frac{\operatorname*{Max}_G |f|}{\lambda^\alpha d^\alpha(P_0)} + \|f\|_\alpha^G + \frac{\operatorname*{Max}_G |u|}{\lambda^3 d^3(P_0)}\right].$$

Wir wählen jetzt λ_0 so klein, daß es außer (22) auch der Bedingung

$$C(M)\,D^\varepsilon \lambda_0^\varepsilon < \tfrac{1}{2}$$

genügt, wo D den Durchmesser des Gebietes G bezeichnet[30]). Dieses λ_0 ist eine Funktion von M und D, $\lambda_0 = \lambda_0(M, D)$. *Es hängt aber nicht von der Lösung u, die man betrachtet, ab.*

Da $d(P_0)$ kleiner als D ist, so erhält man aus (32)

$$\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} \leqq \frac{1}{2}\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} + C(M)\left[\frac{\|f\|_\alpha^G}{\lambda_0^\alpha d^\alpha(P_0)} + \frac{\operatorname*{Max}_G |u|}{\lambda_0^3 d^3(P_0)}\right],$$

also

$$\|u\|_{\alpha,2}^{W_0} \leqq C(M)\left[\frac{\|f\|_\alpha^G}{\lambda_0^\alpha d^\alpha(P_0)} + \frac{\operatorname*{Max}_G |u|}{\lambda_0^3 d^3(P_0)}\right].$$

Multipliziert man diese Ungleichheit mit $d^3(P_0)$, so gewinnt man

$$w[P_0, \lambda_0(M, D)] \leqq C(M)\,(\|f\|_\alpha^G + \operatorname*{Max}_G |u|).$$

---

[29]) Die Kantenlänge von $W = 6\,\lambda\, d(P_0)\,\dfrac{k'(M)}{k(M)}$.

[30]) $\lambda_0 = \text{Min.}\left[\dfrac{1}{2^{1/\varepsilon} D\, C(M)^{1/\varepsilon}},\ \dfrac{k(M)}{6\sqrt{n}\, k'(M)}\right]$.

Umsomehr ist also wegen (21)

$$N(\lambda_0) \leqq C(M)\,(\|f\|_\alpha^G + \operatorname*{Max}_G |u|),$$

d. h. für jedes P aus G

$$\|u\|_{\alpha,2}^{W(P,\lambda_0)} \leqq \frac{C(M)}{d^3(P)}\,(\|f\|_\alpha^G + \operatorname*{Max}_G |u|)^{20a),\,31)}. \tag{33}$$

Durch diese Formel werden $|D_1 u|$ und $|D_2 u|$ in jedem ganz im Innern gelegenen Bereiche abgeschätzt. Aber auch die Bestimmung von Schranken für die H-Konstanten der zweiten Ableitungen erweist sich nunmehr als trivial. Es sei nämlich B der vorgegebene ganz im Innern von G gelegene Bereich, δ seine Entfernung vom Rande des Gebietes G. Wir unterziehen den ganzen n-dimensionalen Raum einer Teilung in kongruente Würfel $Q_j\,(j = 1, 2, \ldots)$ von der Maschenweite $s = \frac{\delta\,\lambda_0(M)}{2}$ und betrachten nur solche Q_j, die mit B gemeinsame Punkte haben. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) die Punkte P_1, P_2 von B liegen in demselben Q_j oder in benachbarten Q_{j_1}, Q_{j_2}, b) P_1, P_2 liegen in getrennten Würfeln. Im Falle a) betrachten wir z. B. P_1; $d(P_1)$ ist $\geqq \delta$. Somit umfaßt der Würfel $W(P_1, \lambda_0)$ (siehe die Definition von $W(P, \lambda)$) den Punkt P_2. Also ist wegen (33)

$$|D_2 u(P_1) - D_2 u(P_2)| \leqq \frac{C(M)}{d^3(P_1)}\,(\|f\|_\alpha^G + \operatorname*{Max}_G |u|)\, r_{P_1P_2}^\alpha$$

$$\leqq \frac{C(M)}{\delta^3}\,(\|f\|_\alpha^G + \operatorname*{Max}_G |u|)\, r_{P_1P_2}^\alpha.$$

Im Falle b) ist $r_{P_1P_2} \geqq \frac{\delta \cdot \lambda_0(M)}{2}$, somit

$$|D_2 u(P_1) - D_2 u(P_2)| \leqq \frac{4 \operatorname*{Max}_B |D_2 u|}{\delta\,\lambda_0(M)}\, r_{P_1P_2} \leqq \frac{C(M)}{\delta^4}\,(\|f\|_\alpha^G + \operatorname*{Max}_G |u|)\, r_{P_1P_2}^{\alpha\,32)}.$$

Die vorhin dargestellte Methode führt ohne weiteres auch dann zum Ziele, wenn es sich um Abschätzung im Innern der Lösungen der *allgemeineren* Differentialgleichung

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}(x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, \ldots, x_n)\,\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, \ldots, x_n)\,u + f(x_1, \ldots, x_n)$$

---

31) Benutzt man dieses Resultat und beachtet die Fußnote 20a), um nach der gleichen Methode noch einmal $|D_2 u|$ abzuschätzen, so bekommt man

$$|D_2 u| \leqq \frac{C(M)}{d^2(P)}\,(\|f\|_\alpha^G + \operatorname{Max}|u|).$$

32) Die genauere Abschätzung liefert [mit Rücksicht auf die Fußnoten 20a) und 31)]

$$\|u\|_{\alpha,2}^{W(P,\lambda_0)} \leqq \frac{C(M)}{d(P)^{2+\alpha}}\,(\|f\|_\alpha^G + \operatorname*{Max}_G |u|).$$

handelt. Man führt dieselbe Funktion $w(P,\lambda)$ ein, betrachtet wieder ihre obere Grenze $N(\lambda)$ und wählt einen Punkt P_0 derart, daß $w(P_0,\lambda) \geqq \frac{N(\lambda)}{2}$ gilt. Jetzt kommt es darauf an, die Schranken von $\sum_j \|b_j\|_\alpha \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_\alpha$ durch die entsprechenden Schranken für die zweiten Ableitungen auszudrücken. Bei $\operatorname{Max}_W \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|$ verfährt man am einfachsten auf folgende Weise. Ist P irgendein Punkt von W, so wählt man einen zweiten Punkt P_1 von W so, daß

$$r_{P_1 P} = 3\lambda d(P_0) \frac{k'(M)}{k(M)} \quad (35)$$

gilt und die Gerade PP_1 zur x_j-Achse parallel ist. Dann ist — unter $\bar{P}$ einen Punkt auf PP_1 verstanden —

$$u(P_1) - u(P) = [x_j(P_1) - x_j(P)] \frac{\partial u(P)}{\partial x_j} + \frac{1}{2}[x_j(P_1) - x_j(P)]^2 \frac{\partial^2 u(\bar{P})}{\partial x_j^2},$$

also

$$\frac{\partial u(P)}{\partial x_j} = \frac{u(P_1) - u(P)}{x_j(P_1) - x_j(P)} + \frac{1}{2}[x_j(P_1) - x_j(P)] \frac{\partial^2 u(\bar{P})}{\partial x_j^2}$$

und mit Rücksicht auf (35)

$$\operatorname{Max}_W \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \leqq C(M) \frac{\operatorname{Max}_G |u|}{\lambda d(P_0)} + C(M) \lambda d(P_0) \operatorname{Max}_W |D_2 u|.$$

Ähnlich gilt

$$H_\alpha^W \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \leqq C(M) \lambda^{1-\alpha} d^{1-\alpha}(P_0) \operatorname{Max}_W |D_2 u|.$$

Somit, wenn auch $\|b_j\|_\alpha \leqq M$ ist, erhalten wir

$$\sum_j \|b_j\|_\alpha^W \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_\alpha^W \leqq C(M) \left[\frac{\operatorname{Max}_G |u|}{\lambda d(P_0)} + \lambda^{1-\alpha} d^{1-\alpha}(P_0) \|D_2 u\|_\alpha^W \right].$$

Die Glieder mit $\frac{\operatorname{Max}|u|}{\lambda^k d^k(P_0)}$ bleiben in der endgültigen Abschätzung wieder rechts, während die Glieder mit $\|D_2 u\|_\alpha^W$, deren Koeffizient $C(M)\lambda^{1-\alpha} d^{1-\alpha}(P_0)$ bei passendem λ sehr klein wird, wie früher nach links herübergenommen werden. Das gleiche Verfahren läßt sich auch beim Gliede $c(x_1, \ldots, x_n)u$ anwenden[34]).

---

[33]) Einen solchen Punkt P_1 gibt es immer in W, da seine Kantenlänge $= \frac{6\lambda d(P_0) k'(M)}{k(M)}$.

[34]) Zur Formel (19) wäre noch folgendes zu erwähnen. Bekanntlich ist die elliptische Differentialgleichung (17) [oder sogar die allgemeinere Gleichung (34)] lösbar, falls das Gebiet G der Klasse Bh „hinreichend klein" ist und die Rand-

Drittes Kapitel.

Abschätzung der Lösung am Rande.

Wir schreiten jetzt zur Abschätzung am Rande und beginnen mit folgenden Hilfssätzen, die eigentlich Korollare der im ersten Kapitel angegebenen Sätze darstellen. Es sei R ein achsenparalleler Quader

$$R: \begin{cases} a_i \leqq x_i \leqq a_i + 3; & (i = 1, \ldots, n-1), \\ a_n \leqq x_n \leqq a_n + 1. \end{cases}$$

Seine von einem Eckpunkte ausgehende Kanten haben bis auf eine, die $= 1$ ist, die Länge 3. In R betrachten wir die lineare homogene Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten (3). Sei $\mathfrak{W}$ die der Koordinate $x_n = a_n + 1$ entsprechende Wand von R, d. h. die Gesamtheit der Punkte mit $a_i \leqq x_i \leqq a_i + 3$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $x_n = a_n + 1$. Wir bezeichnen mit $\frac{2}{3}R$ einen *ganz in* R *gelegenen* ebenfalls achsenparallelen Quader, dessen Dimensionen $\frac{2}{3}$-mal kleiner sind als diejenigen von R und dessen eine Wand, wir nennen sie $\frac{2}{3}\mathfrak{W}$, eine Teilmenge von $\mathfrak{W}$ ist und mit $\mathfrak{W}$ den *gemeinsamen Mittelpunkt* O hat.

Hilfssatz III. Für jede in R gegebene Lösung von (3) ist (vorausgesetzt, daß die entsprechenden Ausdrücke existieren)

$$(36) \quad \|u\|^{2/3\,R}_{\alpha,\,2} \leqq C(M)\,(\mathrm{Max}\,|u| \text{ am Rande von } R + \|\varphi\|^{\mathfrak{W}}_{\alpha,\,2})^{35),\,12b)};$$

φ ist dabei der Randwert von u. Dieser Hilfssatz ist eine unmittelbare Folge des in der Einleitung gegebenen Satzes C'.

Nun sei R_λ ein beliebiger Quader, dessen Dimensionen λ-mal kleiner sind als diejenigen von R. Ähnlich sei $\mathfrak{W}_\lambda$ diejenige Wand von R_λ, deren

---

werte zweimal H-stetig differentiierbar sind. Man vergleiche die Arbeit von A. Korn, Schwarz-Festschrift 1914, S. 215—229. Aus der Formel (19) folgt nun unmittelbar auch die Lösbarkeit für *stetige* Randwerte.

Ist dies einmal erkannt worden, so betrachte man weiter die homogene Differentialgleichung $\sum a_{ik}(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0$ (oder die allgemeinere Gleichung mit $c < 0$). Nach der Methode von O. D. Kellog, Foundations of Potential Theory, Berlin, Springer 1929 (insb. S. 315—338) kann man dann sofort eine verallgemeinerte Lösung für *beliebig* berandete Gebiete konstruieren. Statt des Harnackschen Theorems benutze man dabei immer die Formel (19). Fälle, wo eine „Barrier" existiert, lassen sich dann nach den Existenzsätzen des vierten Kapitels konstruieren.

35) Die Existenz der linken Seite in (36), (36*), (36**) ist gesichert, sobald $\|\varphi\|^{\mathfrak{W}}_{\alpha,\,2} < \infty$ ist, usw.

alle Seiten 3λ betragen und $\frac{2}{3}R_\lambda$ der auf dieselbe Weise aus R_λ, wie $\frac{2}{3}R$ aus R, entstandene Quader[36]).

Hilfssatz IV. Es gilt für Lösungen von (3), in R_λ

$$(36^*) \qquad \|u\|^{2/3\,R_\lambda}_{\alpha,\,2} \leqq C(M)\,\frac{\text{Max}\,|u| \text{ am Rande von } R_\lambda + \|\varphi\|^{\mathfrak{W}_\lambda}_{\alpha,\,2}}{\lambda^{1+\alpha}}\ ^{37}),$$

die in R_λ gegeben sind.

Man überzeugt sich sofort von der Richtigkeit dieser Abschätzung, wenn man durch eine Ähnlichkeitstransformation R_λ in R überführt, die Abschätzung (36) benutzt und dann von R zurück zu R_λ übergeht.

Hilfssatz V. Sei u (in R) die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit *konstanten* Koeffizienten (10), die am Rande von R *verschwindet*. Es ist

$$(36^{**}) \qquad \|u\|^{2/3\,R}_{\alpha,\,2} \leqq C(M)\,\|f\|^{R}_{\alpha}\ ^{38}).$$

Der Beweis ist in demjenigen des Satzes D' des einleitenden Kapitels enthalten. Aus dem Hilfssatz V folgt sofort nach einer in dieser Arbeit wiederholt benutzten Schlußweise[38]) der

Hilfssatz VI. Für jede am Rande von R_λ *verschwindende* Lösung von (10) ist

$$\|u\|^{2/3\,R_\lambda}_{\alpha,\,2} \leqq C(M)\left[\frac{1}{\lambda^\alpha}\,\underset{R_\lambda}{\text{Max}}\,|f| + H^{R_\lambda}_{\alpha}(f)\right].$$

Zusammenfassung: Für jede zweimal α-H-stetig differentiierbare Lösung von (10) in R_λ gilt zum mindesten in $\frac{2}{3}R_\lambda$

$$(37) \quad \|u\|^{2/3\,R_\lambda}_{\alpha,\,2} \leqq C(M)\left[\frac{1}{\lambda^{1+\alpha}}\left(\underset{S_\lambda}{\text{Max}}\,|\varphi| + \|\varphi\|^{\mathfrak{W}_\lambda}_{\alpha,\,2}\right) + \frac{1}{\lambda^\alpha}\,\underset{R_\lambda}{\text{Max}}\,|f| + H^{R_\lambda}_{\alpha}(f)\right];$$

S_λ ist der Rand von R_λ.

Es sei G ein Kontinuum, dessen Rand $\mathfrak{R}$ ein Teilflächenstück S der Klasse Bh enthält. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir annehmen, daß S ein Stück der Ebene $x_m = 0$ ist. Unser Ziel ist es, für eine Lösung u der elliptischen Differentialgleichung (17) mit *variablen* Koeffizienten $a_{i,k}$ eine Abschätzung am Rande zu gewinnen[39]).

---

[36]) Insbesondere stimmt der Mittelpunkt der Wand $\frac{2}{3}\mathfrak{W}_\lambda$ mit dem Mittelpunkt der Wand $\mathfrak{W}_\lambda$ von R_λ überein. Die Wand $\frac{2}{3}\mathfrak{W}_\lambda$ gehört ganz zum „Innern“[15]) der Wand $\mathfrak{W}_\lambda$.

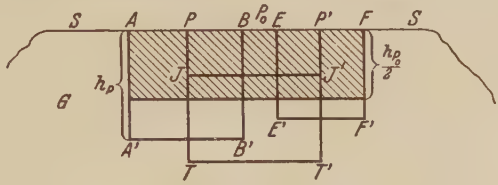
[37]) Es genügt zu wissen, daß im Nenner von (36*) eine positive Potenz von λ vorkommt.

[38]) Übergang von R_λ zu R durch eine Ähnlichkeitstransformation und zurück.

[39]) Die genaue Aussage des diesbezüglichen Satzes II findet man, nach dem erfolgten Beweise, auf S. 276—277.

Genauer gesagt, es soll eine Schranke für $\|u\|_{\alpha,2}$ gefunden werden in einer sich an das ebene Randflächenstück S anschließenden Umgebung. Weiter soll u in der Umgebung von S — dies setzen wir an dieser Stelle noch voraus[40]) — sich zweimal α-H-stetig differentiierbar verhalten.

Ein Kunstgriff erlaubt uns ganz wie früher zu verfahren: S für sich kann als ein $(n-1)$-dimensionales Gebiet angesehen werden. Es sei P ein „innerer“[15]) Punkt dieses Gebietes, d. h. P liege auf S, aber nicht am $(n-2)$-dimensionalen Rande von S. Wir bezeichnen jetzt mit $d(P)$ die Entfernung des Punktes P von $\mathfrak{R}-S$[41]) und bilden um P den Würfel $Q_{\lambda d(P)}$ von der Kantenlänge $\lambda d(P)$[42]), dessen eine Wand $q_{\lambda d(P)}$ auf



S fällt. *Dabei soll P der Mittelpunkt der Wand $q_{\lambda d(P)}$ sein* und das ganze $Q_{\lambda d(P)}$ zum Kontinuum G gehören. Wir definieren nun

$$w(P,\lambda) = \|u\|_{\alpha,2}^{Q_{\lambda d(P)}} \cdot d^3(P); \quad P \varepsilon S^{43}).$$

Wieder soll $w(P,\lambda)$ bei passendem $\lambda_0(M)$ abgeschätzt werden. Wir bezeichnen wie früher mit $N(\lambda)$ die obere Grenze von $w(P,\lambda)$ bei konstantem λ $\left(0 < \lambda < \frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$ und variablem P[44]). Dann gibt es einen Punkt P_0, der im „Innern“[15]) von S liegt und für welchen[45])

$$\frac{N(\lambda)}{2} \leqq w(P_0,\lambda), \text{ d. h. } N(\lambda) \leqq 2\|u\|_{\alpha,2}^{Q_{\lambda d(P_0)}} d^3(P_0) \tag{38}$$

---

[40]) Aus den Existenzsätzen des vierten Kapitels folgt sofort, daß, falls auf S die Randwerte zweimal α-H-stetig differentiierbar sind, dann auch u in der abgeschlossenen räumlichen Halbumgebung von S α-H-stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt.

[41]) $\mathfrak{R}$ ist der ganze Rand des Kontinuums G.

[42]) Wir beschränken uns auf $0 < \lambda \leqq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Dann sind wir sicher, daß $Q_{\lambda d(P)}$ ganz zum Bereiche $\overline{G}$ gehört. P ist immer der *Mittelpunkt der Wand* der Gebilde $Q_{\lambda d(P)}$ und $R_{\lambda d(P)}$ (vgl. die Figur).

[43]) Ähnlich wie bei Satz I kann auch hier der Exponent erniedrigt werden.

[44]) Man beachte, daß jetzt P sich nur im „Innern“ von S bewegen kann.

[45]) In der Figur ist $Q_{\lambda d(P_0)}$ durch $PP'T'T$ dargestellt; PP' ist die Wand $q_{\lambda d(P_0)}$ von $Q_{\lambda d(P_0)}$, P und P' zwei Punkte am „Rande“ dieser Wand. Der dem Punkte P entsprechende Würfel $Q_{\lambda d(P)} = ABB'A'$, ähnlich $Q_{\lambda d(P')} = EFF'E'$. Die Summe $\mathfrak{Q} = Q_{\lambda d(P_0)} + \sum_P Q_{\lambda d(P)}$ wird symbolisch durch die Summe der drei Quadrate $PP'T'T$, $ABB'A'$, $EFF'E'$ dargestellt.

ist. Für einen beliebigen Punkt $P \varepsilon S$, der am „*Rande*“ von $q_{\lambda d(P_0)}$ liegt, gelten offensichtlich, falls $0 < \lambda < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ist, die Relationen

$$d(P) \geqq d(P_0) - \lambda d(P_0) > \tfrac{1}{2} d(P_0), \tag{39}$$

weiter wegen (38)

$$w(P, \lambda) = \|u\|^{Q_{\lambda d(P)}}_{\alpha, 2} \cdot d^3(P) \leqq N(\lambda) \leqq 2 \|u\|^{Q_{\lambda d(P_0)}}_{\alpha, 2} \cdot d^3(P_0)$$

und endlich mit Rücksicht auf (38), (39)

$$\|u\|^{Q_{\lambda d(P)}}_{\alpha, 2} \leqq 16 \|u\|^{Q_{\lambda d(P_0)}}_{\alpha, 2}.$$

Es werde mit h_P die zu S senkrechte Höhe von $Q_{\lambda d(P)}$ bezeichnet (vgl. die Figur). Wegen (39) ist

$$h_P > \frac{h_{P_0}}{2} = \frac{\lambda d(P_0)}{2}.$$

Wir betrachten das Gebiet $\Omega = Q_{\lambda d(P_0)} + \sum_P Q_{\lambda d(P)}$[45]), wobei die Summation über alle diejenigen Punkte P zu erstrecken ist, die am $(n-2)$ dimensionalen „*Rande*“ der Wand $q_{\lambda d(P_0)}$ liegen. Aus Ω schneiden wir dasjenige (in der Figur schraffierte) Gebiet Ω' aus, das aus Punkten von Ω besteht, die von S höchstens um $\frac{h_{P_0}}{2} = \frac{\lambda d(P_0)}{2}$ entfernt sind; Ω' bildet eine Zylindermenge, deren Dimensionen wir nunmehr abschätzen. Die Höhe von Ω' ist $\frac{\lambda d(P_0)}{2}$; sie ragt ins Innere des Kontinuums G hinein. Die in S hineinfallenden Abmessungen von Ω' sind größer als $\frac{3}{2} \lambda d(P_0)$. Es gehört also der ganze Quader $R_{\frac{\lambda d(P_0)}{2}}$[42]) (zur Definition von R_λ vergleiche S. 272) zu G. Um die Figur nicht zu verwickeln, wird auch $R_{\frac{\lambda d(P_0)}{2}}$ durch den schraffierten Teil angedeutet. Wir betrachten endlich den Quader $\frac{2}{3} R_{\frac{\lambda d(P_0)}{2}} = R_{\frac{\lambda d(P_0)}{3}}$ (in der Figur $P P' J' J$). Seine Höhe $P' J'$ ist $\frac{\lambda d(P_0)}{3}$, seine Basis $P P'$ stimmt mit der Wand $q_{\lambda d(P_0)}$ des Würfels $Q_{\lambda d(P_0)}$ genau überein. Es gehört also $R_{\frac{\lambda d(P_0)}{3}}$ ganz zu $Q_{\lambda d(P_0)}$.

Nun schreiben wir in $R_{\frac{\lambda d(P_0)}{2}}$[46]) die elliptische Differentialgleichung (17) in der Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} a^0_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} (a^0_{i,k} - a_{i,k}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f = \psi, \quad (a^0_{i,k} = a_{i,k}(P_0))$$

[46]) D. h. im schraffierten Gebiete.

und schätzen nach den Hilfssätzen 3 bis 6 [vgl. (37)] u in $R_{\underline{\lambda d(P_0)}}$ ab $[R_{\underline{\lambda d(P_0)}} = PP'J'J]$

$$(40)\qquad \left\|u\right\|^{R_{\lambda d(P_0)/3}}_{\alpha,2} = \left\|u\right\|^{2/3\, R_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha,2} \leqq C(M)\left[\frac{\underset{G}{\mathrm{Max}\,|u|}}{\lambda^{1+\alpha} d^{1+\alpha}(P_0)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda^{\alpha} d^{\alpha}(P_0)}\, \underset{R_{\lambda d(P_0)/2}}{\mathrm{Max}\,|\psi|} + H^{R_{\lambda d(P_0)/2}}(\psi) + \frac{1}{\lambda^{1+\alpha} d^{1+\alpha}(P_0)} \left\|\varphi\right\|^{\mathfrak{B}_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha,2}\right]^{*}).$$

Die Abschätzungen von $\mathrm{Max}|\psi|$ und $H_a(\psi)$ ergeben sich ähnlich wie früher [vgl. (30), (31)] und wir erhalten

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathrm{Max}^{R_{\lambda d(P_0)/2}}|\psi| \leqq C(M)\,\lambda^{\alpha+\varepsilon} d^{\alpha+\varepsilon}(P_0) \left\|u\right\|^{R_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha,2} + \|f\|^{G}_{\alpha}, \\ H_a^{R_{\lambda d(P_0)/2}}(\psi) \leqq C(M)\,\lambda^{\varepsilon} d^{\varepsilon}(P_0) \left\|u\right\|^{R_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha,2} + H_a(f). \end{cases}$$

Die Abschätzung von $\left\|u\right\|^{R_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha,2}$ wird ebenfalls nach dem Schema des zweiten Kapitels bewerkstelligt. Man schreibe $R_{\underline{\lambda d(P_0)}}$ in der Form (vgl. die Figur)

$$R_{\underline{\lambda d(P_0)}} = [Q_{\lambda d(P_0)} + \sum_{P} Q_{\lambda d(P)}] \cdot R_{\underline{\lambda d(P_0)}},$$

wobei die Summation über alle „*Randpunkte*“ der Wand $q_{\lambda d(P_0)}$ zu erstrecken ist. Es ist also wegen des Hilfssatzes II[47])

$$\left\|u\right\|^{R_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha,2} \leqq C \left\|u\right\|^{Q_{\lambda d(P_0)}}_{\alpha,2}; \text{ (C eine numerische Konstante).}$$

Setzen wir die letzte Ungleichheit in (41) ein, so erhält (40) die Gestalt

$$(42)\qquad \left\|u\right\|^{R_{\lambda d(P_0)/3}}_{\alpha,2} \leqq C(M)\left[\lambda^{\varepsilon} d^{\varepsilon}(P_0) \left\|u\right\|^{Q_{\lambda d(P_0)}}_{\alpha,2}\right.$$

$$\left. + \frac{\underset{G}{\mathrm{Max}\,|u|}}{\lambda^{1+\alpha} d^{1+\alpha}(P_0)} + \frac{\left\|\varphi\right\|^{\mathfrak{B}_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha,2}}{\lambda^{1+\alpha} d^{1+\alpha}(P_0)} + \frac{\|f\|_{\alpha}}{\lambda^{1+\alpha} d^{1+\alpha}(P_0)}\right].$$

---

*) $R_{\lambda d(P_0)/3} = R_{\underline{\lambda d(P_0)}}$; $\frac{2}{3} R_{\lambda d(P_0)/2} = \frac{2}{3} R_{\underline{\lambda d(P_0)}}$, usw.

47) Eigentlich handelt es sich hier um eine naheliegende Modifikation des Hilfssatzes II. Sei $Q_{\lambda d(P_0)}$ ein Würfel von der Kantenlänge $\lambda d(P_0)$. Jedem Punkte P, der am „*Rande*“ *der Wand* $q_{\lambda d(P_0)}$ liegt, sind weitere achsenparallele Würfel $Q_{\lambda d(P)}$ zugeordnet, deren Kantenlänge wenigstens $\frac{1}{2}\lambda d(P_0)$ beträgt. Eine Funktion f, die in $\Omega = Q_{\lambda d(P_0)} + \sum_{P} Q_{\lambda d(P)}$ erklärt ist, soll nach Voraussetzung in jedem der oben genannten Würfel den Beziehungen

$$\left\|f\right\|^{Q_{\lambda d(P_0)}}_{\alpha} \leqq \varrho, \quad \left\|f\right\|^{Q_{\lambda d(P)}}_{\alpha} \leqq \varrho$$

genügen. Dann ist f in dem im Texte definierten schraffiertem Gebiete Ω' H-stetig und es gilt dort die Abschätzung $\left\|f\right\|^{\Omega'}_{\alpha} \leqq C\varrho$, wo C eine numerische Konstante ist, die insbesondere von P_0, λ und M nicht abhängt. Eine genauere Rechnung ergibt $C \leqq 6''$.

Wie die Zeichnung zeigt, setzt sich der Würfel $Q_{\lambda d(P_0)}$ aus zwei Teilen zusammen: aus $PP'J'J$, das ist $R_{\frac{\lambda d(P_0)}{3}}$ und aus dem Restquader $JJ'T'T$.

Nun besitzt $JJ'T'T$ vom Rande eine positive Entfernung $\frac{\lambda d(P_0)}{3}$ (vgl. die Figur). Da $JJ'T'T$ ganz im Innern des Kontinuums liegt, so gilt nach Satz I die Abschätzung

$$\|u\|^{JJ'T'T}_{\alpha,2} \leqq C(M) \frac{\operatorname{Max}_G |u| + \|f\|^{G}_{\alpha}}{\lambda^3 \cdot d^3(P)}. \tag{43}$$

Fassen wir (42) und (43) zusammen:

$$\|u\|^{Q_{\lambda d(P_0)}}_{\alpha,2} \leqq \|u\|^{R_{\lambda d(P_0)/3}}_{\alpha,2} + \|u\|^{JJ'T'T}_{\alpha,2}$$

$$\leqq C(M)\left[\lambda^2 d^2(P_0)\|u\|^{Q_{\lambda d(P_0)}}_{\alpha,2} + \left(\operatorname{Max}|u| + \|\varphi\|^{\mathfrak{B}_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha,2} + \|f\|_{\alpha}\right)\frac{1}{\lambda^3 d^3(P_0)}\right]$$

und daraus folgt wieder für ein $\lambda_0 = \lambda_0(M)$[48])

$$d^3(P_0)\|u\|^{Q_{\lambda d(P_0)}}_{\alpha,2} \leqq C(M)\left(\operatorname{Max}_G|u| + \|\varphi\|^{S}_{\alpha,2} + \|f\|^{G}_{\alpha}\right), \tag{44}$$

also wegen (38)

$$N(\lambda_0) \leqq C(M)\left(\operatorname{Max}_G|u| + \|\varphi\|^{S}_{\alpha,2} + \|f\|^{G}_{\alpha}\right), \text{ w. z. b. w.}^{12b}) \tag{45}$$

Die Formel (45) für $N(\lambda_0)$, wobei λ_0 nur von M abhängt, kann leicht auch dann wieder gewonnen werden, wenn die allgemeinere Differentialgleichung

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u + f(x) \tag{46}$$

mit

$$\|a_{i,k}\|_{\alpha+\varepsilon} \leqq M,\ \|b_j\|_{\alpha} \leqq M,\ \|c\|_{\alpha} \leqq M,\ \text{Diskrim}\,(a_{i,k}) = 1$$

vorliegt. Die Glieder $\sum \|b_j\|_{\alpha}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^{R_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha}$ bzw. $\|c\|_{\alpha}\|u\|^{R_{\lambda d(P_0)/2}}_{\alpha}$ können ähnlich wie früher (bei Verallgemeinerung des Satzes I) abgeschätzt werden. Der auf S. 270 gegebene Beweis kann fast wörtlich wiederholt werden, nur hat man sich statt W immer $R_{\frac{\lambda d(P_0)}{2}}$ zu denken und r_{PP_1} (vgl. S. 270) durch

$$r_{PP_1} \geqq \frac{\lambda d(P_0)}{4}$$

zu beschränken. Wir gelangen so zum folgenden

Satz II. *Ist die Lösung u der Differentialgleichung* (46) *in der abgeschlossenen Umgebung des Randflächenstücks S zweimal α-H-stetig*

---

[48]) λ_0 läßt sich numerisch durch M abschätzen.

differentiierbar, so gilt in jeder kleineren Umgebung U die Abschätzung

$$\|u\|^{U}_{\alpha,2} \leqq C(M)\left(\|f\|_{\alpha} + \|\varphi\|^{S}_{\alpha,2} + \operatorname{Max}|u|\right)^{40}). \tag{47}$$

Als einfacher Korollar zu diesem Satze ergibt sich

Satz II'. Liegt eine in $G + \mathfrak{R}$ zweimal α-H-stetig differentiierbare Lösung u von (46) vor, wobei $\mathfrak{R}$ aus einem System sich nicht berührenden Flächen vom Typus Bh besteht, so gilt in $G + \mathfrak{R}$

$$\|u\|^{G+R}_{\alpha,2} \leqq C(M)\left(\|f\|^{G+R}_{\alpha} + \|\varphi\|^{R}_{\alpha} + \operatorname*{Max}_{G+R}|u|\right). \tag{48}$$

Viertes Kapitel.

Existenzsätze und weitere Abschätzungen.

Die im vorhergehenden Kapitel gegebenen Abschätzungen führen, wie ich nun zeigen will, auf einem kurzen Wege zu den Existenzbeweisen. Es ist nämlich bekannt, daß für Lösungen (u) von (17) $\operatorname{Max}|u|$ a priori durch $\operatorname{Max}|\varphi|$ und $\operatorname{Max}|f|$ abgeschätzt werden kann[49]). Ich wiederhole nicht diese bereits klassisch gewordene Schlußweise. Daraus folgt aber sofort, daß man in den Formeln (47) und (48) ohne weiteres den Ausdruck $\operatorname{Max}|u|$ [soweit es sich um Differentialgleichungen von der Form (17) handelt][50]) unterdrücken bzw. durch $\operatorname{Max}|\varphi| + \operatorname{Max}|f|$ ersetzen kann. Im folgenden werden diese beiden Relationen nur in dieser Form benutzt.

Ich behaupte nun: *Aus der bewiesenen Abschätzung a priori folgt die Existenz der Lösung von* (17) *zuerst für zweimal α-H-stetig differentiierbare Randwerte. Es erweist sich auch zu gleicher Zeit, daß die zweiten partiellen Ableitungen $D_2 u$ unter dieser Bedingung sich auch auf dem Rande α-H-stetig verhalten*[51]).

---

[49]) Vgl. z. B. S. Bernstein, Sur la généralisation du problème de Dirichlet, Math. Ann. **69**, (1910), S. 82—136, insb. S. 95.

[50]) Allgemeiner für jede Gleichung (46), für welche die entsprechende homogene Gleichung keine Nullösung besitzt. Dies folgt sofort aus den späteren Existenzbeweisen. Vgl. die Fußnote 55.

[51]) Dieses sich auf das Verhalten der Lösung am Rande beziehende Resultat wurde mir auch, sobald die Randwerte am ganzen Rande zweimol α-H-stetig differentiierbar sind, von H. G. Giraud brieflich mitgeteilt (April (1932). Wahrscheinlich benutzt H. Giraud beim Beweise seine umfangreichen Untersuchungen über verallgemeinerte Potentiale der einfachen und der doppelten Schicht wie der Volumladung. Das erwähnte Verhalten einer Lösung u von (46) in der Umgebung eines Teilflächenstückes S kann übrigens mit Benutzung von Formel (47) leicht auch dann bestätigt werden, wenn die Randwerte nur auf S zweimal α-H-stetig differentiierbar sind.

Zusatz bei der Korrektur: Das in dieser Fußnote erwähnte Resultat des Herrn Giraud findet man in seiner eben erschienenen Arbeit (Bull. de la Soc. Math. 1933, Juni—Juli).

In der Tat, dies alles ist für die Lösung u der Poissonschen Gleichung $\Delta u = f$ richtig. Es sei nun eine elliptische Differentialgleichung (17) gegeben, deren Lösbarkeit bewiesen werden soll. Man betrachte in Anlehnung an Herrn S. Bernstein die Schar der elliptischen Differentialgleichungen

$$\sum a^{\lambda}_{i,k}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f(x_1 \ldots, x_n) \tag{49}$$

mit

$$a^{\lambda}_{i,k} = \frac{(1-\lambda)\delta_{i,k} + \lambda a_{ik}}{\sqrt[n]{\Delta_\lambda}}; \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1,$$

unter Δ_λ die Diskriminante der positiv definiten Matrix $[\lambda a_{ik} + (1-\lambda)\delta_{ik}]$ verstanden. Dann ist offenbar $a^0_{i,k} = \delta_{ik}$, $a^1_{i,k} = a_{i,k}$. Wir beweisen, daß für jedes λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ die Gleichung (49) lösbar ist. Zuerst für kleine λ. In diesem Falle schreiben wir die Gleichung (49) in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i,k=1}^{n} [a^{\lambda}_{i,k}(x) - \delta_{ik}] \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f(x), \tag{50}$$

wo die Norm $\|a^{\lambda}_{ik} - \delta_{ik}\|_{\alpha+\varepsilon}$ für kleine λ klein wird. Nun ist für $\lambda = 0$ die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f$ gewiß bei vorgegebenen Randwerten φ lösbar. Man kann also, da für kleine λ die $(a^{\lambda}_{ik} - \delta_{ik})$ sehr „flach" sind, die bekannte von H. A. Korn angegebene Methode anwenden und die Gleichung (50) für kleine λ durch sukzessive Approximationen lösen[52]). Aber die Kornsche Methode führt auch dann zum Ziele, wenn es bekannt ist, daß die Gleichung für ein gewisses λ_0 lösbar ist und es sich darum handelt, die Lösungen für benachbarte λ zu finden. Es bleibt also, um die Lösungen von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 1$ fortsetzen zu können, noch zu beweisen, daß die Lösungen, ich nenne sie $u_\lambda(\varphi f)$, gleichmäßig normiert sind. Und dies ist in der Tat der Fall, denn es gilt offensichtlich

$$\|a^{\lambda}_{i,k}\|_{\alpha+\varepsilon} \leqq M, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1,$$

somit wegen (48)

$$\|u_\lambda\|_{\alpha,2} \leqq C(M)\left(\|f\|^{G+R}_{\alpha} + \|\varphi\|^{R}_{\alpha,2}\right)^{52b}),$$

Wir haben gezeigt, daß (17) sich für zweimal α-H-stetig differentiierbare Randwerte φ lösen läßt. *Dies trifft aber auch für stetige φ zu*, wie aus der durch Satz I gegebenen Abschätzung (19) sofort folgt. Man approximiere φ durch zweimal α-H-stetig differentiierbare Funktionen φ_n

[52]) a) A. Korn, Schwarz-Festschrift 1914, S. 215—229. b) Es folgt zugleich aus dieser Methode, daß die Lösungen u_λ auch *am Rande zweimal α-H-stetig differentiierbar sind*, wenn dies für die Randwerte zutrifft. c) Es wäre noch zu bemerken, daß mit Benutzung der in der Theorie der Funktionaloperationen üblichen Symbolik der Beweis sich in wenigen Zeilen erledigen läßt.

und nenne u_n die entsprechenden Lösungen, bei konstantgehaltenem f. Dann gilt $u_n - u \to 0$ gleichmäßig; wegen (19) gilt für die ersten und zweiten Ableitungen im Innern des Bereiches[53]) das gleiche.

Wir wenden uns nun zum Studium der allgemeineren Differentialgleichung (46) und wollen *für diese Differentialgleichung die bekannte Alternative beweisen.* Auch diesmal werden wir anders wie üblich verfahren. Die Anwendung der Greenschen Funktionen, Integralgleichungen oder adjungierter Differentialgleichungen erweist sich als nicht notwendig. Es handle sich zuerst um zweimal α-H-stetig differentiierbare Randwerte. Die Gleichung (17) ist, wie wir bereits wissen, unter diesen Voraussetzungen immer lösbar. Offensichtlich genügt es, den Fall der verschwindenden Randwerte zu betrachten. Die am Rande verschwindende Lösung u von (17) besitzt die Abschätzung (wir behandeln den Fall einfach oder mehrfach zusammenhängenden Gebiete der Klasse Bh)

$$\|u\|^{G+\Re}_{\alpha,\,2} \leqq C \|f\|^{G+\Re}_{\alpha}; \tag{51}$$

u stellt eine lineare und stetige Funktionaloperation von f dar, was durch die Schreibweise $u(f)$ angedeutet wird. Wir können die zu lösende allgemeine Differentialgleichung (46) in der Form

$$f + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} u(f) + c \cdot u(f) = \psi \tag{52}$$

schreiben. Zu beachten ist, daß (52) bereits keine Differentialgleichung, sondern eine *Funktionalgleichung darstellt.* Gegeben ist die α-H-stetige Funktion ψ und gesucht wird die α-H-stetige Funktion f. Setzen wir

$$\sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j} u(f) + c\, u(f) = L(f),$$

so läßt sich (52) in der Form

$$f + L(f) = \psi$$

schreiben. Betrachten wir nun den Raum $\mathfrak{A}$ aller in $G + \Re$ α-H-stetigen Funktionen mit der bereits in (1) gegebenen Norm $\|f\| = \|f\|_\alpha = \mathrm{Max}\,|f| + H^{G+\Re}_\alpha(f)$. Wir behaupten $L(f)$ ist nicht nur stetig, was sofort aus (51) folgt, sondern auch vollstetig. (Dabei wird eine Funktionaloperation vollstetig genannt, wenn sie beschränkte Mengen in kompakte überführt[54]). Es genügt offensichtlich die Vollstetigkeit der Funk-

[53]) Somit erreichen wir, was die Lösung der ersten Randwertaufgabe betrifft, bezüglich der Koeffizienten a_{ik} und der vorgegebenen Randwerte denselben Grad der Allgemeinheit wie bei H. M. Gevrey, Determination et emploi des fonctions de Green etc., Journal de Math. (1930), S. 1—80.

[54]) Eine Menge Q wird kompakt genannt, wenn aus jeder Folge von Elementen $q_n \subset Q$ eine (bezüglich des entsprechenden Konvergenzbegriffes) konvergente Teilfolge q_{n_i} herausgegriffen werden kann.

tionaloperationen $\frac{\partial}{\partial x_j} u(f)$ und $u(f)$ zu verifizieren. Sei also $\|f_n\|_\alpha \leqq \varrho$ eine beschränkte Funktionenfolge aus dem Raume $\mathcal{A}$. Dann ist wegen (51)

$$|D_1 u(f_n)| \leqq C\varrho, \quad |D_2 u(f_n)| \leqq C\varrho, \quad |H_\alpha D_2 u(f_n)| \leqq C\varrho.$$

Aus den Lösungen $u(f_n)$ läßt sich also eine Teilfolge $u(f_{n_i})$ extrahieren, für welche $u(f_{n_i})$, $D_1 u(f_{n_i})$, $D_2 u(f_{n_i})$ gleichmäßig gegen eine bestimmte Lösung und ihre Derivierten $u(f)$, $D_1 u(f)$, $D_2 u(f)$ konvergieren,

$$H_\alpha [(D_1 u(f_{n_i}) - D_1 u(f)]$$
$$= H_\alpha D_1 u(f_{n_i} - f) \leqq C \{D_2 [u(f_n) - u(f)]\} \to 0,$$

mithin nach dem Vorhergesagten $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_j}(f_n) - \frac{\partial u}{\partial x_j}(f) \right\|_\alpha \to 0$. Es ist also $L(f)$ vollstetig.

Für vollstetige lineare Funktionaloperationen $L(f)$ gilt nach F. Riesz die determinantenfreie Behauptung der Fredholmschen Theorie. Der betreffende Rieszsche Satz lautet[55]): die lineare Funktionaloperation

$$\psi = f + L(f)$$

mit vollstetigem $L(f)$ ist dann und nur dann stets lösbar, wenn die entsprechende homogene Gleichung

$$f + L(f) = 0$$

keine Nullösungen hat. Diese Behauptung, in die Sprache der elliptischen Differentialgleichungen zurückübersetzt, ergibt die bekannte Alternative. Die Existenz der Lösung für stetige Randwerte folgt aus der Formel (19).

---

[55]) F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Mathematica **41** (1918), S. 71—98, insb. Satz 3 und 7. Aus dem Satze 4 der Rieszschen Arbeit folgt auch allgemein die Existenz einer Konstante, so daß $\|f\| < C\|\psi\|$ gilt. Dies schließt die in der Fußnote (50) behauptete Abschätzung der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung in sich. Besitzt die Gleichung (46) bzw. (52) Nullösungen, so gibt es nach einem weiteren Satz von F. Riesz (Satz I) unter ihnen nur endlich viele linear unabhängige. Auch jetzt kann in gewissem Sinne die Existenz einer Konstante C behauptet werden. *Ist ψ eine beliebige Funktion (rechte Seite) für welche sich die Gleichung (46) lösen läßt, so gibt es unter den Lösungen u wenigstens eine, für welche* $\left\| u \right\|^{G+\Re}_{\alpha,2} < C \left\| \psi \right\|^{G+\Re}_{\alpha}$ *gilt* (Satz 4 bei Riesz). In diesem Falle kann auch die lineare Mannigfaltigkeit derjenigen Funktionen f, für welche die Gleichung (46) lösbar ist, leicht bestimmt werden. (Siehe z. B. J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, Studia Math. **2**, (1930), S. 183—196, insb. Satz II. Augenscheinlich handelt es sich in dieser Fußnote um die am Rande verschwindende Lösungen.

Ich möchte hier noch folgende vielleicht interessante Bemerkung machen. Nehmen wir an, es wäre bereits gelungen, den Existenzbeweis der Lösungen für elliptische Differentialgleichungen auf irgendeine Art und Weise zu erledigen. Weiter setzen wir voraus, daß die qualitative Eigenschaft, die die Hölderstetigkeit der zweiten Ableitungen $D_2 u$ bis auf den Rand des Gebietes behauptet, falls die Randwerte zweimal α-H-stetig differenzierbar sind, auch als richtig erkannt wurde. Dann bin ich imstande, daraus die quantitative Abschätzung (48) zu folgern. Denn zuerst beweise ich durch Anwendung eines Satzes aus der Theorie der Funktionaloperationen (S. Banach, Studia Math. I, S. 223—239, insbesondere Satz 7 und J. Schauder, ebenda II, S. 1—6) die Existenz einer Abschätzungskonstante C. Weiter schließe ich durch Anwendung der sukzessiven Approximationen und Kontinuitätsbetrachtungen von der auf S. 278 vorkommenden Art, daß diese Konstante C nur von M abhängt.

Satz III. *Es sei*

$$\sum A_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = D \tag{53}$$

eine quasilineare elliptische Differentialgleichung. Dies besagt, daß die Funktionen $A_{i,k}$, D im allgemeinen nicht nur von $x_1, \ldots, x_n$, sondern auch von $u, \frac{\partial u}{\partial x_j} = p_j$ abhängen. In jedem $(2n+1)$-dimensionalen beschränkten Bereiche der Variablen $x_1, \ldots x_n, u, p_1 \ldots p_n$ mögen $A_{i,k}$ und D weiter nach allen diesen Variablen stetige Ableitungen erster Ordnung besitzen. Eine zweimalige Anwendung der vorhergehenden Sätze, z. B. der Formel (48) liefert sofort *die Existenz einer Funktion $C(\lambda)$, so daß*

$$\|u\|^{G+R}_{\alpha,2} \leqq C\left[\operatorname*{Max}_G |u| + \operatorname*{Max}_G |D_1 u| + H^G_\beta D_1 u\right] \|\varphi\|^R_{\alpha,2}; \quad \begin{matrix} 0<\beta<1 \\ 0<\alpha<1' \end{matrix} \tag{54}$$

sobald die Ausdrücke rechts in (54) endlich bleiben.

Die Behandlung der dritten und höheren Ableitungen gestaltet sich nun sehr einfach. Es handle sich z. B. um die Differentialgleichung (17), und es mögen die $a_{i,k}$ und f einmal α-H-stetig differentiierbar sein. Wir wollen zuerst die Abschätzung im Innern des Definitionsbereiches vornehmen. Die Schranken für $\|u\|_{\beta,2}$ sind uns bereits bekannt und zwar bei beliebigem $\beta < 1$, denn $a_{i,k}$ und f sind differentiierbar. Es bleibt also noch $\|D_3 u\|_\alpha$ abzuschätzen. Zu diesem Zwecke wird (17) differentiiert und die Formel (19) noch einmal angewendet. Das Ergebnis lautet für jeden im Innern von $G + \Re$ gelegenen Teilbereich B

$$\|u\|^{\overline{B}}_{\alpha,3} \leqq \frac{C(M)}{\delta^{k(n)}} [\operatorname{Max}|u| + \|f\|_{\alpha,1}], \text{ wenn } \|a_{i,k}\|_{\alpha,1} \leqq M.$$

Die Abschätzung am Rande erledigt sich auch höchst einfach. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir das Flächenstück S,

in dessen Umgebung die dreimalige α-H-stetige Differentiierbarkeit behauptet wird, als ein Stück einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperebene voraussetzen. Es seien $x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}$ die in diese Ebene fallenden Koordinaten, x_n die zu ihr normale Koordinatenachse. Es genügt offenbar sich auf den Fall solcher Ableitungen zu beschränken, in welchen die Differentiation nach einer tangentialen Richtung wenigstens einmal vorkommt. Denn die Schranken für $\left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3} \right\|_\alpha$ ergeben sich sofort aus der einmal nach x_n differentiierten Gleichung (17). Die oberen Grenzen für solche rein oder halb tangentiale Ableitungen dritter Ordnung findet man nun wie folgt. Es werde z. B. (17) nach $x_j\,(j < n)$ differentiiert. Wir erhalten

$$\sum_{i,k} a_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,k} \frac{\partial a_{i,k}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \psi'.$$

Setzt man $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \bar{u}$, so hat man für $\bar{u}$ die Differentialgleichung

$$\sum_{i,k} a_{i,k} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i \partial x_k} = \psi,$$

die wieder von der früheren Form ist mit α-H-stetigen ψ und zweimal α-H-stetig differentiierbaren Randwerten $\bar{\varphi}$. Also in einer gewissen Umgebung des ebenen Flächenstückes S ist

$$\left\| \bar{u} \right\|_{\alpha,2}^{U} \leqq C(M)\,(\|\bar{\varphi}\|_{\alpha,2} + \|\psi\|_\alpha),$$

d. h.

$$\left\| \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_j} \right\|_\alpha^{U} \leqq C(M)\,(\|\varphi\|_{\alpha,3} + \|f\|_{\alpha,1}) \text{ w. z. b. w.}$$

(Eingegangen am 1. April 1933.)

Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen.

Von

V. Hlavatý in Prag.

Einleitung.

Wenn ein m-dimensionaler Raum X_m in einem n-dimensionalen gegeben ist, so kann man bekanntlich die $p = n - m$ linear unabhängigen affinnormalen Richtungen zu dem ersten noch beliebig wählen[1]). Diese Wahl beeinflußt die im X_m herrschende, von den affinnormalen Richtungen induzierte Konnexion. Dasselbe gilt auch für einen nichtholonomen Raum X_n^m[2]). In der vorliegenden Arbeit wird der direkte beiderseitige Einfluß der affinnormalen Vektoren und der induzierten Konnexion für einen (nicht)-holonomen Raum studiert (§ 4). Es zeigt sich, daß man zu jeder beliebig vorgegebenen Konnexion das System von affinnormalen Vektoren eindeutig so bestimmen kann, daß diese die erwähnte Konnexion induzieren und umgekehrt [(5, 2), (5, 8)]. Unter allen induzierten Konnexionen gibt es eine[3]) ausgezeichnete (6, 1), welche schon durch die Angabe des studierten Raumes mitbestimmt wird, die sogenannte „eingeborene" Konnexion. Zu dieser läßt sich eindeutig[3]) ein System von affinnormalen Vektoren bestimmen (6, 4b), das diese Konnexion induziert und den Bedingungen genügt, welche für den speziellen Fall $p = 1$ als erste und zweite Normierungsbedingungen bekannt sind[4]). Die eingeborene Konnexion wird aber von der näheren Wahl des Systems

[1]) Vgl. (I), (IV), (V), (VII). — Die römischen Nummern beziehen sich hier und in den Fußnoten auf folgende Literaturangaben: (I) Bortolotti, Enea Sulle varietà subordinate, Rnd. Ist. Lombardo Sci. (II s.) **64** (1931), S. 441—463. — (II) V. Hlavatý, Contribution au calcul différentiel absolu, Věstník Kr. České Spol. Nauk **2** (1926), S. 1—12. — (III) R. Lagrange, Calcul différentiel absolu, Paris, Gauthier-Villars, 1926. — (IV) J. A. Schouten, Der Riccikalkül, Berlin, Springer, 1924. — (V) J. A. Schouten, Über nicht-holonome Übertragungen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 149—172. — (VI) J. A. Schouten, E. R. van Kampen, Zur Einbettungs- und Krümmungstheorie, Math. Annalen **103** (1930), S. 752—783. — (VII) H. Weyl, Zur Infinitesimalgeometrie p-dimensionaler Fläche im n-dimensionalen Raume, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 154—160. — (VIII) L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry (New York, Am. Math. Soc. 1927).

[2]) Siehe (V).

[3]) Bei den festgehaltenen kovarianten Tangentialvektoren.

[4]) (IV) für den holonomen, (V) für den nicht-holonomen Fall.

von Tangentialvektoren beeinflußt. Für den speziellen Fall $p = 1$ lassen sich aber Koeffizienten angeben, welche auch von dieser Wahl unabhängig sind und bei den unimodularen Transformationen eine Konnexion bilden (§ 9). Da die allgemeine induzierte Konnexion auch noch von der näheren Wahl der Tangentialvektoren beeinflußt wird, so läßt sich eine Gruppe von Transformationen der affinnormalen und der Tangentialvektoren angeben, bei welcher die induzierte Konnexion invariant ist (§ 8). Es wird auch der Einfluß der bahntreuen Transformationen (der Konnexion, welche in dem n-dimensionalen Raume herrscht) auf die allgemeine sowie auch auf die eingeborene Konnexion studiert. — Die Arbeit wird mit einem Existenzsatz beendet.

Der hier verwendete absolute Differentialkalkül wird mit der Symbolik des unten genannten Schoutenschen Buches behandelt.

§ 1.

Mit L_n bezeichnen wir einen n-dimensionalen Raum, der auf die Koordinaten x^ν [5]) bezogen ist und in welchem die Konnexion mit den Koeffizienten $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu}(x)$ herrscht. Im L_n denken wir uns einen m-dimensionalen Raum X_m mittels

$$x^\nu = x^\nu(y^1, \ldots, y^m) \qquad (m < n) \tag{1, 1}$$

gegeben. Die Matrix aus den Elementen $\frac{\partial x}{\partial y}$ hat also den Rang m [6]), und infolgedessen kann man die Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial y^a}$ als m linear unabhängige kontravariante Vektoren ansehen, welche X_m tangieren,

$$\underset{a}{B^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^a}\,^{5}). \tag{1, 2}$$

Mit demselben Rechte kann man in der *Algebra* die erwähnten Ableitungen als gemischte Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors B von X_m auffassen:

$$B^\nu_a = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^a}. \tag{1, 3}$$

---

[5]) Die lateinischen Indizes durchlaufen die Symbole $1, \ldots, m$, die gothischen durchlaufen die Symbole $m+1, \ldots, n$, während die griechischen Indizes die Symbole $n+1, \ldots 2n$ durchzulaufen haben. Über alle Arten von Indizes wird nach dem Einsteinschen Vorschlag summiert.

[6]) Wir schließen natürlich die Punkte des Raumes aus, für welche der erwähnte Rang $< m$ ist.

Diese beiden Auffassungen sind durch die Transformationsgleichungen

$$\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial' y^a} = p^\nu_\lambda q^b_a \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^b}, \tag{1, 4a}$$

$$p^\nu_\lambda = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\lambda}, \quad q^b_a = \frac{\partial y^b}{\partial' y^a} \tag{1, 4b}$$

gerechtfertigt[7]). — Die y-Bestimmungszahlen v^a, w_a sind mit den x-Bestimmungszahlen v^ν, w_ν mittels

$$\text{a) } v^\nu = B^\nu_a v^a, \quad \text{b) } w_a = B^\nu_a w_\nu \tag{1, 5}$$

verbunden. Die erste Gleichung gestattet uns, aus den y-Bestimmungszahlen eines im X_m liegenden Vektors die betreffenden x-Bestimmungszahlen *desselben* Vektors zu bestimmen; durch die zweite wird jedem kovarianten Vektor im L_n ein kovarianter Vektor im X_m eindeutig zugeordnet.

Ein m-dimensionaler nicht-holonomer Raum X^m_n ist im L_n mittels m linear unabhängigen kontravarianten Vektorfeldern bestimmt. Indem wir später den holonomen sowie auch den nicht-holonomen Fall gleichzeitig betrachten wollen, bezeichnen wir diese Vektoren auch mit $\underset{a}{B^\nu}$ und die gemischten Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors vom X^m_n auch mit B^ν_a[7]). Es ist aber zu bemerken, daß in dem nicht-holonomen Falle die B Funktionen der x sind, während die B für X_m Funktionen der y sind. Anstatt der Vektoren $\underset{a}{B^\nu}(x)$ kann man auch andere Vektoren $'\underset{a}{B^\nu}(x)$ benutzen, wenn nur diese letzten in dem m-Vektor $\underset{a_1}{B^{[\nu_1}} \ldots \underset{a_m}{B^{\nu_m]}}$ enthalten sind. Transformiert man noch dazu das x-Koordinatensystem, so bekommt man also

$$'\bar{\underset{a}{B}}^\nu = p^\nu_\lambda q^b_a \underset{b}{B^\lambda}, \tag{1, 6}$$

wo aber *nur* die p die Bedeutung (1, 4b) haben, während die q ganz beliebige Koeffizienten — mit von Null verschiedener Determinante — sind. Nichtsdestoweniger gelten auch die Gleichungen (1, 5) für X^m_n.

Von nun an bezeichnen wir mit $X^{(m)}_n$ den m-dimensionalen Raum, der entweder holonom oder nicht-holonom ist, mit $\underset{a}{B^\nu}$ bzw. B^ν_a die Größen, welche im holonomen Falle mittels (1, 2), (1, 3) definiert, im nicht-

[7]) Überall, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreiben wir *entweder* $\underset{a}{B^\nu}$ *oder* B^ν_a, je nachdem es in dem gegebenen Falle bequemer ist.

holonomen Falle von Anfang an gegeben sind und führen noch dazu das Symbol ∂_a ein:

$$\partial_a = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y^a} & \text{für den holonomen Fall,} \\ B_a^\lambda \dfrac{\partial}{\partial x^\lambda} & \text{für den nicht-holonomen Fall.} \end{cases} \tag{1, 7}$$

§ 2.

Die Gleichungen

$$B_a^r t_r = 0 \tag{2, 1}$$

gestatten $p = n - m$ linear unabhängige Lösungen, welche wir mit $\overset{a}{t}_\lambda$[5]) bezeichnen wollen. Die allgemeinste Lösung von (2, 1) ist also

$$*\overset{a}{t}_\lambda = \overset{a}{\underset{b}{P}}\, t_\lambda, \tag{2, 2a}$$

woraus

$$\overset{a}{t}_\lambda = \overset{a}{\underset{b}{Q}}\, *\overset{b}{t}_\lambda \tag{2, 2b}$$

mit

$$\overset{a}{\underset{b}{P}}\,\overset{b}{\underset{c}{Q}} = \overset{b}{\underset{c}{P}}\,\overset{a}{\underset{b}{Q}} = \delta_c^a = \begin{cases} 0 & \text{für } a \neq c \\ 1 & \text{für } a = c \end{cases} \tag{2, 2c}$$

folgt. Aus den Vektoren $\overset{a}{t}$ lassen sich die Affinoren

$$\overset{a}{h}_{a\,b} = B_a^u\, B_b^\lambda\, D_\mu \overset{a}{t}_\lambda \tag{2, 3}$$

konstruieren. Dabei bedeutet D_u den symbolischen Vektor der kovarianten Ableitung im L_n. Von diesen Affinoren setzen wir folgendes voraus:

a) Der Rang eines jeden Affinors $\overset{a}{h}_{a\,b}$ sei n. Infolgedessen läßt sich zu jedem Affinor $\overset{a}{h}_{a\,b}$ der Affinor $\overset{a}{h}^{a\,b}$ nach

$$\overset{a}{h}_{a\,b}\,\overset{a}{h}^{a\,c} = \overset{a}{h}_{b\,a}\,\overset{a}{h}^{c\,a} = \delta_b^c \quad \text{(nicht summieren über a)} \tag{2, 4}$$

eindeutig konstruieren.

b) Die Determinante k, welche aus den Elementen

$$\overset{a}{\underset{b}{k}} = \overset{a}{h}_{a\,b}\,\overset{a}{h}^{a\,b} \tag{2, 5}$$

gebildet wird, sei von Null verschieden. Aus

$$k = \begin{Vmatrix} \overset{m+1}{h}_{11}, & \overset{m+1}{h}_{12}, \ldots, & \overset{m+1}{h}_{m\,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{n}{h}_{11}, & \overset{n}{h}_{12}, \ldots, & \overset{n}{h}_{m\,m} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \overset{m+1}{h}^{11}, & \overset{m+1}{h}^{12}, \ldots, & \overset{m+1}{h}^{m\,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overset{n}{h}^{11}, & \overset{n}{h}^{12}, \ldots, & \overset{n}{h}^{m\,m} \end{Vmatrix}$$

erhellt, daß diese Bedingung nur dann erfüllt werden kann, wenn die $\overset{a}{h}$ linear unabhängig sind. Wenn alle $\overset{a}{h}_{ab}$ Tensoren (= symmetrische Affinoren, $\overset{a}{h}_{ab} = \overset{a}{h}_{ba}$) sind, so kann diese Unabhängigkeit nur dann erreicht werden, wenn

$$n \leqq m + \binom{m+1}{2}$$

ist, sonst aber nur für

$$n \leqq m + m^2.$$

Die Bedingung b) ermöglicht uns die eindeutige Konstruktion der Skalaren $\underset{b}{\overset{a}{l}}$ durch

$$\overset{a}{k}_{e}\,\underset{b}{\overset{e}{l}} = \overset{e}{k}_{b}\,\underset{e}{\overset{a}{l}} = \delta^a_b. \tag{2, 6}$$

Bei der Abänderung (2, 2a) gehen die $\overset{a}{h}_{ab}$ in $^*\overset{a}{h}_{ab}$ über nach

$$^*\overset{a}{h}_{ab} = B^\mu_a\, B^\lambda_b\, D^*_\mu\, \overset{a}{t}_\lambda = \underset{b}{\overset{a}{P}}\, \overset{b}{h}_{ab}. \tag{2, 7}$$

§ 3.

Zu den Vektoren $\overset{a}{t}_\lambda$ läßt sich immer ein System von $p = n - m$ linear unabhängigen kontravarianten Vektoren $\underset{a}{n}{}^\nu$ ausfindig machen, welches die Bedingung

$$\underset{b}{n}{}^\lambda\, \overset{a}{t}_\lambda = \delta^a_b \tag{3, 1a}$$

erfüllt. Diese Vektoren liegen also nicht im $X_n^{(m)}$, und wir wollen sie als „affinnormale" Vektoren bezeichnen. Damit versehen wir, daß sie den Gleichungen (3, 1a) genügen. Gibt es außer $\underset{a}{n}{}^\nu$ noch ein System von Vektoren $\underset{a}{\tilde{n}}{}^\nu$ mit der Bedingung

$$\underset{b}{\tilde{n}}{}^\lambda\, \overset{a}{t}_\lambda = \delta^a_b, \tag{3, 1b}$$

so muß nach (3, 1a)

$$\underset{a}{\tilde{n}}{}^\nu = \underset{a}{n}{}^\nu + \underset{a}{s}{}^\nu, \tag{3, 2}$$

wo die $\underset{a}{s}{}^\nu$ beliebige Vektoren im $X_n^{(m)}$ sind ($\underset{a}{s}{}^\lambda\, \overset{b}{t}_\lambda = 0$)[8]. Die Abänderung (2, 2a) bringt die Abänderung von $\underset{a}{n}{}^\nu$

$$^*\underset{a}{n}{}^\nu = \underset{a}{\overset{b}{Q}}\, \underset{b}{n}{}^\nu \tag{3, 3}$$

mit sich.

---

[8]) Vgl. (IV), S. 143.

Das allgemeinste System von affinnormalen Vektoren, welches zu den Vektoren $*\overset{a}{t}_\lambda$ gehört, ist also

$$(3,4) \qquad *\tilde{\underset{a}{n}}^\nu = \overset{b}{Q}_a (\underset{b}{n}^\nu + \underset{b}{s}^\nu).$$

Die Vektoren $\underset{a}{n}^\nu$ ermöglichen uns die Konstruktion der Bestimmungszahlen B_λ^ν des Einheitsaffinors von $X_n^{(m)}$:

$$(3,5) \qquad B_\lambda^\nu = \delta_\lambda^\nu - \underset{a}{n}^\nu \overset{a}{t}_\lambda\ ^9).$$

Bei den gegebenen w_a existiert eine einzige Lösung von

$$(3,6) \qquad \text{a) } w_a = B_a^\lambda w_\lambda, \qquad \text{b) } w_\lambda \underset{a}{n}^\lambda = 0,$$

welche der Gleichung

$$(3,7) \qquad w_\lambda = B_\lambda^\nu w_\nu$$

genügt. Von einem solchen Vektor sagt man, daß er im $X_n^{(m)}$ liegt, und die w_a (welche mittels (1, 5b) bzw. (3, 6a) definiert sind) können als seine $X_n^{(m)}$-Bestimmungszahlen angesehen werden. Bemerkenswert ist, daß die Gleichungen (3, 6), (3, 7) auch ihre Form behalten, wenn man statt $\overset{a}{t}_\lambda$, $\underset{b}{n}^\nu$ die Vektoren $*\overset{a}{t}_\lambda$, $*\underset{b}{n}^\nu$ (Gleichung (2, 2), (3, 3)) nimmt. — Wir werden später insbesondere die im $X_n^{(m)}$ liegenden kovarianten Maßvektoren $\overset{c}{e}_\lambda$ gebrauchen. Ihre Bestimmungszahlen $\overset{c}{e}_a$ sind in dem gegebenen y-System (oder wenn es sich um einen anholonomen Raum handelt: in dem gegebenen System von Vektoren $\underset{a}{B}^\nu$) dem Kroneckerschen Delta gleich

$$(3,8) \qquad \overset{c}{e}_a = \delta_a^c.$$

Eine leichte Überlegung zeigt

$$(3,9) \qquad \overset{c}{e}_\omega \underset{c}{B}^\nu = B_\omega^\nu.$$

§ 4.

Die im L_n herrschende Konnexion mit den Koeffizienten $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ induziert im $X_n^{(m)}$ auch eine Konnexion, „die induzierte Konnexion". Wir bezeichnen ihre Koeffizienten mit Γ_{ba}^c und das Symbol der betreffenden

---

9) Vgl. (IV), S. 159.

kovarianten Ableitung mit ∇_a. Dann definieren wir die induzierte Konnexion folgendermaßen:

a) Für jeden beliebigen kovarianten Vektor w_λ im $X_n^{(m)}$ ist

(4, 1) $$\nabla_a w_b = B_a^u B_b^\lambda D_u w_\lambda.$$

b) Es ist

(4, 2) $$\nabla_a w_b = \partial_a w_b - \Gamma_{ba}^c w_c.$$

Aus diesen beiden Bedingungen lassen sich die verallgemeinerten Gaußschen Gleichungen für $X_n^{(m)}$ im L_n ableiten. Dazu brauchen wir aber zuerst die Relation

(4, 3) $$\begin{aligned} B_a^u B_b^\lambda D_u \overset{c}{e}_\lambda &= B_b^\lambda \partial_a \overset{c}{e}_\lambda - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \overset{c}{e}_\nu B_a^u B_b^\lambda \\ &= -\left(\partial_a \underset{b}{B^\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \underset{a}{B^u} \underset{b}{B^\lambda}\right) \overset{c}{e}_\nu = -\overset{c}{e}_\nu \underset{a}{B^u} D_\mu \underset{b}{B^\nu}. \end{aligned}$$

Nun gilt nach (4, 1) für $\overset{c}{e}_\lambda = w_\lambda$, in bezug auf (3, 8,) (4, 2)

(4, 4) $$\nabla_a \overset{c}{e}_b = B_a^u B_b^\lambda D_u \overset{c}{e}_\lambda = -\Gamma_{ba}^c$$

und infolgedessen nach (3, 9)

(4, 5) $$-\Gamma_{ba}^c \underset{c}{B^\nu} = -\overset{c}{e}_\omega \underset{a}{B^u} \underset{c}{B^\nu} D_\mu \underset{b}{B^\omega} = -B_\omega^\nu B_a^u D_\mu \underset{b}{B^\omega}.$$

Anderseits ist nach (2, 3) und (3, 1a)

(4, 6) $$\begin{aligned} \overset{a}{h}_{ab} \underset{a}{n^\nu} &= B_a^u B_b^\omega \left(D_\mu \overset{a}{t}_\omega\right) \underset{a}{n^\nu} \\ &= -\underset{a}{B^u} \overset{a}{t}_\omega \underset{a}{n^\nu} D_\mu \underset{b}{B^\omega}. \end{aligned}$$

Der Vergleich von (3, 5), (4, 5) und (4, 6) lehrt

(4, 7) $$\boxed{\Gamma_{ba}^c \underset{c}{B^\nu} - \overset{a}{h}_{ab} \underset{a}{n^\nu} = \underset{a}{B^u} D_\mu \underset{b}{B^\nu}}$$ [10]).

---

[10]) $\underset{a}{B^u} D_u \underset{b}{B^\nu}$ ist ein kontravarianter Vektor in bezug auf die Transformation $\bar{x} = \bar{x}(x)$. Derselbe Ausdruck stellt aber keinen Affinor in bezug auf (5, 3) dar. Führt man aber den Operatorkern L_a (Lagrange) ein, der auf einen im $X_n^{(m)}$ liegenden Affinor mit den gemischten Bestimmungszahlen v_b^ν folgendermaßen wirkt:

$$L_a v_b^\nu = \partial_a v_b^\nu + \Gamma_{\lambda\mu}^\nu v^\lambda B_a^u - \Gamma_{ba}^c v_c^\nu,$$

so kann man statt (4, 7) einfacher

$$L_a B_b^\nu = -\overset{a}{h}_{ab} \underset{a}{n^\nu}$$

schreiben. $L_a B_b^\nu$ ist dabei ein Vektor in bezug auf $\bar{x} = \bar{x}(x)$ und ein Affinor in bezug auf (5, 3). Diese Gleichung kommt in der Literatur oftmal vor. (Vgl. (I), (V), (VI) und auch (III)). Für unsere Zwecke ist aber die Form (4, 7) bequemer.

Diese Gleichungen können als eine direkte Verallgemeinerung der Gaußschen Gleichungen angesehen werden. In der Tat bekommt man aus (4, 7) für X_2 in R_3 (= euklidischer Raum, mit $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = 0$)

$$\Gamma^{c}_{ba}\,\partial_c x^{\nu} - \overset{3}{h}_{a\,b}\,\overset{3}{n}{}^{\nu} = \partial_a \partial_b x^{\nu},$$

also die Gaußschen Gleichungen. — Die am Anfang dieses Absatzes aufgestellten Bedingungen (4, 1) (4, 2) haben uns also zu den Gaußschen Gleichungen geführt. Man darf sich aber durch die *formale* Abwesenheit von $\overset{\nu}{n}$ in (4, 1) nicht irreführen lassen, da diese Gleichungen nur für einen im $X_n^{(m)}$ liegenden kovarianten Vektor gelten, und von solch einem kann nur dann die Rede sein, wenn die affinnormalen Vektoren bekannt sind.

§ 5.

Aus (4, 7) folgt nach (2, 3) (2, 4)

$$\Gamma^{c}_{ba}\,\overset{e}{h}_{dc} - \overset{a}{h}_{a\,b}\,\overset{\lambda}{n}\,\overset{\omega}{B}_{d}\,D_{\omega}\,\overset{e}{t}_{\lambda} = \overset{u}{B}_{a}\,\overset{\omega}{B}_{d}\left(D_{\mu}\,\overset{\lambda}{B}_{b}\right)\left(D_{\omega}\,\overset{e}{t}_{\lambda}\right), \tag{5, 1}$$

$$p\,\Gamma^{c}_{ba}\,\delta^{e}_{c} - \overset{d\,e}{h}\,\overset{a}{h}_{a\,b}\,\overset{\lambda}{n}\,\overset{\omega}{B}_{d}\,D_{\omega}\,\overset{e}{t}_{\lambda} = \overset{d\,e}{h}\,\overset{u}{B}_{a}\,\overset{\omega}{B}_{d}\left(D_{\mu}\,\overset{\lambda}{B}_{b}\right)\left(D_{\omega}\,\overset{e}{t}_{\lambda}\right);$$

so kommt endlich

$$\boxed{\Gamma^{e}_{ba} = \frac{1}{p}\,\overset{d\,e}{h}\,\overset{\omega}{B}_{d}\left(D_{\omega}\,\overset{e}{t}_{\lambda}\right)\left(\overset{a}{h}_{a\,b}\,\overset{\lambda}{n} + \overset{u}{B}_{a}\,D_{\mu}\,\overset{\lambda}{B}_{b}\right)}\;. \tag{5, 2}$$

Diese Formel für die Koeffizienten Γ^{e}_{ba} gibt uns zugleich an, auf welche Weise die Wahl der affinnormalen Vektoren $\overset{\nu}{n}$ die induzierte Konnexion beeinflußt. Eine leichte Rechnung zeigt, daß bei

$$'\overset{\nu}{B}_{a} = q^{i}_{a}\,\overset{\nu}{B}_{i} \tag{5, 3}$$

sich die Γ^{e}_{ba} nach

$$'\Gamma^{e}_{ba} = p^{e}_{j}\,q^{k}_{b}\,q^{i}_{a}\,\Gamma^{j}_{kl} + p^{e}_{j}\left(\partial_i q^{j}_{b}\right)q^{i}_{a}\,^{11}) \tag{5, 4}$$

transformieren, so daß

$$T^{\nu}_{ba} = \Gamma^{c}_{[ba]}\,\overset{\nu}{B}_{c} - \partial_{[a}\,B^{\nu}_{b]} \tag{5, 5}$$

---

[11]) Die Koeffizienten p^{a}_{b} sind aus $p^{a}_{j}\,q^{j}_{b} = p^{j}_{b}\,q^{a}_{j} = \delta^{a}_{b}$ zu berechnen.

ein Affinor ist. Führt man noch dazu den Affinor $S^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{[\lambda\mu]}$ ein, so bekommt man aus (4, 7)

$$T^{\nu}_{ba} = S^{\nu}_{\lambda\mu}\, B^{\lambda}_{b}\, B^{\mu}_{a} + \overset{a}{h}_{[a\,b]}\, \overset{a}{n}{}^{\nu}. \tag{5, 6}$$

Diese Formel, welche uns den Zusammenhang zwischen beiden Torsionsaffinoren T^{ν}_{ba} und $S^{\nu}_{\lambda\mu}$ angibt, habe ich in etwas abgeänderter Form schon früher abgeleitet [12]).

Den Raum $X_n^{(m)}$, der mit der Konnexion (5, 2) versehen ist, werden wir von nun an mit $L_n^{(m)}$ bezeichnen. Aus den Gleichungen (4, 7) lassen sich auch die affinnormalen Vektoren des $L_n^{(m)}$ berechnen. Es ist nämlich laut (2, 5)

$$\overset{e}{k}_{a\,e}\, n^{\nu} = h^{a\,b}_{a}\left(\Gamma^{c}_{b\,a}\, B^{\nu}_{c} - B^{\mu}_{a}\, D_{\mu}\, B^{\nu}_{b}\right), \tag{5, 7}$$

so daß nach (2, 6)

$$\boxed{n^{\nu}_{a} = h^{a\,b}_{e}\, \overset{e}{l}_{a}\left(\Gamma^{c}_{b\,a}\, B^{\nu}_{c} - B^{\mu}_{a}\, D_{\mu}\, B^{\nu}_{b}\right)} \tag{5, 8}$$

gilt. Diese Formel lehrt uns, daß man zu einem *gegebenen* Raume $L_n^{(m)}$ *eindeutig* die affinnormalen Vektoren auffinden kann. Diese Vektoren induzieren die gegebene Konnexion im $L_n^{(m)}$.

Wenn $p = 1$, das ist $m = n - 1$, so vereinfachen sich die Formeln (5, 2) und (5, 8) zu

$$\boxed{\Gamma^{e}_{b\,a} = h^{d\,e}\, B^{\omega}_{d}\,(D_{\omega} t_{\lambda})\left(h_{a\,b}\, n^{\lambda} + B^{\mu}_{a}\, D_{\mu}\, B^{\lambda}_{b}\right)} \tag{5, 2}'$$

und

$$\boxed{n^{\nu} = \frac{h^{a\,b}}{n-1}\left(\Gamma^{c}_{b\,a}\, B^{\nu}_{c} - B^{\mu}_{a}\, D_{\mu}\, B^{\nu}_{b}\right)}\,. \tag{5, 8}'$$

Hier hat man statt $h^{a\,b}_{n}$, $\overset{n}{h}_{a\,b}$, n^{ν}_{n}, $\overset{n}{t}_{\lambda}$, einfacher $h^{a\,b}$, $h_{a\,b}$, n^{ν}, t_{λ} gesetzt und die Relationen

$$\overset{n}{k}_{n} = n - 1, \quad \overset{n}{l}_{n} = \frac{1}{n-1} \tag{5, 9}$$

benutzt. — Zusammenfassend können wir folgenden Satz aussprechen:

---

[12]) (II), S. 4. In dem nichtholonomen Falle liegt T^{ν}_{ba} mit seinem Index ν ***nicht*** im X_n^m.

Zu jedem System von affinnormalen Vektoren läßt sich bei den festgehaltenen $\overset{a}{t}_\lambda$ *eindeutig eine induzierte Konnexion in dem gegebenen Raume* $X_n^{(m)}$ *bestimmen. Umgekehrt läßt sich zu jeder gegebenen Konnexion im* $X_n^{(m)}$ *bei den festgehaltenen* $\overset{a}{t}_\lambda$ *eindeutig ein System von affinnormalen Vektoren aufsuchen, welche diese Konnexion im* $X_n^{(m)}$ *induzieren.*

§ 6.

Setzt man

$$\boxed{\mathring{\Gamma}^e_{ba} = \frac{1}{p}\, \underset{e}{h}^{de}\, \underset{d}{B}^{\omega}\, \underset{a}{B}^{\mu} \left(D_\omega \overset{e}{t}_\lambda\right) D_\mu \underset{b}{B}^{\lambda}} \tag{6, 1}$$

so bekommt man bei der Transformation (5, 3)

$$'\mathring{\Gamma}^e_{ba} = p^e_j\, q^k_b\, q^i_a\, \mathring{\Gamma}^j_{ki} + p^e_j\, q^i_a\, \partial_i q^j_b, \tag{6, 2}$$

so daß die Koeffizienten $\mathring{\Gamma}^e_{ba}$ eine Konnexion bilden, die wir als „eingeborene Konnexion" des Raumes $X_n^{(m)}$ bezeichnen werden. Die eingeborene Konnexion ist also schon durch die Angabe des Raumes $X_n^{(m)}$ im L_n mitgegeben. Die allgemeine (von einem System der affinnormalen Vektoren $\underset{a}{n}^\nu$) induzierte Konnexion Γ^e_{ba} hängt mit $\mathring{\Gamma}^e_{ba}$ folgendermaßen zusammen:

$$\Gamma^e_{ba} = \mathring{\Gamma}^e_{ba} + \frac{1}{p}\, \underset{e}{h}^{de}\, \underset{d}{B}^{\omega} \left(D_\omega \overset{e}{t}_\lambda\right) \underset{a}{\overset{a}{h}}_{ab}\, \underset{a}{n}^\lambda . \tag{6, 3}$$

Die eingeborene Konnexion kann ihrerseits auch als eine induzierte Konnexion angesehen werden. Die affinnormalen Vektoren, welche sie induzieren, bezeichnen wir mit $\underset{a}{\mathring{n}}^\nu$. Es ist nach (5, 8)

$$\underset{a}{\mathring{n}}^\nu = \underset{e}{h}^{ab}\, \overset{e}{\underset{a}{l}} \left(\mathring{\Gamma}^c_{ba}\, \underset{c}{B}^\nu - \underset{a}{B}^{\mu}\, D_\mu \underset{b}{B}^\nu\right), \tag{6, 4a}$$

oder also laut (6, 2)

$$\boxed{\underset{a}{\mathring{n}}^\nu = \underset{e}{h}^{ab}\, \overset{e}{\underset{a}{l}}\, \underset{a}{B}^{u} \left[\frac{1}{p}\, \underset{c}{B}^\nu\, \underset{d}{B}^{\omega}\, \underset{g}{h}^{dc} \left(D_\omega \overset{g}{t}_\lambda\right) D_\mu \underset{b}{B}^{\lambda} - D_\mu \underset{b}{B}^\nu\right]} . \tag{6, 4b}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\underset{g}{\mathring{n}}^\nu\, \underset{c}{B}^{\alpha}\, D_\alpha \overset{a}{t}_\nu = \underset{e}{h}^{ab}\, \overset{e}{\underset{g}{l}}\, \underset{d}{B}^{\omega}\, \underset{a}{B}^{\mu} \left(D_\omega \overset{b}{t}_\lambda\right) \left(D_\mu \underset{b}{B}^{\lambda}\right) \left(\frac{1}{p}\, \underset{b}{\overset{a}{h}}_{ce}\, \underset{b}{h}^{de} - \delta^d_c\, \delta^a_b\right), \tag{6, 5}$$

so daß für $p = 1$ (das ist $m = n - 1$)

$$\overset{\circ}{n}{}^{\nu}\, \underset{c}{B}{}^{\alpha}\, D_{\alpha} t_{\nu} = 0 \tag{6, 6}$$

ist. Diese Gleichung ist bekannt als „die zweite Normierungsbedingung“ [13]). Dagegen gilt aber immer, auch für $p \neq 1$, laut (6, 5)

$$\underset{a}{h}{}^{ci}\, \underset{g}{\overset{\circ}{n}}{}^{\nu}\, \underset{c}{B}{}^{\alpha}\, D_{\alpha} \overset{a}{t}_{\nu} = 0. \tag{6, 7 a}$$

Man kann fragen, ob die Gleichungen (6, 7 a) zusammen mit

$$\underset{b}{\overset{\circ}{n}}{}^{\lambda}\, \overset{a}{t}_{\lambda} = \delta^{a}_{b} \tag{6, 7 b}$$

auch eine andere Lösung $\underset{b}{\overset{\circ}{n}}{}^{\nu}$ gestatten. Aus (6, 7 b) folgt sofort, daß

$$\underset{b}{\overset{\circ}{n}}{}^{\nu} = \overset{\circ}{n}{}^{\nu} + \underset{b}{s}{}^{a}\, \underset{a}{B}{}^{\nu}$$

sein muß, wo $\underset{b}{s}{}^{a}$ ein beliebiger Vektor im $X_n^{(m)}$ ist. Geht man mit diesem Wert in die zur (6, 7 a) analoge Gleichung ein, so bekommt man

$$\underset{a}{B}{}^{\nu}\, \underset{c}{B}{}^{\alpha} \left(D_{\alpha} \overset{a}{i}_{\nu} \right) \underset{a}{h}{}^{ci}\, \underset{g}{s}{}^{a} = \overset{a}{h}_{ca}\, \underset{a}{h}{}^{ci}\, \underset{g}{s}{}^{a} = p\, \underset{g}{s}{}^{i} = 0.$$

Die Gleichungen (6, 7) lassen also nur eine Lösung zu, und zwar die Lösung (6, 4). Somit gilt für die festgehaltenen Vektoron $\overset{a}{t}_{\lambda}$ der folgende Satz:

Durch die Angabe des Raumes $X_n^{(m)}$ im L_n wird sogleich die eingeborene Konnexion $\mathring{\Gamma}^{e}_{ba}$ (6, 1) mitgegeben. Diese Konnexion wird induziert durch das einzige System von affinnormalen Vektoren $\underset{a}{\overset{\circ}{n}}{}^{\nu}$, welche mittels (6, 7) *bestimmt sind. Diese Lösung von* (6, 7) *ist* (6, 4).

Durch diesen Satz ist also jedem System von $\overset{a}{t}_{\lambda}$ ein einziges System von affinnormalen Vektoren $\underset{a}{\overset{\circ}{n}}{}^{\nu}$ zugeordnet. Ist $p = 1$, so vereinfacht sich die Formel (6, 4) zu

$$\boxed{\overset{\circ}{n}{}^{\nu} = \frac{1}{n-1}\, h^{ab}\, \underset{a}{B}{}^{\mu} \left[\underset{c}{B}{}^{\nu}\, \underset{d}{B}{}^{\omega}\, h^{dc} (D_{\omega} t_{\lambda})\, D_{\mu}\, \underset{b}{B}{}^{\lambda} - D_{\mu}\, \underset{b}{B}{}^{\nu} \right]}. \tag{6, 8}$$

Wenn außerdem die Konnexion von L_n eine inhaltstreue ist, so läßt sich im L_n ein konstantes n-Vektorfeld angeben, mit Hilfe dessen man auch

---

[13]) (IV), S. 141.

den noch frei gebliebenen Faktor $\overset{n}{P} = P$ in (2, 2a) bestimmen kann. Zu dem Vektor $*t_\lambda$ gehört dann eindeutig der affinnormale Vektor $*\mathring{n}^\nu$, der aus (6, 8) für $*t_\lambda$ zu bestimmen ist [14]).

§ 7.

Wir wollen jetzt festsetzen, wie sich die eben betrachteten Begriffe ändern, wenn man die Konnexion von L_n bahntreu transformiert. Unter einer bahntreuen Transformation der Konnexion $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ verstehen wir die folgende Transformation

$$\Gamma'^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + \delta^\nu_\lambda p_\mu + \delta^\nu_\mu q_\lambda \tag{7, 1}$$

mit beliebigen Vektoren p_λ, q_λ. Nun ist

$$\underset{d}{B^\omega} D'_\omega \overset{e}{t_\lambda} = \underset{d}{B^\omega} D_\omega \overset{e}{t_\lambda} - \underset{d}{B^\omega} p_\omega \overset{e}{t_\lambda}, \tag{7, 2a}$$

$$\underset{a}{B^\mu} D'_\mu \underset{b}{B^\lambda} = \underset{a}{B^\mu} D_\mu \underset{b}{B^\lambda} + \underset{b}{B^\lambda} \underset{a}{B^\mu} p_\mu + \underset{a}{B^\lambda} \underset{b}{B^\mu} q_\mu,$$

und also

$$\overset{e}{h'_{d\,b}} = B^\omega_d B^\lambda_b D'_\omega \overset{e}{t_\lambda} = \overset{e}{h}_{d\,b}, \quad \underset{e}{h'^{a\,b}} = \underset{e}{h^{a\,b}}, \tag{7, 2b}$$

wenn D'_μ der symbolische Vektor der kovarianten Ableitung mit $\Gamma'^\nu_{\lambda\mu}$ ist. Somit haben wir für die neue eingeborene Konnexion $\mathring{\Gamma}'^{\,e}_{b\,a}$ laut (6, 1)

$$\begin{aligned} \mathring{\Gamma}'^{\,e}_{b\,a} &= \frac{1}{p} \underset{e}{h^{d\,e}} \underset{d}{B^\omega} \underset{a}{B^\mu} \left(D'_\omega \overset{e}{t_\lambda} \right) D'_\mu \underset{b}{B^\lambda} \\ &= \mathring{\Gamma}^e_{b\,a} + p_a \delta^e_b + q_b \delta^e_a + \frac{1}{p} p_e \overset{e}{h}_{a\,b} \underset{e}{h^{c\,e}} \end{aligned} \tag{7, 3}$$

mit

$$p_a = B^\lambda_a p_\lambda, \qquad q_b = B^\lambda_b q_\lambda.$$

Um die neuen dazugehörigen affinnormalen Vektoren $\mathring{n}'^\nu$ zu berechnen, können wir entweder die zur (6, 4) analoge Formel benutzen oder von den Gleichungen

$$\text{a) } \underset{b}{\mathring{n}'^\lambda} \overset{a}{t_\lambda} = \delta^a_b, \qquad \text{b) } \underset{a}{h^{c\,i}} \underset{g}{\mathring{n}'^\nu} \underset{c}{B^\alpha} D'_\alpha \overset{a}{t_\nu} = 0 \tag{7, 4}$$

---

[14]) (IV), S. 145, wo eine andere Berechnung von $\mathring{n}^\nu$ für diesen speziellen (und holonomen) Fall ausgeführt wird. Dabei wird der Gebrauch von der „Inhaltstreue" gemacht und die endgültige Schoutensche Formel enthält auch die Krümmungsgröße.

ausgehen. Nach der ersten ist

$$\overset{\circ}{n}{}'^{\nu}_{a} = \overset{\circ}{n}{}^{\nu}_{a} + B^{\nu}_{a} s^{a}_{a},$$

und geht man mit diesem Wert in die zweite ein, so ergibt sich

(7, 4) $$\text{c)} \quad s^{a}_{a} = \frac{1}{p}\, p_c h^{ca}_{a},$$

so daß schließlich

(7, 5) $$\overset{\circ}{n}{}'^{\nu}_{a} = \overset{\circ}{n}{}^{\nu}_{a} + \frac{1}{p}\, h^{ca}_{a} p_c B^{\nu}_{a}$$

wird. Aus den Formeln (7, 3) und (7, 5) erhellt:

Wenn die Vektoren p_λ und q_λ in dem p-Vektor $\overset{m+1\ m+2 \qquad n}{t_{[\lambda_1}\ t_{\lambda_2} \ldots t_{\lambda_p]}}$ enthalten sind, so ist die eingeborene Konnexion, sowie die dazugehörigen affinnormalen Vektoren $\overset{0}{\underset{a}{n}}{}^{\nu}$ bei allen bahntreuen Transformationen (7, 1) *der Konnexion von L_n invariant.*

Bemerkenswert ist, daß die Transformation (7, 3) allgemein *nicht* eine bahntreue ist.

§ 8.

Kehren wir jetzt zu der allgemeinen induzierten Konnexion zurück! Wir fragen nun, wie sich die Konnexion (5, 2) ändert, wenn man zugleich

a) die Vektoren $\overset{a}{t}_{\lambda}$ nach (2, 2a),

b) die Vektoren $\underset{a}{n}{}^{\nu}$ nach (3, 4) und

c) die Konnexion von L_n nach (7, 1) transformiert.

Bezeichnet man mit $*\widetilde{\Gamma}'^{e}_{ba}$ die zu diesen drei Abänderungen gehörige Konnexion, so ist nach (4, 7)

$$*\widetilde{\Gamma}'^{c}_{ba}\, B^{\nu}_{c} - \overset{a}{\underset{b}{P}}\, \overset{b}{h}_{ab}\, \overset{e}{\underset{a}{Q}} (\underset{e}{n}{}^{\nu} + B^{\nu}_{d}\, s^{d}_{e}) = B^{\mu}_{a} D_{\mu} B^{\nu}_{b} + B^{\nu}_{b} p_a + B^{\nu}_{a} q_b$$

oder

$$B^{\nu}_{c} [*\widetilde{\Gamma}'^{c}_{ba} - (\Gamma^{c}_{ba} + \overset{e}{h}_{ab}\, s^{c}_{e} + \delta^{c}_{b} p_a + \delta^{c}_{a} q_b)] = 0.$$

Somit ist

(8, 1) $$*\widetilde{\Gamma}'^{c}_{ba} = \Gamma^{c}_{ba} + \overset{e}{h}_{ab}\, s^{c}_{e} + \delta^{c}_{b} p_a + \delta^{c}_{a} q_b,$$

und diese Gleichung enthält die drei folgenden als einen Spezialfall:

$$(8,1\,a) \qquad {}^{*}\Gamma^{c}_{ba} = \Gamma^{c}_{ba},$$

$$(8,1\,b) \qquad \widetilde{\Gamma}^{c}_{ba} = \Gamma^{c}_{ba} + \overset{e}{h}_{ab}\,\overset{c}{s}_{e},$$

$$(8,1\,c) \qquad \Gamma'^{c}_{ba} = \Gamma^{c}_{ba} + \delta^{c}_{b}p_{a} + \delta^{c}_{a}q_{b}.$$

Dementsprechend gilt der folgende Satz:

Die von dem System der affinnormalen Vektoren $\overset{a}{n}{}^{\nu}$ *induzierte Konnexion*

a) *ist bei der Transformation*

$$(8,2\,a) \qquad {}^{*}\overset{a}{t}_{\lambda} = \overset{a}{\underset{b}{P}}\,\overset{b}{t}_{\lambda}, \quad {}^{*}\overset{a}{n}{}^{\nu} = \overset{a}{\underset{b}{Q}}\,\overset{b}{n}{}^{\nu}$$

invariant,

b) *ändert sich mit*

$$(8,2\,b) \qquad \widetilde{\overset{a}{t}}_{\lambda} = \overset{a}{t}_{\lambda}, \quad \widetilde{\overset{a}{n}}{}^{\nu} = \overset{a}{n}{}^{\nu} + \overset{\nu}{B}_{a}\,\overset{a}{s},$$

nach (8,1 b) *und*

c) *transformiert sich infolge von*

$$(8,2\,c) \qquad \overset{a}{t'}_{\lambda} = \overset{a}{t}_{\lambda}, \quad \overset{a}{n'}{}^{\nu} = \overset{a}{n}{}^{\nu}, \quad \Gamma'^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} + \delta^{\nu}_{\lambda}p_{\mu} + \delta^{\nu}_{\mu}q_{\lambda}$$

nach (8,1 c).

Die Formel (8,1) muß natürlich mit (7, 3) übereinstimmen, wenn man für $\overset{a}{s}$ den Wert (7,4 c) nimmt und ${}^{*}\overset{a}{t}_{\lambda} = \overset{a}{t}_{\lambda}$ setzt.

§ 9.

Wir wollen jetzt den Spezialfall $p = 1$ (das ist $m = n - 1$) gesondert behandeln und fragen, wie sich die eingeborene Konnexion sowie der dazugehörige affinnormale Vektor ändert, wenn der Vektor t_{λ} die Transformation (2, 2 a) erleidet. In unserem Spezialfall kann man statt (2, 2 a) einfacher

$$(9,1) \qquad {}^{*}t_{\lambda} = P\,t_{\lambda}$$

schreiben und infolgedessen statt (2, 7)

$$(9,2) \qquad {}^{*}h_{ab} = P\,h_{ab}$$

setzen. Es ist somit auch

$$(9,3) \qquad {}^{*}h^{ab} = Q\,h^{ab}, \quad (PQ = 1).$$

Die Gleichung (6, 1) liefert uns also

$$(9,4)\qquad {}^{*}\mathring{\Gamma}^{e}_{ba} = {}^{*}h^{de}\,\underset{d}{B}^{\omega}\,\underset{a}{B}^{u}\,(D_{\omega}\,{}^{*}t_{\lambda})\,D_{\mu}\,\underset{b}{B}^{\lambda} = \hat{\Gamma}^{e}_{ba} - h_{ab}\,h^{de}\,\partial_{d}\log P.$$

Aus dieser Formel folgt nach (6, 4 a)

$$(9,5)\qquad {}^{*}\mathring{n}^{\nu} = Q\,(\mathring{n}^{\nu} - \underset{e}{B}^{\nu}\,h^{de}\,\partial_{d}\log P).$$

Weder die eingeborene Konnexion noch der Vektor $\overset{0}{n}{}^{\nu}$ ist also bei (9, 1) invariant. Aus der Gleichung (9, 4) kann man aber $\partial_d \log P$ eliminieren, und diese Elimination führt uns zu den Koeffizienten Λ^{e}_{ba}, welche gegenüber (9, 1) invariant sind:

$$(9,6)\qquad \Lambda^{e}_{ba} = \mathring{\Gamma}^{e}_{ba} - \hat{\Gamma}^{c}_{cd}\,h_{ab}\,h^{de}.$$

Aus dieser Formel folgt unmittelbar der Satz:

Läßt man nur solche Transformationen (5, 3) *zu, bei welchen die Determinante* $|q^{i}_{a}| = const.$, *so stellt der Inbegriff von* Λ^{e}_{ba} *eine Konnexion des Raumes* $X_n^{(n-1)}$ *dar, welche bei* (9, 1) *invariant ist.*

Die Richtung des affinnormalen Vektors m^{ν}, der diese Konnexion induziert, ist ebenfalls bei (9, 1) invariant. Der Vektor m^{ν} selbst ist nach (5, 8)′ mittels

$$(9,7)\qquad m^{\nu} = \frac{h^{ab}}{n-1}\,(\mathring{\Gamma}^{c}_{ba}\,\underset{c}{B}^{\nu} - \mathring{\Gamma}^{c}_{ed}\,h_{ab}\,h^{dc}\,\underset{c}{B}^{\nu} - \underset{a}{B}^{u}\,D_{\mu}\,\underset{b}{B}^{\nu})$$

gegeben. — Es ist mir bis jetzt nicht gelungen auch im allgemeinen Falle der Transformation (5, 3) eine in bezug auf (9, 1) invariante Konnexion ausfindig zu machen.

§ 10.

Wir wollen diese Betrachtungen mit einem Existenztheorem schließen. Zu diesem Zwecke fragen wir zuerst nach den Integrabilitätsbedingungen von (2, 3) (natürlich wieder für $p \geqq 1$). Man bekommt sie unter Beachtung von (5, 5) und (5, 6) in der Form

$$(10,1)\qquad \nabla_{[f}\overset{a}{h}_{a]b} = \tfrac{1}{2}\,\underset{[f}{B}^{\omega}\,\underset{a]}{B}^{u}\,\underset{b}{B}^{\lambda}\,\overset{a}{t}_{\nu}\,R^{\nu}_{\omega u\lambda} + \overset{a}{t}_{\lambda}\,\underset{[a}{B}^{u}\,\overset{e}{h}_{f]b}\,D_{\mu}\,\underset{e}{n}^{\lambda} + \overset{a}{t}_{\lambda}\,T^{u}_{af}\,D_{\mu}\,\underset{b}{B}^{\lambda}\,{}^{15}),$$

wenn $R^{\nu}_{\omega u\lambda}$ die Krümmungsgröße von L_n darstellt. — Sodann wollen wir die Integrabilitätsbedingungen von (4, 7) aufsuchen. Als erstes System ergibt sich (wieder unter Beachtung von (5, 5) und (5, 6))

$$(10,2)\qquad \underset{[f}{B}^{\omega}\,\underset{a]}{B}^{u}\,\underset{b}{B}^{\lambda}\,R^{\nu}_{\omega u\lambda} = P^{\nu}_{fab} + 2\,\underset{e}{n}^{\nu}\,\nabla_{[f}\overset{c}{h}_{a]b} + 2\,(D_{\mu}\,\underset{e}{n}^{\nu})\,\underset{[f}{B}^{u}\,\overset{e}{h}_{a]b},$$

---

[15]) Siehe (V), S. 167.

wo

$$(10,3)\qquad \tfrac{1}{2}\,P^{\nu}_{\varphi a b} = (\partial_{[a}\,\Gamma^{d}_{|b|\varphi} + \Gamma^{c}_{b[\varphi}\Gamma^{d}_{|c|a]} + \Gamma^{c}_{[a\varphi}\Gamma^{d}_{bc})\,\underset{d}{B^{\nu}} + T^{u}_{\varphi a}\,D_{\mu}\,\underset{b}{B^{\nu}}$$

die Krümmungsgröße von $L_n^{(m)}$ ist[16]). Die Überschiebung von (10, 2) mit $\overset{a}{t}_{\lambda}$ gibt wieder (10, 1), so daß (10, 1) eine Folge von (10, 2) ist. Während die ersten Gleichungen „das Codazzische System" bilden, kann man aus den letzten die Verallgemeinerung von „Theorema egregium" bilden:

$$(10,4)\qquad B^{\omega}_{[\varphi}\,B^{u}_{a]}\,B^{\lambda}_{b}\,B^{\varrho}_{\nu}\,R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = B^{\varrho}_{\nu}\,P^{\nu}_{\varphi a b} + 2\,B^{\varrho}_{\nu}\,(D_{\omega}\,\underset{e}{n^{\nu}})\,B^{\omega}_{[\varphi}\,\overset{e}{h}_{a]b}\,{}^{15}).$$

Wenn es sich um einen holonomen Raum handelt, so läßt sich $P^{\nu}_{\varphi a b}$ in zwei Affinoren zerlegen:

$$(10,5)\qquad \begin{cases} K^{\nu}_{\varphi a b} = K^{d}_{\varphi a b}\,\underset{d}{B^{\nu}}, \quad \text{wo} \quad K^{d}_{\varphi a b} = 2\,(\partial_{[a}\,\Gamma^{d}_{|b|\varphi} + \Gamma^{c}_{b[\varphi}\,\Gamma^{d}_{|c|a]}), \\ \Gamma^{c}_{[a\varphi}\Gamma^{d}_{bc}\,\underset{d}{B^{\nu}} + \underset{c}{B^{\mu}}\,\Gamma^{c}_{[\varphi a]}\,D_{\mu}\,\underset{b}{B^{\nu}} = T^{c}_{a\varphi}\,\overset{e}{h}_{cb}\,\underset{e}{n^{\nu}}, \quad \text{wo} \quad T^{c}_{a\varphi} = \Gamma^{c}_{[a\varphi]}. \end{cases}$$

Die Größen $K^{d}_{\varphi a b}$, $T^{c}_{a\varphi}$ sind die Krümmungsgröße und die Torsionsgröße von L_m. Die Gleichungen (5, 6), (10, 1) und (10, 2) lassen sich dann schreiben:

$$\mathrm{I}_0\qquad T^{\nu}_{ba} = \Gamma^{c}_{[ba]}\,\underset{c}{B^{\nu}} = S^{\nu}_{\lambda\mu}\,B^{\lambda}_{b}\,B^{u}_{a} + \overset{a}{h}_{[ab]}\,\underset{a}{n^{\nu}},$$

$$\mathrm{I}_1^{*}\qquad \nabla_{[\varphi}\,\overset{a}{h}_{a]b} = \tfrac{1}{2}\,B^{\omega}_{[\varphi}\,B^{u}_{a]}\,B^{\lambda}_{b}\,\overset{a}{t}_{\nu}\,R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} + \overset{a}{t}_{\lambda}\,B^{u}_{[a}\,\overset{e}{h}_{\varphi]b}\,D_{\mu}\,\underset{e}{n^{\lambda}} + T^{c}_{\varphi a}\,\overset{a}{h}_{cb},$$

$$\mathrm{I}_1\qquad B^{\omega}_{[\varphi}\,B^{u}_{a]}\,B^{\lambda}_{b}\,R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = K^{c}_{\varphi a b}\,B^{\nu}_{c} + 2\,(\nabla_{[\varphi}\,\overset{e}{h}_{a]b})\,\underset{e}{n^{\nu}} + 2\,B^{\omega}_{[\varphi}\,\overset{e}{h}_{a]b}\,D_{\omega}\,\underset{e}{n^{\nu}} + 2\,T^{c}_{a\varphi}\,\overset{e}{h}_{cb}\,\underset{e}{n^{\nu}}.$$

Während die Gleichungen (5, 6), (10, 1), (10, 2) für einen *nicht* holonomen Raum außer B^{ν}_{b} noch die Ableitungen $\dfrac{\partial}{\partial x^{u}}\,B^{\nu}_{b}$ enthalten, sind die entsprechenden Gleichungen I_0, I_1^{*}, I_1 für einen *holonomen* Raum von diesen Ableitungen frei. Diesen Tatbestand wollen wir benutzen, um die Frage zu beantworten, wann sich aus den Elementen $\overset{a}{h}_{ab}$, $\underset{e}{n^{\nu}}$, Γ^{c}_{ba} ein holonomer Raum L_m konstruieren läßt.

Die Integrabilitätsbedingungen von $\dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{a}} = B^{\nu}_{a}$ lassen sich auf die Form I_0 bringen. Die Integrabilitätsbedingungen von (4, 7), das ist in unserem Falle

$$(10,6)\qquad \frac{\partial}{\partial y^{a}}\,B^{\nu}_{b} = \Gamma^{c}_{ba}\,B^{\nu}_{c} - \overset{a}{h}_{ab}\,\underset{a}{n^{\nu}} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\,B^{\lambda}_{b}\,B^{u}_{a},$$

[16]) So wie T^{ν}_{ba}, auch $P^{\nu}_{\varphi a b}$ liegt im nicht-holonomen Falle mit seinem Index ν *nicht* im L_n^m.

lassen sich wieder mit Hilfe von I_0 auf die Form I_1 bringen. Die Ableitungen von I_0, I_1 enthalten außer B_c^ν noch $\frac{\partial}{\partial y^d} B_c^\nu$. Die letzten kann man aber mit Hilfe von (10, 6) auseliminieren. Das so entstandene System bezeichnen wir mit I_2. Aus I_2 bekommt man durch dasselbe Verfahren ein neues System I_3 usw. Nun lassen sich bekanntlich die Integrabilitätsbedingungen von (10, 6) folgendermaßen formulieren [17]): Es existiert eine endliche ganze Zahl z so, daß die Systeme $I_0, \ldots, I_z$ in den unbekannten x^ν, B_c^ν widerspruchsfrei sind und die Elimination von x^ν, B_c^ν aus ihnen zu einem widerspruchsfreien Resultate führt. — Sind diese Bedingungen erfüllt, so können wir die $x^\nu = x^\nu(y)$ und B_a^ν aufsuchen. Aus den B_b^ν können wir dann auch die Vektoren $\overset{a}{*t}_\lambda$ konstruieren, und zwar nach

$$B_b^\lambda \overset{a}{*t}_\lambda = 0.$$

Diese Vektoren sind mit den Vektoren $\overset{a}{t}_\lambda$ mittels (2, 2) gebunden, und die Koeffizienten $\overset{a}{\underset{b}{P}}$ sind also mittels

$$\overset{a}{*t}_\lambda \underset{b}{n}^\lambda = \overset{a}{\underset{b}{P}}$$

zu bestimmen. Aus diesen lassen sich dann die $\overset{a}{\underset{b}{Q}}$ berechnen. Endlich hat man also zu den $\underset{e}{n}^\nu$ gehörigen Vektoren $\overset{a}{t}_\lambda$ aus (2, 2 b). Diese Vektoren bestimmen auch die $\overset{a}{h}_{ab}$ nach (2, 3) weil die Integrabilitätsbedingungen von diesen Gleichungen, das ist I_1^*, infolge von I_1 schon erfüllt sind. (In diesen Integrabilitätsbedingungen sind aber die B_c^ν und $\overset{a}{t}_\lambda$ beide schon bekannt.) Den Inbegriff der $\overset{c}{h}_{ab}$, die auf diese Weise nach (2, 3) bestimmt sind, nennen wir „das Fundamentalsystem" des Raumes L_m. Zusammenfassend können wir also den folgenden Satz formulieren:

Gegeben sei in einem L_n

a) *ein System von Affinoren $\overset{c}{h}_{ab} = \overset{c}{h}_{ab}(y)$, welche den im § 2 aufgestellten Bedingungen genügen,*

b) *ein System von p linear unabhängigen Vektoren $\underset{e}{n}^\nu = \underset{e}{n}^\nu(y)$ und*

c) *ein System von Koeffizienten $\Gamma_{ba}^c = \Gamma_{ba}^c(y)$, welche sich als Koeffizienten einer Konnexion transformieren.*

---

[17]) Genaue Formulierung weiter unten. Vgl. (VIII), S. 17.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß man im L_n einen holonomen Raum L_m $(m < n)$ konstruieren kann, der

a) *das Fundamentalsystem* $\overset{e}{h}_{ab}$ *hat,*

b) *die affinnormalen Vektoren* $\overset{e}{n}{}^{\nu}$ *besitzt*

c) *und in welchem die Vektoren* $\overset{e}{n}{}^{\nu}$ *die — aus den Koeffizienten* Γ^{c}_{ba} *gebildete — Konnexion induzieren,*

ist: Es existiert eine endliche ganze Zahl $z \leq n(m+1)$ *so, daß das System* $I_0, \ldots, I_{z-1}$ *(dessen Konstruktion oben angegeben wurde) in den Unbekannten* x^{ν}, B^{ν}_{c} *widerspruchsfrei ist und die Elimination von* x^{ν}, B^{ν}_{c} *aus* $I_0, \ldots, I_z$ *die Identität ergibt*[18]).

[18]) Andere Existenztheoreme befinden sich in (I). Wir sind hier dem Gedankengang dieser Arbeit bei der Ableitung unseres Theorems gefolgt.

(Eingegangen am 2. November 1932)

Eine neue Anwendung der Darstellung einer endlichen Gruppe als monomiale Matrizengruppe.

Von

W. K. Turkin in Moskau.

Wie bekannt, zeigte W. Burnside, auf welche Weise man eine Darstellung einer abstrakten Gruppe endlicher Ordnung durch eine monomiale Matrizengruppe erhalten kann. Mit Hilfe einer solchen Darstellung hatte er folgendes bekannte Theorem bewiesen.

Ist die Sylowsche Untergruppe von der Ordnung p^α einer Gruppe im Zentrum ihres Normalisators enthalten, so enthält diese Gruppe einen Normalteiler vom Index p^α.

Beweise kann man in den Lehrbüchern von W. Burnside[1]), O. Schmidt[2]) und A. Speiser[3]) finden. Dieses Theorem ist sehr wichtig für alle Untersuchungen über Einfachheit und Auflösbarkeit der Gruppen. In der vorliegenden Arbeit wollen wir mit Hilfe der Darstellung einer abstrakten Gruppe durch eine monomiale Matrizengruppe ein anderes Theorem beweisen, das, nach unserer Meinung, in Untersuchungen von der oben erwähnten Art auch nützlich sein kann.

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von zusammengesetzter Ordnung n. Sei $\mathfrak{P}$ eine der Sylowschen Untergruppen von der Ordnung p^α der Gruppe $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe von der Ordnung $p^{\alpha-1}$ der Gruppe $\mathfrak{P}$. Unter allen Elementen von $\mathfrak{P}$, die nicht in $\mathfrak{A}$ enthalten sind, nehmen wir jene, deren Ordnung am größten ist. Sei S ein solches Element und p^β seine Ordnung.

Schreiben wir jetzt einen solchen Ausdruck

$$(1) \qquad \Omega = (\mathfrak{A},\ \omega^{p^\beta-1}\mathfrak{A}S,\ \omega^{p^\beta-2}\mathfrak{A}S^2,\ \ldots,\ \omega^{p^\beta-p}\mathfrak{A}S^p,\ \ldots,$$
$$\omega^p\mathfrak{A}S^{p^\beta-p},\ \ldots,\ \omega\mathfrak{A}S^{p^\beta-1}).$$

Hier bedeutet ω eine primitive Einheitswurzel vom Grade p^β. Die Multiplikation eines Elementes der Gruppe mit einer Zahl verstehen wir vollkommen formal. Die Addition führen wir gar nicht ein, so daß z. B. $(\mathfrak{A}, -\mathfrak{A})$ keineswegs gleich Null ist. Die Ordnung, in der die einzelnen

[1]) Theory of groups of finite order. 2 ed., Cambridge 1911.

[2]) Abstrakte Gruppentheorie (russisch), Kiew 1916.

[3]) Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. 2. Aufl., Berlin 1927.

Teile des Ausdruckes (1) geschrieben sind, interessiert uns nicht, so daß z. B. die Ausdrücke $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ ein und dasselbe bedeuten. Dann haben wir

$$\Omega S = \omega \Omega; \quad \Omega S^p = \Omega.$$

Jedes Element von $\mathfrak{P}$ kann man augenscheinlich in solcher Weise schreiben:

$$P = A S^i,$$

wo A ein Element von $\mathfrak{A}$ bedeutet und i einer der Zahlen 0, 1, 2, ..., $p-1$ gleich ist. Deshalb bekommt der Ausdruck Ω bei Multiplikation (von rechts) mit einem beliebigen Element von $\mathfrak{P}$ nur einen Faktor, der einer Potenz von ω gleich ist.

Es sei

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} + \mathfrak{P} T_2 + \mathfrak{P} T_3 + \ldots + \mathfrak{P} T_m$$

$\left(\text{natürlich: } m = \frac{n}{p^\alpha}\right)$. Bilden wir m solche Ausdrücke

$$\Omega, \ \Omega T_2, \ \Omega T_3, \ \ldots, \ \Omega T_m. \tag{2}$$

Augenscheinlich geht jeder dieser Ausdrücke bei der Multiplikation (von rechts) mit einem beliebigen Element der Gruppe $\mathfrak{G}$ in sich selbst oder in einen anderen über (mit einem Faktor, der einer Potenz von ω gleich ist). Auf solche Weise bekommen wir eine Darstellung unserer Gruppe $\mathfrak{G}$ durch eine monomiale Matrizengruppe. Die Determinante der Matrix, die irgend ein Element unserer Gruppe darstellt, ist augenscheinlich gleich einer Potenz von ω. Sind einige unter diesen Determinanten gleich einer primitiven Einheitswurzel vom Grade p^β, so enthält die Gruppe $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler, der aus allen Elementen besteht, denen Matrizen mit Determinanten, die keiner primitiven Einheitswurzel vom Grade p^β gleich sind, entsprechen. Dieser Normalteiler wird alle Elemente enthalten, deren Ordnung nicht durch p teilbar ist.

Wir wollen jetzt eine obere Schranke für die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}$, deren Ordnungen in p^α aufgehen, suchen in dem Falle, daß $\mathfrak{G}$ eine einfache Gruppe ist.

Hat die Gruppe $\mathfrak{G}$ weniger als $m = \frac{n}{p^\alpha}$ Sylowscher Untergruppen von der Ordnung p^α, so gibt es augenscheinlich in $\mathfrak{G}$ weniger als $\frac{n}{q}$ Elemente von der Ordnung $p^\varkappa$ $(\varkappa \leqq \alpha)$, wo q den kleinsten Faktor von n bedeutet, der durch p nicht teilbar ist.

Nehmen wir jetzt an, daß in $\mathfrak{G}$ $\frac{n}{p^\alpha}$ Sylowsche Untergruppen der Ordnung p^α vorhanden sind. Sei P ein Element von $\mathfrak{P}$, welches nicht in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Bei der Multiplikation mit P bekommt Ω eine

primitive Einheitswurzel vom Grade p^β als Faktor. Nehmen wir an, daß bei der Multiplikation mit P jeder der Ausdrücke $\Omega T_i\,(T_i \neq 1)$ in einen anderen Ausdruck derselben Art übergeht (multipliziert mit einer Potenz von ω).

Bezeichnen wir eine Reihe der Ausdrücke ΩT_i, die bei Multiplikation mit P zyklisch ineinander übergehen, durch

$$\Omega_1,\ \Omega_2,\ \ldots,\ \Omega_{p^b} \quad (b \leqq \beta).$$

Nehmen wir an, daß bei der Multiplikation mit P $\Omega_\varkappa$ in $\omega^{a_\varkappa}\Omega_{\varkappa+1}$ übergeht. Bei der Multiplikation mit P^{p^b} werden die $\Omega_\varkappa$ nicht ineinander übergehen, aber nur den Faktor

$$\overline{\omega} = \omega^{a_1 + a_2 + \cdots + a_\mu} \quad (\mu = p^b)$$

bekommen. Da $P^{p^\beta} = 1$ ist, so ist $\overline{\omega}^{p^\beta - b} = 1$ und deshalb ist $\overline{\omega}$ keine primitive Einheitswurzel vom Grade p^β. Die Determinante der Matrix, welche dem Element P entspricht, ist in diesem Falle gleich einer primitiven Einheitswurzel vom Grade p^β.

Wir sehen, daß, damit $\mathfrak{G}$ eine einfache Gruppe sein kann, mindestens einer von den Ausdrücken $\Omega T_i\,(T_i \neq 1)$ bei der Multiplikation mit P in sich selbst übergehen muß (mit einem Faktor, der einer Potenz von ω gleich ist).

Nehmen wir jetzt an, daß für ein T_i eine solche Formel gilt:

$$\Omega T_i P = \omega^\nu \Omega T_i.$$

In diesem Falle haben wir

$$T_i P = A S^\nu T_i,$$

oder

$$P = T_i^{-1} A S^\nu T_i.$$

So erkennen wir, daß P auch in der Gruppe

$$T_i^{-1}\,\mathfrak{P}\,T_i$$

enthalten sein muß; diese letzte Gruppe kann nicht mit $\mathfrak{P}$ identisch sein (nach unseren Voraussetzungen ist der Normalisator von $\mathfrak{P}$ in bezug auf $\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{P}$ selbst). Deshalb muß P wenigstens in q Sylowschen Untergruppen der Ordnung p^α enthalten sein (q bedeutet, wie oben gesagt war, den kleinsten Faktor der Ordnung unserer Gruppe, der durch p nicht teilbar ist).

Solche Erwägungen können nur für jene Elemente von $\mathfrak{P}$ nicht taugen, welche in allen Untergruppen von der Ordnung $p^{\alpha-1}$ der Gruppe $\mathfrak{P}$

enthalten sind; es kann in $\mathfrak{P}$, augenscheinlich, nicht mehr als $p^{\alpha-2}$ solche Elemente geben[4]). So bekommen wir das

Theorem I: *Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von der Ordnung n. Sei p^α die höchste Potenz einer Primzahl p, durch welche n teilbar ist, und sei q der kleinste Faktor von n, welcher nicht durch p teilbar ist. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ muß einen Normalteiler haben, wenn sie mehr als*

$$n\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q}\right)$$

Elemente enthält, deren Ordnung in p^α aufgeht.

Aus Theorem I kann man noch folgendes Theorem herleiten:

Theorem II: *Jede Gruppe der Ordnung $n = p_1^\alpha p_2 p_3 \cdots p_m$ ($p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ = Primzahlen) ist auflösbar, falls $p_1 \geqq m$ ist.*

Es genügt für den Beweis, zu zeigen, daß eine solche Gruppe nicht einfach sein kann[5]). Wir können auch voraussetzen, daß p_1 der kleinste der Primfaktoren von n ist (es ist bekannt, daß die Ordnung einer einfachen nichtzyklischen Gruppe entweder durch 12 oder durch die dritte Potenz ihres kleinsten Primfaktors teilbar sein muß). Wir wollen nur diesen Fall untersuchen. Sei $\nu_i p_i$ ($i = 2, 3, \ldots, m$) die Ordnung des Normalisators der Sylowschen Untergruppe der Ordnung p_i. Sei $\mu_i p_i$ die Ordnung der maximalen Untergruppe unserer Gruppe, deren alle Elemente mit allen Elementen einer Sylowschen Untergruppe der Ordnung p_i vertauschbar sind. Augenscheinlich kann es in unserer Gruppe nicht mehr als

$$\mu_i (p_i - 1)\frac{n}{\nu_i p_i}$$

Elemente geben, deren Ordnung durch p_i teilbar ist. Ist unsere Gruppe einfach, so müssen wir haben:

$$\frac{\mu_i}{\nu_i} \leqq \frac{1}{p_1},$$

da in diesem Falle die Sylowsche Untergruppe der Ordnung p_i mit einem Element vertauschbar sein muß, dessen Ordnung nicht durch p_i teilbar

---

[4]) Hat $\mathfrak{P}$ nur eine Untergruppe der Ordnung $p^{\alpha-1}$, so ist $\mathfrak{P}$ entweder zyklisch oder von der Ordnung 4.

[5]) Sind alle Untergruppen einer Gruppe auflösbar, so ist die Gruppe entweder auflösbar oder einfach. Wir können voraussetzen, daß unser Theorem für kleinere Werte von m bewiesen ist.

ist und das nicht mit allen Elementen dieser Untergruppe vertauschbar ist. Wir bekommen die Ungleichung

$$n\left(\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{q}\right)+\sum_{i=2}^{m}\mu_i(p_i-1)\frac{n}{\nu_i p_i}+1\geqq n,$$

wo q gleich einer der Zahlen $p_2, p_3, \ldots, p_m$ ist. Deshalb wäre

$$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{q}+\frac{m-1}{p_1}>1.$$

Eine solche Ungleichung ist unmöglich, weil $q\geqq p_1+2$ ist.

Bei $m=3$ bekommen wir folgendes

Theorem III: *Jede Gruppe ungerader Ordnung vom Typus $p^\alpha q r$ ist auflösbar*[6]).

Moskau, den 11. Juli 1932.

---

[6]) Einen anderen Beweis des Theorems III hat der Verfasser in einer Arbeit gegeben, die in Recueil de Mathématiques de Moscou erscheinen wird.

(Eingegangen am 28. Juli 1932.)

Ein Beitrag zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen.

Von

Victor Levin in Berlin.

Es bedeute $\mathfrak{S}_k$ die Klasse aller in $|z| < 1$ regulären, schlichten, normierten und k-fach symmetrischen Funktionen

$$f_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu k+1}^{(k)} z^{\nu k+1}, \quad a_1^{(k)} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Herr Littlewood[1]) hat

$$|a_n^{(1)}| < en$$

bewiesen. Herrn Landau[2]) verdankt man

$$\limsup \frac{\alpha_n}{n} \leqq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) e,$$

wo α_n das Maximum[3]) von $|a_n^{(1)}|$ bedeutet, wenn $f_1(z)$ alle Funktionen aus $\mathfrak{S}_1$ durchläuft[4]).

Neuerdings haben die Herren Littlewood und Paley[5]) und Herr Landau[6]) die Existenz einer absoluten Konstanten A mit der Eigenschaft bewiesen, daß für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$|a_n^{(9)}| \leqq A$$

---

[1]) On inequalities in the theory of functions, Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, **23** (1924), S. 481—519, insbesondere S. 498, vgl. auch [2]).

[2]) Über schlichte Funktionen, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 635—638.

[3]) Die Existenz dieses Maximums folgt aus der Tatsache, daß die Funktionen aus $\mathfrak{S}_k$ eine im Sinne von Herrn Montel normale Funktionenschar bilden.

[4]) Bei dieser Gelegenheit möchte ich ein auf dieses Ergebnis von Herrn Landau bezügliches Zitat in meiner Note: „Eine Bemerkung zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen", Jahresber. d. D. Mathematikervereinigung **42** (1932), S. 70—71, berichtigen, wo auf S. 70, vierte Zeile der Note, statt

$$|a_n| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) en$$

die oben im Text angegebene limes-Beziehung zu setzen ist.

[5]) A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients, Journ. of London Math. Soc. **7** (1932), S. 167—169.

[6]) Über ungerade schlichte Funktionen, Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 33—35.

gilt (die Herren Fekete und Szegö[7]) haben dann durch den Satz

$$\operatorname{Max} |a_5^{(2)}| = e^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{2},\ A \geqq e^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{2} > 1$$

gezeigt).

Die von Herrn Szegö ausgesprochene Vermutung

$$a_n^{(k)} = O\left(n^{-1+\frac{2}{k}}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

ist also für $k = 1$ und $k = 2$ bewiesen. Im folgenden soll (1) für $k = 3$ bewiesen werden. Es gilt darüber hinaus der folgende

Satz[8]). *Es existieren drei absolute Konstanten B, C und D, so daß für $n \geqq 2$*

I. $$|a_n^{(3)}| \leqq B n^{-\frac{1}{3}},$$

II. $$|a_n^{(4)}| \leqq C n^{-\frac{1}{2}} \log n,$$

III. $$|a_n^{(k)}| \leqq D n^{-\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} n \text{ für } k \geqq 5$$

gilt (D ist also von k unabhängig).

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hilfe einer naheliegenden Ausgestaltung der Littlewood-Paleyschen Methode[5]) geführt.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1 (Littlewood und Paley[5])). Sei $K \geqq 2$ und ganz, $0 < \varrho < 1$; dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} |f_K'(\varrho e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta < (1-\varrho)^{-1}\left(1 - \varrho^{\frac{K}{2}}\right)^{-\frac{4}{K}}.$$

Der kurze Beweis sei hier wiedergegeben. Es ist

$$(\nu K + 1)\varrho^{\nu K+1} \leqq \sum_{\mu=1}^{\nu K+1} \varrho^{\mu} < \frac{\varrho}{1-\varrho},$$

---

[7]) Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen, Journ. of London Math. Soc. 8 (1933), S. 85—89.

[8]) Die numerischen Werte der Konstanten, die man den unten entwickelten Formeln leicht entnimmt, sind sicher viel zu groß; es kann jedoch gezeigt werden, daß für die Konstante A, die ein besonderes Interesse beanspruchen darf, der Wert

$$2^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}} = 3{,}39 \ldots$$

genommen werden kann (wie in einer, der London Math. Soc. vorgelegten, Note gezeigt wird).

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}|f'_K(\varrho e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu K+1)^2|a^{(K)}_{\nu K+1}|^2\varrho^{2\nu K}$$

$$<\frac{1}{1-\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu K+1)|a^{(K)}_{\nu K+1}|^2\varrho^{\nu K}$$

$$=\frac{\varrho^{-1}}{1-\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu K+1)|a^{(K)}_{\nu K+1}|^2(\sqrt{\varrho})^{2(\nu K+1)}$$

$$\leqq\frac{\varrho^{-1}}{1-\varrho}\operatorname*{Max}_{|z|=\sqrt{\varrho}}|f_K(z)|^2\leqq(1-\varrho)^{-1}\left(1-\varrho^{\frac{K}{2}}\right)^{-\frac{4}{K}}\text{[9]}.$$

Hilfssatz 2. Es seien k und g ganz, $k\geqq 2$, $g\geqq 2$, $0<r<1$. Dann ist

$$n|a^{(k)}_n|<r^{-n}g^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{kg}}J^{\frac{1}{2}},$$

wo

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}|f_1(r^k e^{i\vartheta})|^{\frac{2(g-1)}{kg}}\,d\vartheta$$

bedeutet.

Beweis. Bekanntlich ist

$$f_k(z)=f^g_{kg}\left(z^{\frac{1}{g}}\right)\text{[10]},$$

also

$$f'_k(z)=z^{\frac{1}{g}-1}f^{g-1}_{kg}\left(z^{\frac{1}{g}}\right)f'_{kg}\left(z^{\frac{1}{g}}\right),$$

$$|n\,a^{(k)}_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{0<|z|=r<1}\frac{f'_k(z)}{z^n}\,dz\right|\leqq\frac{1}{2\pi r^{n-1}}\int_{\varphi=0}^{2\pi}|f'_k(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$=r^{\frac{1}{g}-n}\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left|f_{kg}\left(r^{\frac{1}{g}}e^{i\frac{\varphi}{g}}\right)\right|^{g-1}\left|f'_{kg}\left(r^{\frac{1}{g}}e^{i\frac{\varphi}{g}}\right)\right|d\varphi$$

$$<r^{-n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left|f_{kg}\left(r^{\frac{1}{g}}e^{i\frac{\varphi}{g}}\right)\right|^{2(g-1)}d\varphi\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left|f'_{kg}\left(r^{\frac{1}{g}}e^{i\frac{\varphi}{g}}\right)\right|^2 d\varphi\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

---

[9]) Nach dem *Verzerrungssatz* ist $|f_1(z)|\leqq|z|(1-|z|)^{-2}$, also

$$|f_K(z)|=|f_1(z^K)|^{\frac{1}{K}}\leqq|z|(1-|z|^K)^{-\frac{2}{K}}.$$

[10]) $f_\lambda(z)$ bedeutet eine Funktion aus $\mathfrak{S}_\lambda$.

Die Behauptung des Hilfssatzes 2 folgt jetzt aus

1. $$f_{kg}\left(r^{\frac{1}{g}} e^{i\frac{\varphi}{g}}\right) = f_1^{\frac{1}{kg}}(r^k e^{ki\varphi}),$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left|f_{kg}\left(r^{\frac{1}{g}} e^{i\frac{\varphi}{g}}\right)\right|^{2(g-1)} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}|f_1(r^k e^{i\vartheta})|^{\frac{2(g-1)}{kg}} d\vartheta,$$

2. wegen $$f'_{kg}(z) = f'_{kg}\left(z e^{\frac{2\pi}{kg}i}\right)$$

ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left|f'_{kg}\left(r^{\frac{1}{g}} e^{i\frac{\varphi}{g}}\right)\right|^2 d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}\left|f'_{kg}\left(r^{\frac{1}{g}} e^{i\vartheta}\right)\right|^2 d\vartheta,$$

und nach dem Hilfssatz 1 mit $K = kg$, $\varrho = r^{\frac{1}{g}}$ weiter

$$< \left(1 - r^{\frac{1}{g}}\right)^{-1}\left(1 - r^{\frac{k}{2}}\right)^{-\frac{4}{kg}} < g(1-r)^{-1-\frac{4}{kg}}.$$

Hilfssatz 3 (Littlewood[11]). Für $\lambda > 0, 0 < \varrho < 1$, ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{2\pi}|f_1(\varrho e^{i\vartheta})|^\lambda d\vartheta \leqq \lambda\int_{t=0}^{\varrho} t^{\lambda-1}(1-t)^{-2\lambda} dt.$$

§ 2.

Beweis des Satzes.

Es bedeuten $c_1, \ldots, c_{15}$ absolute positive Konstanten.

I. Sei $k = 3$; dann setze man $g = 5$. Aus dem Hilfssatz 3 folgt mit $\lambda = \frac{8}{15}$ und $\varrho = r^3$

$$J \leqq \tfrac{8}{15}\int_{t=0}^{r^3} t^{-\frac{7}{15}}(1-t)^{-\frac{16}{15}} dt$$

$$= \int_{u=0}^{r^{\frac{8}{5}}}(1-u^{\frac{15}{8}})^{-\frac{16}{15}} du < \int_{u=0}^{r^{\frac{8}{5}}}(1-u)^{-\frac{16}{15}} du < c_1(1-r)^{-\frac{1}{15}}.$$

Aus dem Hilfssatz 2 folgt dann

$$n|a_n^{(3)}| < c_2 r^{-n}(1-r)^{-\frac{19}{30}}(1-r)^{-\frac{1}{30}} = c_2 r^{-n}(1-r)^{-\frac{2}{3}},$$

woraus mit $r = 1 - \frac{1}{n}$ I folgt.

---

[11]) Vgl. [1]) und H. Prawitz, Über Mittelwerte analytischer Funktionen, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 20 (1927/28), Nr. 6, S. 8.

II. Für $k = 4$ folgt aus dem Hilfssatz 3 mit $\lambda = \frac{g-1}{2g}$ und $\varrho = r^4$

$$J < \frac{1}{2}\int_{t=0}^{r^4} t^{-\frac{g+1}{2g}}(1-t)^{-\frac{g-1}{g}}\,dt.$$

Für $\frac{1}{2} \leqq r < 1$ ist also

$$J < \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\frac{1}{16}} t^{-\frac{3}{4}} c_3\,dt + \frac{1}{2}\int_{t=\frac{1}{16}}^{r^4} c_4(1-t)^{-1}\,dt < c_5 + c_6 \log\frac{1}{1-r} < c_7 \log\frac{1}{1-r}.$$

Der Hilfssatz 2 liefert jetzt für $\frac{1}{2} \leqq r < 1$

$$n|a_n^{(4)}| < c_8 r^{-n} g^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2g}} \log^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-r},$$

also mit $r = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geqq 2$,

$$|a_n^{(4)}| < c_9 g^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2g}} \log^{\frac{1}{2}} n.$$

Setzt man hierin für $n > [e^2]$

$$g = [\log n]^{12})$$

ein, so folgt

$$|a_n^{(4)}| < c_{10} n^{-\frac{1}{2}} \log n$$

für $n > [e^2]$, also auch II.

III. Für $k \geqq 5$ folgt aus dem Hilfssatz 3 mit $\lambda = \frac{2(g-1)}{kg}$ und $\varrho = r^k$ wegen $2\lambda = \frac{4(g-1)}{kg} < \frac{4}{5} < 1$

$$J < \frac{2}{k}\int_{t=0}^{r^k} t^{\frac{1}{k}-1}(1-t)^{-\frac{4}{5}}\,dt$$

$$< \frac{2}{k}\int_{t=0}^{1} t^{\frac{1}{k}-1}(1-t)^{-\frac{4}{5}}\,dt = 2\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{k}\right)} < c_{11},$$

also, nach dem Hilfssatz 2,

$$n|a_n^{(k)}| < c_{12} r^{-n} g^{\frac{1}{2}}(1-r)^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{kg}},$$

---

12) Oder einfacher

$$g = [\log n] + 2$$

für $n \geqq 2$.

woraus mit $r = 1 - \frac{1}{n}$

$$|a_n^{(k)}| < c_{13}\, g^{\frac{1}{2}}\, n^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{kg}}$$

folgt. Setzt man hierin wieder

$$g = [\log n]^{12})$$

ein, so folgt

$$|a_n^{(k)}| < c_{14}\, n^{-\frac{1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} n$$

für $n > [e^2] = 7$; wegen

$$a_1^{(k)} = 1,\ a_2^{(k)} = \ldots = a_k^{(k)} = 0,\ |a_{k+1}^{(k)}| \leqq \frac{2}{k},\ a_{k+2}^{(k)} = 0,$$

gilt aber für $1 \leqq n \leqq 7$ und $k \geqq 5$

$$|a_n^{(k)}| < c_{15}.$$

Also gilt III.

(Eingegangen am 20. Juli 1933.)

Anwendung einer Landauschen Beweismethode auf den Kroneckerschen Approximationssatz.

(Auszug aus einem Briefe an Professor Landau.)

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

In Ihrem äußerst geistreichen neuen Beweis (Göttinger Nachr. 1933) des alten Satzes von mir, daß die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(\sigma + it)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ jeden Wert $c \neq 0$ annimmt, ist es Ihnen unter anderem gelungen, die Verwendung des Kroneckerschen Approximationssatzes zu vermeiden — und trotzdem Funktionen von mehreren freien Veränderlichen heranzuziehen. Beim Studium Ihres Beweises habe ich nun bemerkt, daß eine der diesem Beweis zugrunde liegenden Ideen unmittelbar zu einem neuen Beweis des Kroneckerschen Satzes verwendet werden kann. Obwohl es einfachere Beweise dieses letzteren Satzes gibt, scheint der so entstehende neue Beweis, den ich in den folgenden Zeilen darstellen werde, mir trotzdem von einem gewissen Interesse zu sein, vor allem, weil er die erwähnte schöne Beweisidee von Ihnen besonders klar hervortreten läßt.

Außer ganz geläufigen Hilfsmitteln werden bei diesem neuen Beweis des Kroneckerschen Satzes nur die beiden folgenden Bemerkungen benutzt (die übrigens triviale Spezialfälle von allgemeinen Sätzen über fastperiodische Funktionen sind): Falls eine Funktion $\psi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ in eine (endliche oder unendliche) Reihe der Form $\Sigma \alpha_\nu e^{i\beta_\nu t}$ mit reellen, unter einander verschiedenen β_ν und konvergenter Majorantenreihe $\Sigma|\alpha_\nu|$ entwickelbar ist, so gilt:

1. Die Entwicklung ist eindeutig bestimmt.
2. Jeder Koeffizient α_ν ist numerisch $\leqq$ Obere Grenze $_{-\infty<t<\infty}$ $|\psi(t)|$.

Beides folgt sofort aus der, unter der gemachten Annahme der Konvergenz von $\Sigma|\alpha_\nu|$ trivialen Koeffizientendarstellungsformel

$$\alpha_\nu = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \psi(t)\, e^{-i\beta_\nu t}\, dt.$$

Ich spreche den Kroneckerschen Satz in der folgenden analytischen Fassung aus:

Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ linear unabhängige und $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ beliebige reelle Größen. Ferner seien $N+1$ positive Größen $a_0, \ldots, a_N$ mit der Summe 1 festgewählt $\left(z.\ B.\ a_0 = \ldots = a_N = \frac{1}{N+1}\right)$. *Dann ist die obere Grenze des absoluten Betrages der Summe*

$$f(t) = a_0 + a_1 e^{2\pi i(\lambda_1 t - \varphi_1)} + \ldots + a_N e^{2\pi i(\lambda_N t - \varphi_N)} \quad (-\infty < t < \infty)$$

gleich 1.

Der Beweis ist indirekt zu führen. Es sei also die Existenz einer positiven Konstanten $k < 1$ derart angenommen, daß die Ungleichung $|f(t)| \leqq k$ für alle t besteht.

Es wird nun die Funktion

$$g(t) = \frac{1}{1 - f(t)} = 1 + f(t) + \ldots + (f(t))^n + \ldots \qquad (-\infty < t < \infty)$$

betrachtet. Hierbei sind — wegen der linearen Unabhängigkeit der Zahlen λ_ν — in der Polynomialentwicklung

$$(f(t))^n = \sum_{l_j \geqq 0,\ l_1 + \ldots + l_N \leqq n} g^{(n)}_{l_1, \ldots, l_N} e^{2\pi i t(l_1\lambda_1 + \ldots + l_N\lambda_N)}$$

keine zwei Glieder zusammenzufassen; daher ist nach der obigen Bemerkung 2. jeder der Koeffizienten $g^{(n)}$ numerisch $\leqq k^n$, und es gilt also — da die Anzahl der Glieder $\binom{N+n}{n}$ beträgt — die Abschätzung

$$\sum |g^{(n)}_{l_1, \ldots, l_N}| \leqq \binom{N+n}{n} k^n.$$

Somit konvergiert die unendliche Majorantenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum |g^{(n)}_{l_1, \ldots, l_N}|,$$

nämlich mit einer Summe $\leqq$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n}{n} k^n = \frac{1}{(1-k)^{N+1}}.$$

Folglich gilt für $g(t)$ eine absolut konvergente Entwicklung der Form

$$g(t) = \sum_{l_j \geqq 0} g_{l_1, \ldots, l_N} e^{2\pi i t(l_1\lambda_1 + \ldots + l_N\lambda_N)}.$$

Nun ist aber $(1 - f(t)) \cdot g(t) = 1$ (für alle t), also

$$(*) \quad \left(1 - a_0 - \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu e^{2\pi i(t\lambda_\nu - \varphi_\nu)}\right) \cdot \sum g_{l_1, \ldots, l_N} e^{2\pi i t(l_1\lambda_1 + \ldots + l_N\lambda_N)} = 1,$$

und nach der obigen Bemerkung 1. kann daher die durch gliedweises Ausmultiplizieren der beiden Faktoren auf der linken Seite und nachfolgende Zusammenfassung von Gliedern mit demselben Exponentialfaktor $e^{i\beta_\nu t}$ entstehende, wiederum absolut konvergente Reihe nur aus dem

einzigen konstanten Gliede 1 bestehen, d. h. die Relation (*) gilt auch im Sinne „formaler" Reihenmultiplikation.

Nunmehr ersetzen wir in der Relation (*) überall die Größen $e^{2\pi i t\lambda_\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, N$) durch freie Veränderliche x_ν. Hierbei geht (*) — da das Ausrechnen der linken Seite nach dieser Ersetzung dem Ausrechnen vor der Ersetzung (wiederum wegen der linearen Unabhängigkeit der λ_ν) völlig parallel verläuft — in die jedenfalls „formal" gültige Reihenrelation

$$\left(1 - a_0 - \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu x_\nu e^{-2\pi i \varphi_\nu}\right) \cdot \sum g_{l_1, \ldots, l_N} x_1^{l_1} \ldots x_N^{l_N} = 1$$

über, welche aber jedenfalls für $|x_1| = \ldots = |x_N| = 1$ (wo die unendliche Reihe links absolut konvergiert) als „reale" Funktionenrelation gültig ist, etwa

$$\left(1 - a_0 - \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu x_\nu e^{-2\pi i \varphi_\nu}\right) \cdot G(x_1, \ldots, x_N) = 1.$$

Dies letzte Resultat ist aber offenbar unsinnig, da der erste Faktor links für $x_\nu = e^{2\pi i \varphi_\nu} (\nu = 1, \ldots, N)$ verschwindet. Hiermit ist der Widerspruch erreicht und der Beweis vollendet.

(Eingegangen am 16. Juli 1933.)

Ein neuer Beweis des Endlichkeitssatzes für Orthogonalinvarianten.

Von

Max Schiffer in Berlin.

§ 1.

Hat man eine Form k-ten Grades in n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und unterwirft man diese einer linearen Substitution, die in bekannter Weise als $x = s(x')$ bezeichnet wird, aus einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so ergibt sich das Formenproblem der Invariantentheorie folgendermaßen. Ist die Form als $f(a, x)$ gegeben, wobei a die Gesamtheit der Koeffizienten der Form repräsentiert, so ordne man die Form nach den x_i' um, so daß man $f(a, x) = f(a^s, x')$ erhält. Hierbei stellen die a^s eine lineare Substitution der a dar, die der Substitution s eindeutig zugeordnet ist. Man suche nun alle homogenen rationalen Funktionen $J(a)$ auf, für die gilt

$$J(a^s) = \gamma_s J(a),$$

wobei γ_s nur von s abhängt. Dies sind die Invarianten der Form in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{G}$, auf deren Bestimmung es ankommt.

Wählt man als Substitution $x = s'(x')$, wobei s' die zu s transponierte Matrix ist, so unterliegen die a einer Gruppe $\mathfrak{Q}$ von linearen Substitutionen $Q(s)$, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ darstellen. Zu jeder Substitution s aus $\mathfrak{G}$ gibt es also genau eine zugeordnete Substitution $Q(s)$ aus $\mathfrak{Q}$, so daß, wenn $Q(s)$ und $Q(t)$ den Matrizen s und t aus $\mathfrak{G}$ entsprechen, ihr Produkt $Q(s) \cdot Q(t)$ der Matrix $s \cdot t$ aus $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist. Eine solche Darstellung werde im folgenden als Homomorphismus zu $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Die Gruppe $\mathfrak{Q}$ ist also der Gruppe $\mathfrak{G}$ homomorph.

Man kann dann von vornherein folgende Frage aufwerfen. Man suche alle homogenen rationalen Funktionen irgendeiner Variablenreihe a, die invariant bleiben, wenn man die a einer Substitution $L(s)$ aus einer zu $\mathfrak{G}$ homomorphen Gruppe $\mathfrak{L}$ unterwirft. Dies Problem enthält dann als Spezialfall das Formenproblem. Im folgenden soll nur noch von den zu einem solchen Homomorphismus gehörenden Invarianten gesprochen werden.

Im Vordergrunde bei allen diesen Betrachtungen steht nun die Frage nach einer endlichen Basis. Unter dieser ist in der Invariantentheorie

eine Gesamtheit von endlich vielen Invarianten zu verstehen, aus denen sich alle anderen ganz und rational mit konstanten Koeffizienten aufbauen lassen. Aus dem Hilbertschen Formensatz ist die Existenz einer endlichen Basis sofort herzuleiten, wenn man einen Operator O mit folgenden Eigenschaften herleiten kann:

1. $O[f(a)] = F(a)$ ist entweder Null oder eine Invariante vom gleichen Grade wie $f(a)$.

2. $O[f(a) + g(a)] = O[f(a)] + O[g(a)]$.

3. Ist $J(a)$ eine Invariante, so ist $O[J(a) \cdot g(a)] = J(a) \cdot O[g(a)]$.

4. $O[J(a)] = c\,J(a)$, wobei c eine von Null verschiedene Konstante ist.

Einen solchen Operator gewann z. B. Hilbert für die projektive Gruppe mit Hilfe des Ω-Prozesses.

§ 2.

Nun hat Hurwitz[1]) einen Integrationsprozeß entwickelt, der bei jeder abgeschlossenen kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ in bezug auf den Homomorphismus aller $Q(s)$ anwendbar ist und der einen Operator der eben beschriebenen Art liefert. Diese Methode läßt sich auch ohne weiteres auf alle stetigen Homomorphismen dieser Gruppen anwenden. Der wichtigste Fall, an dem auch Hurwitz seine Methode entwickelt, ist der Fall der reellen Drehungsgruppe. Deren stetige Homomorphismen sind übrigens alle rational, wie Herr Schur[2]) gezeigt hat.

Bei der reellen Drehungsgruppe geht Hurwitz folgendermaßen vor. Er beschränkt sich nur auf absolute Invarianten, da eine Erweiterung auf beliebige Invarianten dann unschwer erfolgen kann. Er betrachtet den n^2-dimensionalen Raum aller reellen Matrizen mit n^2 Elementen und in ihm den Unterraum $\mathfrak{R}$ aller orthogonalen Matrizen. Geht nun a^s durch Anwendung irgendeines Homomorphismus $L(s)$ der Drehungsgruppe aus a hervor, ist ferner $f(a)$ eine beliebige Funktion der Variablen $a_1, \ldots, a_m$, so wende man folgenden Operator H an:

$$H[f(a)] = \int_{\mathfrak{R}} f(a^s)\,ds = F(a).$$

---

[1]) Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration. Göttinger Nachrichten 1897, S. 71.

[2]) Neue Anwendung der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1924, S. 297.

Hierbei ist ds das Volumenelement in $\mathfrak{R}$, dessen Bestimmung das Kernstück der Untersuchung von Hurwitz ist.

Man erkennt, daß der Operator H den Bedingungen 2, 3, 4 ohne weiteres genügt, wenn unter $J(a)$ absolute Invarianten gegenüber dem betreffenden Homomorphismus $L(s)$ verstanden werden. Aber auch 1 ist erfüllt. Denn es ist

$$F(a^t) = \int_{\mathfrak{R}} f(a^{s\,t})\, ds,$$

wenn auch t eine Drehung ist. Nun ist im n^2-dimensionalen Matrizenraum die Multiplikation aller Matrizen mit einer festen orthogonalen Matrix nur eine Drehung des Raumes, bei der überdies der Unterraum $\mathfrak{R}$ in sich übergeht. Dann ist bekanntlich nach den Regeln der Integralrechnung $ds' = d(s \cdot t)$, und somit ist

$$F(a^t) = \int_{\mathfrak{R}} f(a^{s\,t})\, d(s \cdot t) = \int_{\mathfrak{R}} f(a^s)\, ds = F(a).$$

Damit ist die Invarianz von $F(a)$ nachgewiesen.

Ebenso wie hier

$$\int_{\mathfrak{R}} f(a^{s\,t})\, ds = \int_{\mathfrak{R}} f(a^s)\, ds$$

bewiesen wurde, kann man auch ohne Mühe folgern:

$$\int_{\mathfrak{R}} f(a^{t\,s})\, ds = \int_{\mathfrak{R}} f(a^s)\, ds.$$

Diese Tatsache wird später eine wesentliche Rolle spielen.

§ 3.

Bei der rechnerischen Durchführung des Hurwitzschen Prozesses kommt es vor allem darauf an, eine Parameterdarstellung der Drehungsgruppe zu finden. Dazu bedarf es einer näheren Untersuchung dieser Gruppe. Es ist daher von Interesse, daß ein anderer Integrationsprozeß existiert, der mit dem Hurwitzschen Prozeß im wesentlichen identisch ist und der rein formal zu entwickeln ist, ohne nähere Eigenschaften der orthogonalen Gruppe zu gebrauchen. Besonders bemerkenswert ist es, daß die Abgeschlossenheit dieser Gruppe nicht benutzt wird. Einen ähnlichen Prozeß benutzt schon Herr Schur[3]) im projektiven Fall.

---

[3]) Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I. Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1924, S. 189.

Zur Bildung des neuen Prozesses braucht man einen Hilfssatz, der sich schon bei Kelland und Tait[4]) und allgemeiner bei Frobenius[5]) findet, und auf den mich mein Freund, Herr W. Ledermann, aufmerksam machte. Ist nämlich τ eine beliebige Matrix von nicht verschwindender Determinante, so ist

$$\sigma(\tau) = (\tau\tau')^{-1/2}\tau$$

eine orthogonale Matrix.

Man sieht sofort, daß rein formal wirklich $\sigma(\tau)(\sigma(\tau))' = E$ ist, wenn E die Einheitsmatrix bedeutet. Denn es ist

$$\sigma(\tau)\cdot(\sigma(\tau))' = (\tau\tau')^{-1/2}\tau\tau'(\tau\tau')^{-1/2} = E.$$

Hierbei ist unter $(\tau\tau')^{-1/2}$ jene Wurzelbildung verstanden, die schon Sylvester und Frobenius benutzten und die folgendermaßen definiert ist:

Es sei P eine symmetrische Matrix mit positiven Eigenwerten (was ja für $(\tau\tau')$ erfüllt ist); man kann dann eine reelle orthogonale Matrix Q so angeben, daß $Q\cdot PQ^{-1}$ in der Diagonalform

$$QPQ^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \cdot & & \vdots \\ 0 & & & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_n \end{pmatrix}$$

erscheint. Man nehme nun an, daß kein $\omega_\nu = 0$ wird und daß alle Wurzeln verschieden sind. Dann ist die Interpolationsaufgabe

$$a_0 + a_1\omega_i + \dots + a_{n-1}\omega_i^{n-1} = \omega_i^{-1/2} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

lösbar, und zwar erscheinen dann die a_ν in folgender Gestalt:

$$a_\nu = \frac{G_\nu(\sqrt{\omega_1}, \dots, \sqrt{\omega_n})}{\sqrt{\omega_1}\dots\sqrt{\omega_n}\, V(\omega_1, \dots, \omega_n)}.$$

Hierbei ist G_ν eine ganze rationale Funktion von $\sqrt{\omega_1}, \dots, \sqrt{\omega_n}$, und V ist die Vandermondesche Determinante $\prod_{\alpha<\beta}(\omega_\alpha - \omega_\beta)$. Bildet man nun

$$f(P) = a_0 + a_1 P + \dots + a_{n-1}P^{n-1} = Q^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1^{-1/2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^{-1/2} & & \vdots \\ \vdots & & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \omega_n^{-1/2} \end{pmatrix} Q,$$

so ist das jedenfalls eine Funktion, die der Gleichung

$$f(P)\cdot f(P) = P^{-1}$$

---

[4]) Quaternions, 1873, Chapter 10.

[5]) Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen. Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1896, S. 7.

genügt. Man kann also $f(P) = P^{-1/2}$ setzen, und es ist bekannt, daß hierbei $f(P)$ nicht von der Wahl der transformierenden Matrix Q abhängt. Man hat damit also $P^{-1/2}$ eindeutig definiert, falls nur alle Werte ω_ν untereinander und von Null verschieden sind. Man kann nun aber (nach einer mündlichen Bemerkung von Herrn Schur) die a_ν in eine Gestalt bringen, an der man das Verhalten dieser Funktion studieren kann, wenn mehrere Wurzeln einander gleich werden oder wenn eine Wurzel verschwindet. Für $\sqrt{\omega_i} = \sqrt{\omega_k}$ verschwindet sowohl G_ν als auch V in der obigen Darstellung für a_ν; daher sind V und G_ν durch die Vandermondesche Determinante $\prod_{\alpha<\beta}(\sqrt{\omega_\alpha} - \sqrt{\omega_\beta})$ teilbar. Man kürze in den a_ν aus, und man erhält im Nenner von a_ν abgesehen von dem Wurzelprodukt $\prod_\alpha \sqrt{\omega_\alpha}$ nur die „Geminante" $\prod_{\alpha<\beta}(\sqrt{\omega_\alpha} + \sqrt{\omega_\beta})$. Man ersieht daraus erstens, daß die oben definierte Bildung $f(P)$ auch noch Sinn hat, wenn zwei Wurzeln gleich werden und daß auch dann $f(P) \cdot f(P) = P^{-1}$ wird. Zweitens bemerkt man aber auch, daß $|P|^l f(P)$ für einen hinreichend großen Exponenten l eine stetige Funktion der Matrix wird, die für $P| \to 0$ gegen den Wert Null konvergiert. Denn in $|P|^{l-1} a_\nu$ treten ja nur Faktoren der Form $\frac{\sqrt{\omega_\alpha}\sqrt{\omega_\beta}}{\sqrt{\omega_\alpha} + \sqrt{\omega_\beta}}$ auf, die wegen der Ungleichung

$$\frac{ab}{a+b} < a, \quad \frac{ab}{a+b} < b \qquad \text{für } a > 0,\ b > 0$$

beschränkt sind, so daß $|P|^l a_\nu$ bereits gegen Null geht. (Man sieht leicht ein, daß es genügt $l \geqq \left[\frac{n}{2}\right] + 2$ zu wählen, wenn $\left[\frac{n}{2}\right]$ die größte ganze Zahl unterhalb von $\frac{n}{2}$ ist.) Dieses Verhalten von $|P|^l f(P)$ wird im folgenden eine wesentliche Rolle spielen. Übrigens hat Frobenius das Verhalten von $f(P)$ für den Fall studiert, daß $|P| \to 0$ geht. Er wies nach, daß $f(P)$ konvergiert und somit im Limes eine orthogonale Matrix darstellt.

§ 4.

Mit den eben abgeleiteten Hilfsmitteln kann man nun einen Integrationsprozeß definieren, der die in § 1 verlangten Eigenschaften hat. Ist wieder $f(a)$ eine beliebige Form, so wende man folgenden Operator O_l an:

$$O_l[f(a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i,k}^{1\ldots n} \xi_i^2 t_k} |\tau|^{2l} f(a^{\sigma(\tau)})\, d\varrho = G_l(a).$$

Hierbei bedeutet $d\varrho$ das Volumenelement $d\xi_{11} \dots d\xi_{nn}$. Es ist dabei über alle n^2 Elemente der Matrix $\tau = (\xi_{ik})$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren. $\sigma(\tau)$ ist dabei die in § 3 definierte Matrix, die zu τ eindeutig zugeordnet ist, und l ist ein Exponent, der ausreicht, um $|\tau|^{2l} f(a^{\sigma(\tau)})$ zu einer beschränkten Funktion der ξ_{ik} zu machen, was ja nach § 3 stets möglich ist. Wie in § 2 geht $a^{\sigma(\tau)}$ aus a hervor, indem man auf a die $\sigma(\tau)$ entsprechende Substitution aus irgendeinem stetigen Homomorphismus der Drehungsgruppe anwendet.

Auch bei diesem Operator sind die Eigenschaften 2., 3., 4. augenfällig. Denn $O_l(f)$ ist linear und homogen, und ist $J(a)$ eine Invariante gegen den betreffenden Homomorphismus, so ist

$$O_l[J(a)\,U(a)] = J(a) \cdot O_l[U(a)],$$

da $J(a^{\sigma(\tau)}) = J(a)$ ist. (Es werden hier wie bei Hurwitz nur absolute Invarianten untersucht.) Speziell ist

$$O_l[J(a)] = J(a) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Sigma \xi_{ik}^2} |\tau|^{2l}\, d\varrho = J(a) \cdot c_l.$$

Hierbei ist der Faktor $c_l > 0$. Nachzuweisen bleibt also nur, daß $G_l(a)$ eine Invariante ist. Dazu bilde man

$$G_l(a^t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Sigma \xi_{ik}^2} |\tau|^{2l} f(a^{\sigma(\tau)t})\, d\varrho.$$

Hierbei stellt t eine orthogonale Matrix dar. In diesem Fall ist aber

$$\sigma(\tau) \cdot t = (\tau\tau')^{-1/2} \tau t = (\tau t \cdot t'\tau')^{-1/2} \tau t = \sigma(\tau \cdot t).$$

Führt man ferner die Komponenten η_{ik} der Matrix $\lambda = \tau t$ ein, so gilt

$$\sum_{i,k}^{1\dots n} \xi_{ik}^2 = \sum_{i,k}^{1\dots n} \eta_{ik}^2; \quad |\tau| = |\lambda|; \quad d\varrho = d\eta_{11} \dots d\eta_{nn} = d\mu.$$

Somit folgt

$$G_l(a^t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Sigma \eta_{ik}^2} |\lambda|^{2l} f(a^{\sigma(\lambda)})\, d\mu = G_l(a).$$

Damit ist gezeigt, daß auch die Bedingung 1 erfüllt ist.

§ 5.

Nun ist es noch von Interesse, den Nachweis zu führen, daß der Hurwitzsche Prozeß mit dem Prozeß $O_l[f(a)]$ bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmt. Der Beweisgedanke ist der gleiche wie der in dem

analogen Fall der projektiven Gruppe von Herrn Schur[6]) entwickelte. Dort wurde nachgewiesen, daß jeder invariantenerzeugende Prozeß, der mit dem Hilbertschen Operator vertauschbar ist, mit diesem bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmt.

Man bilde zum Beweis

$$H[G_l(a)] = \int_{\Re} \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum \xi_{ik}^2} \dots d\varrho \Big] ds,$$

wobei wieder $H[f(a)]$ den Hurwitzschen Operator bedeuten soll. Da der Integrand stetig ist und das uneigentliche Integral absolut und gleichmäßig konvergiert (jetzt kann ja die Abgeschlossenheit der Drehungsgruppe benutzt werden), sind die Integrationen vertauschbar. Also ist

$$H[G_l(a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum \xi_{ik}^2} |\tau|^{2l} \Big\{ \int_{\Re} f(a^{v(\tau)\cdot s})\, ds \Big\} d\varrho.$$

Nun wurde schon in § 2 hervorgehoben, daß auch

$$\int_{\Re} f(a^{ts})\, ds = \int_{\Re} f(a^s)\, ds$$

ist, wofern t eine orthogonale Matrix ist. Also ist

$$H[G_l(a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum \xi_{ik}^2} |\tau|^{2l} \Big\{ \int_{\Re} f(a^s)\, ds \Big\} d\varrho$$

und folglich

$$H[G_l(a)] = c_l H[f(a)].$$

Andererseits ist $G_l(a)$ eine Invariante und $H[f(a)]$ erfüllt die Bedingung 4. Also ist

$$H[G_l(a)] = h G_l(a),$$

wobei

$$h = \int_{\Re} ds$$

ist. Also folgt

$$O_l[f(a)] = \frac{c_l}{h} H[f(a)].$$

Damit ist die Identität der beiden Operationen nachgewiesen, was zu einer bemerkenswerten Integralidentität Anlaß gibt. Dieselben Überlegungen zeigen auch, daß Prozesse der Art

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sum \xi_{ik}^2)^\nu} |\tau|^{2l} \varphi(|\tau|) f(a^{v(\tau)})\, d\varrho$$

---

[6]) Neue Anwendungen der Integralrechnung usw. I, S. 194.

mit $\nu = 1, 2, \ldots$, und beliebigen Funktionen $\varphi(|\tau|)$, für die das Integral noch konvergiert, ebenfalls bis auf einen konstanten Faktor mit dem Hurwitzschen Prozeß identisch sind.

Rechnet man im binären Fall den Prozeß $O_l[f(a)]$ wirklich durch, so kann man die Integralidentität direkt rechnerisch bestätigen; man findet, daß das Integral von $O_l[f(a)]$ sich durch geeignete Transformationen in ein Produkt von drei Integralen zerlegen läßt. Davon führen zwei Integrale auf Konstanten, die nur von l abhängen. Das dritte Integral ist gerade $H[f(a)]$.

Berlin-Siemensstadt, den 11. März 1933.

(Eingegangen am 13. März 1933.)

Zum dynamischen Wärmeleitungsproblem.

Von

Ch. H. Müntz in Leningrad.

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \Delta u, \qquad \varkappa = \text{const} > 0 \tag{1}$$

bei vorgeschriebenen Anfangs- (für $t = 0$) und Randbedingungen ist im Falle *einer* räumlichen Dimension im wesentlichen als erledigt zu betrachten[1]). Im Falle von zwei und drei Dimensionen scheint die einzige effektive allgemeine Lösung bis jetzt durch die folgende, praktisch indessen vielfach kaum gangbare Methode gegeben zu sein, wobei man mit Hilfe allgemein bekannter klassischer Formeln stets von der Anfangstemperatur $u(0) = 0$ ausgehen darf[2]): a) ein wichtiger Satz von Duhamel[3]) erlaubt alsdann, die Aufgabe mit von der Zeit abhängigen Randwerten auf diejenige mit von der Zeit unabhängigen (stationären) Randwerten zurückzuführen; b) zu jedem System solcher Werte läßt sich die zugehörige Lösung $u^{(\infty)}$ der stationären Aufgabe

$$\Delta u = 0 \tag{1,1}$$

ermitteln, so daß man stets auch von den speziellen Randwerten Null ausgehen darf; c) der gewohnte partikuläre Ansatz — etwa für den Raum —

$$u = e^{-\lambda t} \Phi(x, y, z) \tag{1,2}$$

liefert aus (1) die homogene Eigenwertgleichung:

$$\varkappa \Delta \Phi + \lambda \Phi = 0, \tag{1,3}$$

[1]) Man vergleiche: É. Goursat, Cours d'Analyse III (Paris 1922), ch. XXIX; H. S. Carslaw, Conduction of heat (London 1921), ch. III—IV; V. Volterra, Équations différentielles (Paris 1912), leç. X.

[2]) Vgl. Carslaw, ibd., ch. XII; Heywood-Fréchet, L'équation de Fredholm etc. (Paris 1912), ch. I, § 14, ch. III, § 19.

[3]) Vgl. Carslaw, ibd., pp. 17—19.

die für ein gegebenes, endlich (mit den üblichen Nebenbedingungen) berandetes Gebiet D ein diskretes Spektrum von Eigenwerten $\lambda_n (> 0, \to \infty)$ mit zugehörigen, am Rande verschwindenden Eigenfunktionen $\Phi_n(x, y, z)$ besitzt; d) die nach Abzug von $u^{(\infty)}(x, y, z)$ aus der nach a) vorgeschriebenen Anfangstemperatur $u^{(0)}(x, y, z)$ entstehende, zu den Randwerten Null gehörige, neue Ausgangstemperatur $u_0(x, y, z)$ läßt sich daraufhin (wieder unter den üblichen Nebenbedingungen) im Innern von D nach den Eigenfunktionen Φ_n entwickeln:

$$u_0(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x, y, z); \tag{1,4}$$

e) die volle Lösung des nach a) modifizierten Problems ist nunmehr gegeben durch

$$u = u(x, y, z, t) = u^{(\infty)}(x, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x, y, z). \tag{1,5}$$

Die schwache Seite dieser Lösung besteht in der zumeist recht schwer durchführbaren Notwendigkeit einer wirklichen Bestimmung aller Eigenfunktionen $\Phi_n(x, y, z)$ des Gebietes D, außer wenn dasselbe etwa besonders einfach berandet ist. Zwar sind verschiedene Methoden bekannt, die formal tatsächlich in jedem konkreten Falle die Berechnung aller Φ_n und λ_n auszuführen gestatten[4]); unter anderem hat der Verfasser eine solche Methode mit Hilfe eines einzigen unendlichen Prozesses angegeben. Der benötigte außerordentliche Arbeitsaufwand in allen allgemeineren Fällen läßt es aber erwünscht erscheinen, andere umfassende Lösungsmethoden für das vollständige Randwertproblem von (I) auszubauen, und eine solche soll im folgenden gegeben werden. Man kann mit ihrer Hilfe unter anderem jeweilig effektiv die thermodynamische Greensche Funktion des Problems bestimmen, die ihrerseits allgemein für die Lösung von (I) ausreicht[5]); indessen kann diese Lösung mit der gleichen Methode stets ebensogut auch *direkt* in Angriff genommen werden.

Zunächst wird a) mit Hilfe klassischer (Laplace-Fourierscher) Formeln wiederum gerade die Anfangstemperatur im betrachteten Gebiet D auf Null zurückgeführt, wodurch natürlich die im allgemeinen mit der Zeit veränderlichen vorgeschriebenen Randwerte entsprechend modifiziert werden — freilich ist dies der erste Schritt auch für den Satz von Duhamel (siehe oben) —; alsdann werden — im Gegensatz zum oben geschilderten Verfahren, das dort nach a) und b) wieder auf *beliebige* Anfangstemperaturen und auf *Randwerte Null* zurückgeht — b) die gegebenen Ränder mit

[4]) Vgl. Enzyklopädie der Math. Wiss. II, C. 13; § 33.

[5]) Enzyklopädie der Math. Wiss. V, 4, § 3; Carslaw, Cond. of heat, ch. X.

passenden, einfachen bzw. doppelten Wärmeschichten (= „Herden") belegt, die die gewöhnlichen Schichten der Potentialtheorie verallgemeinern und vielfach analoge Eigenschaften aufweisen (§§ 1 bis 2); man wird dann c) auf Integralgleichungen zweiter Art von gemischtem Typus geführt (§ 3): und zwar Volterrasch in bezug auf die Zeit t, Fredholmsch in bezug auf die gegebenen Ränder; d) trotz einer Singularität des Kernes, durch die eine eigentümliche Art der Konvergenz der einfachen Neumann-Volterraschen Reihenentwicklung hervorgerufen wird — das allgemeine Glied verhält sich nicht in üblicher Weise wie $\frac{t^m}{m!}$, sondern wie $\frac{t^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$ —, sichert diese Konvergenz stets die explizite Lösung.

Neben dem Dirichletschen Randwertproblem läßt sich in analoger Weise das Neumannsche erledigen; auch verschiedene gemischte Probleme lassen sich mit den gegebenen Mitteln behandeln (§ 4). Die im Text durchgeführten Betrachtungen (§§ 2 bis 4) beziehen sich auf die Ebene; sie lassen sich ohne weiteres auch auf den Raum ausdehnen (§ 5).

§ 1.

Die eindimensionalen Wärmebelegungen.

Wir fassen zuerst kurz die fraglichen Konsequenzen der Kelvin-Volterraschen Theorie für den Fall *einer* Dimension zusammen. Im Intervall $a \leqq x \leqq b$ sei die Anfangstemperatur $u^{(0)}(x)$ gegeben; ferner seien in den festen Endpunkten selbst die Temperaturen zu beliebiger Zeit vorgeschrieben: $f_a(t)$, $f_b(t)$, wobei im allgemeinen $f_a(0) = f_a(+0) \neq u^{(0)}(a)$, $f_b(+0) \neq u^{(0)}(b)$ sein wird.

Der Temperaturanteil aus der Anfangsbedingung $u^{(0)}(x)$ allein ist, wenn man sie außerhalb des Intervalls (a, b) etwa zu 0 ergänzt, durch das Laplace-Fouriersche Integral gegeben:

$$u^{(0)}(x,t) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa t}}}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\, u^{(0)}(\xi)\, d\xi,$$

was in den Endpunkten selbst gewisse Beiträge $u^{(0)}(a, t)$, $u^{(0)}(b, t)$ ergibt; zieht man dieselben von $f_a(t)$ bzw. $f_b(t)$ ab, so ist noch das Problem mit der Anfangstemperatur 0, dafür aber mit neuen Randwerten $f(a, t)$, $f(b, t)$ zu lösen. Dafür hat man nun den folgenden Weg:

Man lege in die Randpunkte a, b Doppelquellen $\varphi(a,t)$, $-\varphi(b,t)$ hinein. Der Effekt einer Doppelquelle $\varphi(t)$ in einem Punkte ξ ist

$$(2) \qquad u = u(x,t) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi\varkappa}\,(t-\tau)^{3/2}}(x-\xi)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

und man hat dann[6])

$$u(\xi+0) = \varphi(t), \quad u(\xi-0) = -\varphi(t).$$

Für die Wirkung der angelegten Doppelquellen in a, b hat man also, um den Einklang mit den verlangten Randwerten herzustellen, die Bedingungen:

$$(2,1) \qquad \begin{cases} \varphi(a,t) + (b-a)\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-\frac{(b-a)^2}{4\varkappa(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi\varkappa}\,(t-\tau)^{3/2}}\varphi(b,\tau)\,d\tau = f(a,t); \\ \varphi(b,t) + (b-a)\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-\frac{(b-a)^2}{4\varkappa(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi\varkappa}\,(t-\tau)^{3/2}}\varphi(a,\tau)\,d\tau = f(b,t). \end{cases}$$

Dies ist aber einfach ein System von zwei linearen Volterraschen Integralgleichungen zweiter Art mit dem im ganzen Integrationsintervall offenbar stetigen Kern

$$(2,2) \qquad K(t,\tau) = \frac{b-a}{2\sqrt{\pi\varkappa}}\,e^{-\frac{(b-a)^2}{4\varkappa(t-\tau)}}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}},$$

und die Lösung für z. B. abteilungsweise *stetige* Randfunktionen f — wir beschränken uns einfachheitshalber auf solche — ist damit ohne weiteres gegeben, mit Hilfe Laplacescher Transformationen sogar durch endlichviele Quadraturen (Herglotz, Doetsch u. a.).

Es sei ferner bei der Anfangstemperatur 0, auf die man das Problem immer zurückführen kann (vgl. oben), in dem einen Endpunkt a wieder die Temperatur $f(a,t)$, in dem anderen Endpunkt b aber der Wärmefluß, d. h. im wesentlichen $\frac{\partial u}{\partial x} = g(b,t)$ vorgeschrieben. Dann lege man in a eine Doppelquelle $\varphi(t)$, in b aber eine *einfache* Quelle $\psi(t)$ an, letztere mit dem Effekt

$$(2,3) \qquad u = u(x,t) = \int_0^t \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{(b-x)^2}{4\varkappa(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}\,\psi(\tau)\,d\tau,$$

---

[6]) Dies ist das wesentliche Resultat von Kelvin selbst.

was für $\frac{\partial u}{\partial x}$ bei $x = b - 0$ eben (bekannterweise) $+ \psi(t)$ ergibt. Die Integralgleichungen des Problems lauten jetzt offenbar

$$(2,4)\quad \begin{cases} \varphi(t) + \int_0^t \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \frac{e^{-\frac{(b-a)^2}{4\varkappa(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{1/2}} \psi(\tau)\, d\tau = f(a,t); \\ \psi(t) + \int_0^t \frac{e^{-\frac{(b-a)^2}{4\varkappa(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi\varkappa}(t-\tau)^{3/2}} \psi(\tau)\, d\tau \\ \qquad - (b-a)^2 \int_0^t \frac{e^{-\frac{(b-a)^2}{4\varkappa(t-\tau)}}}{4\varkappa\sqrt{\pi\varkappa}(t-\tau)^{5/2}} \varphi(\tau)\, d\tau = g(b,t), \end{cases}$$

was also wieder stetige Kerne und somit die reguläre Lösungsmöglichkeit liefert.

Ebenso wird man natürlich, falls die Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ stets als Funktion der Zeit an *beiden* Endpunkten vorgeschrieben ist (bei $u^{(0)} = 0$ als Anfangsbedingung), eben an den beiden *einfache* Wärmequellen $\psi(a,t)$, $\psi(b,t)$ anbringen.

§ 2.

Die ebenen Belegungen.

Im zweidimensionalen Fall ist die Wirkung einer einfachen Punktquelle 1 in der Entfernung r bekanntlich durch

$$(3)\qquad u_0 = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}}}{2\pi(t-\tau)}$$

dargestellt. Ist nun ein System von Kurvenstücken mit dem Bogenelement $d\sigma$ gegeben — wir betrachten von Anfang an ein System von mehreren auseinanderliegenden geschlossenen Kurven $C_1, \ldots, C_m$ mit stetig veränderlichen Tangenten und Krümmungen, die ein zusammenhängendes Gebiet D begrenzen —, so erscheint es daher als sinnvoll, in folgender Weise das Wärmepotential einer einfachen Belegung $\alpha(\sigma,\tau)$ zu definieren:

$$(3,1)\quad \begin{cases} A = A(x,y,t) = \int_0^t d\tau \int_C \frac{\alpha(\sigma,\tau)}{2\pi(t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}} d\sigma; \\ r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2; \quad \xi = \xi(\sigma),\ \eta = \eta(\sigma). \end{cases}$$

Dabei durchläuft σ nacheinander *alle* Grenzkurven C_μ; ξ, η ist ein allgemeiner Randpunkt, $\alpha(\sigma,t)$ sei einfachheitshalber als auf jeder C stetig

vorausgesetzt. Offenbar erfüllt A in jedem Punkte außerhalb des Rändersystems C zu jeder Zeit t (> 0, wie auch stets im folgenden) die Fundamentalgleichung (I).

Ebenso erscheint es zweckmäßig, das Wärmepotential einer Doppelbelegung $\beta(\sigma, \tau)$ zu definieren durch

$$(3,2) \qquad B = B(x,y,t) = \int_0^t d\tau \int_C \frac{\beta(\sigma,\tau)}{2\pi(t-\tau)} \frac{\partial}{\partial n} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}} d\sigma,$$

die Normale n in auch sonst üblicher Weise nach innen gekehrt gedacht, oder auch:

$$(3,3) \qquad B = \int_0^t d\tau \int_C \frac{\beta(\sigma,\tau)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}} r\cos(r,n)\, d\sigma.$$

Wieder ist hier in auch anderweitig üblicher Weise r nach dem Aufpunkt (x, y) gerichtet, es gilt demnach:

$$(3,4) \qquad r\cos(r,n) = -(x-\xi)\frac{d\eta}{d\sigma} + (y-\eta) - \frac{d\xi}{d\sigma}.$$

Wir betrachten zuerst die Eigenschaften von B. Liegt $P(x, y)$ *innerhalb* des von einer C_a eingeschlossenen Gebietes D_a und ist $d\varphi$ der Sehwinkel, unter dem ein Element $d\sigma$ von P aus erscheint, so kann man nach offenbar erlaubter Vertauschung der Integrationsfolge in (3,4) schreiben:

$$(3,5) \qquad B = \int_C d\varphi \int_0^t \frac{\beta(\sigma,\tau)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}} r\, d\tau.$$

Es möge nun P längs der inneren Normalen P_* P immer näher an den festgewählten Randpunkt $P_*(x_*, y_*)$ heranrücken; wir bezeichnen dabei

$$(3,6) \qquad (x_*-\xi)^2 + (y_*-\eta)^2 = r_*^2$$

und betrachten, unter $d\varphi$ immer noch — wie in (3, 5) — den auf den *früheren* Aufpunkt P bezüglichen Sehwinkel verstehend, den Ausdruck

$$(3,7) \qquad B_* = \int_C d\varphi \int_0^t \frac{\beta(\sigma,\tau)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_*^2}{4\varkappa(t-\tau)}} r_*^2\, d\tau.$$

Dies ist offenbar das Potential, im *gewöhnlichen* Sinne, einer durch das letztstehende Integral dargestellten, von einem Parameter t abhängenden Doppelbelegung, bei der freilich die Verhältnisse im Punkte P_* selbst, mit $r_* = 0$, noch einer gewissen Klärung bedürfen.

Wir behaupten, daß die fragliche Belegung einfach auch in P_* stetig ist. Durch die Substitution

$$4\varkappa(t-\tau)=\frac{r_*^2}{\omega},\quad 4\varkappa d\tau=\frac{r_*^2}{\omega^2}d\omega \tag{3,8}$$

erhält sie nämlich die Gestalt

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{r_*^2}{4\varkappa t}}^{\infty}\beta\left(\sigma,t-\frac{r_*^2}{4\varkappa\omega}\right)e^{-\omega}d\omega,$$

und der Übergang zu $r_*\to 0$ erfolgt hier für stetige $\beta(\sigma,\tau)$ ohne Schwierigkeit: der Wert der Belegung konvergiert stetig gegen $\frac{1}{\pi}\beta(\sigma_*,t)$, $\sigma_*=\sigma(P_*)$. Daraufhin läßt sich aber nach bekannten Sätzen der gewöhnlichen Potentialtheorie das Verhalten von B_* beim Heranrücken des Aufpunktes P an P_* sofort angeben; wird der Sehwinkel für $d\sigma$ von P_* aus mit $d\varphi_*$ bezeichnet,

$$d\varphi_*=\frac{\cos(r_*,n)}{r_*}d\sigma,$$

und nennt man ferner

$$B_{**}=\int_C d\varphi_*\int_0^t\frac{\beta(\sigma,\tau)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2}e^{-\frac{r_*^2}{4\varkappa(t-\tau)}}r_*^2d\tau, \tag{3,9}$$

so hat man hier

$$B_*\to B_*^{(a)}=B_{**}+\beta(\sigma_*,t), \tag{4}$$

bei der Annäherung aber an P von außen her — wobei übrigens gerade die äußeren Punkte hier zum betrachteten Wirkungsbereich D gehören können — nach ebenso bekannten Sätzen der Potentialtheorie

$$B_*\to B_*^{(a)}=B_{**}-\beta(\sigma_*,t). \tag{4,1}$$

Wir behaupten nun, daß das Wärmepotential B selbst bei der Annäherung an den Rand — von beiden Seiten her — sich genau ebenso verhält, also von innen wie von außen

$$(B-B_*)\to 0 \tag{4,2}$$

gilt. Es sei nämlich

$$\Psi=\operatorname{Max}|\beta(\sigma,\tau)|,\qquad 0\leqq\tau\leqq t,$$

und $\varepsilon>0$ eine vorgeschriebene Fehlerschranke. Wir können zunächst ein $\sigma_0=\sigma_0(\varepsilon)>0$ ohne weiteres derart bestimmen, daß

$$\int_{\sigma_*-\sigma_0}^{\sigma_*+\sigma_0}\left|\frac{d\varphi}{d\sigma}\right|d\sigma<\frac{\varepsilon\pi}{3\Psi}$$

erfüllt ist; für den *Rest* der Berandung hat man aber dann gleichmäßig $r \to r_*$, $\operatorname{Min} r_* = r_*^{(0)} > 0$. Auf dem ausgesonderten σ_0-Abschnitt um σ_* ist nun der Beitrag sowohl zu B wie zu B_* sicher kleiner als $\varepsilon/3$; mit Hilfe von (3, 8) hat man nämlich

$$(4,3) \qquad B_* = \int_C d\varphi \int_{\frac{r_*^2}{4\varkappa t}}^{\infty} \frac{1}{\pi} \beta\left(\sigma, t - \frac{r_*^2}{4\varkappa\omega}\right) e^{-\omega} d\omega,$$

und eine ganz analoge Substitution ergibt aus (3, 5)

$$(4,4) \qquad B = \int_C d\varphi \int_{\frac{r^2}{4\varkappa t}}^{\infty} \frac{1}{\pi} \beta\left(\sigma, t - \frac{r^2}{4\varkappa\omega}\right) e^{-\omega} d\omega,$$

woraus unsere Behauptung sofort folgt. Daß aber für den Rest des Randes $B - B_*$ durch hinreichend nahes Heranrücken von P an P_* kleiner als $\varepsilon/3$ gemacht werden kann, folgt aus den gleichen Darstellungen nun ebenfalls[7]); (4, 2) ist damit gerechtfertigt, und man erhält, mit der gleichen Definition von B_{**} — aus (3, 9) —, für die Annäherung von innen bzw. von außen an einen Randpunkt P_*:

$$(4,5) \qquad \begin{cases} B \to B^{(i)} = +\beta(\sigma_*, t) + B_{**}, \\ B \to B^{(a)} = -\beta(\sigma_*, t) + B_{**}. \end{cases}$$

Diese Beziehungen sind zunächst für $t > 0$ sichergestellt; es interessiert aber noch ihr Verhalten für $t \to +0$. Aus (3, 9) folgt nun, daß alsdann — man braucht nur die Umformung wie in (4, 3) vorzunehmen — $B_{**} \to 0$ gilt; man erhält demnach

$$(4,6) \qquad B^{(i)}(+0) = \beta(\sigma_*, 0), \quad B^{(a)}(+0) = -\beta(\sigma_*, 0).$$

Es sei daran erinnert, daß hierbei für $\beta > 0$ die Warmseite der Doppelquelle nach innen, die Kaltseite aber nach außen gekehrt ist.

Nunmehr lassen sich die entsprechenden Resultate auch für den einfachen Herd A — siehe (3, 1) — ableiten. Mit der bereits benutzten Substitution

$$(5) \qquad 4\varkappa(t-\tau) = \frac{r^2}{\omega}, \quad 4\varkappa d\tau = \frac{r^2}{\omega^2} d\omega$$

---

[7]) Es ist dabei gleichmäßig

$$\int_C \left|\frac{d\varphi}{d\sigma}\right| d\sigma < \infty$$

notwendig, was aber eine innere Eigenschaft C des Kurvensystems C_μ bedeutet, die hier gesichert ist.

erhält man:

$$(5,1) \qquad A = \int_C d\sigma \int_{\frac{r^2}{4\varkappa t}} \frac{1}{2\pi} \alpha\left(\sigma, t - \frac{r^2}{4\varkappa\omega}\right) e^{-\omega} \frac{d\omega}{\omega};$$

wird der Aufpunkt $P(x, y)$, wieder am einfachsten längs der Normalen $P_* P$, gegen den Rand gerückt, so hat man — unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen — Veranlassung, das zugehörige Randpotential

$$(5,2) \qquad A_* = \int_C d\sigma \int_{\frac{r_*^2}{4\varkappa t}}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \alpha\left(\sigma, t - \frac{r_*^2}{4\varkappa\omega}\right) e^{-\omega} \frac{d\omega}{\omega}$$

zu betrachten. Zunächst läßt sich dann ohne Schwierigkeit zeigen, daß man dabei

$$(5,3) \qquad A \to A_*$$

hat. Es genügt hier wieder, eine beliebig kleine Nachbarschaft um P_* herum zu betrachten; wird der Abstand $P_* P = \delta$ gesetzt, so handelt es sich dann im wesentlichen um die Abschätzung des Grenzwertes (für $\delta \to +0$) des Integrals

$$\int_0^{r_0} (\log \sqrt{\delta^2 + r_*^2} - \log r_*)\, d r_* = r_0 (\log \sqrt{\delta^2 + r_0^2} - \log r_0) + \delta \operatorname{arctg} \frac{r_0}{\delta},$$

was für $\delta \to +0$ tatsächlich verschwindet.

Naturgemäß interessieren, wie im entsprechenden Fall der gewöhnlichen Potentialtheorie, die normalen Ableitungen von A. Nach den bisherigen Ausführungen dürfte es genügen, gerade im Hinblick auf die völlig analogen Verhältnisse in der Potentialtheorie selbst, die Resultate anzugeben. Man hat

$$(5,4) \qquad \frac{\partial A}{\partial n_*} = F = \int_C d\sigma \int_0^t \frac{\alpha(\sigma, \tau)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}} r \cos(r, n_*)\, d\tau,$$

worin n_* die innere Normale im (festgehaltenen) Pol P_* auf dem Rande bedeutet, r aber hier vom Aufpunkt P nach σ gerichtet ist, also

$$r \cos(r, n_*) = (\xi - x) \cos(n_*, x) + (\eta - y) \cos(n_*, y).$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$(5,5) \qquad \frac{\cos(r, n_*)}{r} d\sigma = d\psi,$$

und erhalten so für die betrachtete Ableitung:

$$(5,6) \qquad F = \int_C d\psi \int_0^t \frac{\alpha(\sigma,\tau)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}} r^2 \, d\tau.$$

Daneben stellen wir zum Vergleich, unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$(5,7) \qquad F_* = \int_C d\psi \int_0^t \frac{\alpha(\sigma,\tau)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_*^2}{4\varkappa(t-\tau)}} r_*^2 \, d\tau,$$

was aber die Normalableitung des Potentials einer gewöhnlichen einfachen ebenen Kurvenbelegung mit der durch das zweite Integral gegebenen Dichte bedeutet. Genau wie bei B_* (vgl. o.) zeigt man dann für $P \to P_*$:

$$(5,8) \quad F \to F_*;\ F^{(i)} = F_*^{(i)} = -\alpha(\sigma_*,t) + F_{**};\ F^{(a)} = \alpha(\sigma_*,t) + F_{**};$$

dabei gilt

$$F_{**} = \int_C d\psi_* \int_0^t \frac{\alpha(\sigma,\tau)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_*^2}{4\varkappa(t-\tau)}} r_*^2 \, d\tau;$$

$$(5,9) \qquad d\psi = \frac{\cos(r_*, n_*)}{r_*};$$

$$r_* \cos(r_*, n_*) = (\xi - x_*)\cos(n_*, x) + (\eta - y_*)\cos(n_*, y);$$

(x_*, y_*) sind die Koordinaten von P_*.

§ 3.

Lösung der ersten Randwertaufgabe.

Die Anfangstemperatur zur Zeit $t = 0$ sei im ein- oder mehrfach zusammenhängenden ebenen Gebiet D, das wir bereits im § 2 betrachtet haben, mit stetigen $u^{(0)}(x, y)$ gegeben. Der Einfluß dieser Bedingung auf den späteren Verlauf der Wärmeverteilung ist dann in bekannter Weise gegeben durch

$$u^{(0)} = u^{(0)}(x,y,t) = \frac{1}{4\pi\varkappa t} \iint_{(D)} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}} u^{(0)}(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta;$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Einfachheitshalber ist in diesem Laplace-Fourierschen Integral die Anfangstemperatur im Außenbereich von D gleich Null angesetzt; man könnte dort aber ebensogut irgendeine andere, z. B. auch stetig sich anschließende Anfangsverteilung annehmen, was wegen der Eindeutigkeit

der endgültigen *regulären*, d. h. mitsamt ihren ersten Ableitungen quadratisch integrierbaren, Lösung (vgl. z. B. Carslaw, loc. cit. S. 15) auf dieselbe ohne Einfluß bleibt.

Die gegebenen Randwerte der Aufgabe seien mit ${}^{(0)}f(s,t)$ bezeichnet ($s = \sigma_*$) und als stetig vorausgesetzt. Nun nimmt $u^{(0)}$ am Rande (von D aus) ebenfalls stetige Werte $f^{(0)}(s,t)$ an. Die gesuchte Lösung ist daraufhin durch $u^{(0)} + u$ gegeben, worin die Randwerte von u natürlich $f(s,t) = {}^{(0)}f(s,t) - f^{(0)}(s,t)$ sind. Man darf also stets, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, die Anfangswerte einfach mit Null ansetzen; die nunmehr gegebenen neuen Randwerte aber betrachten wir daraufhin als das Resultat einer gesuchten doppelten Wärmebelegung $\beta(s,t)$, deren Auffindung also unmittelbar die gegebene Aufgabe löst. Wir bemerken dabei, daß aus der Definition des doppelten Wärmepotentials B — aus (3, 3) — für Innenpunkte von D natürlich $B(t = +0) = 0$ folgt, wie hier zu verlangen ist.

Es werde etwa der Fall eines m-fach zusammenhängenden unendlich ausgedehnten Gebietes D mit m Randkurven C_μ betrachtet. Unter Verwendung der Formeln (4, 5) findet man dann als Bedingung für die gesuchte Gesamtbelegung $\beta(s,t)$ die folgende, dem Wesen nach Volterrasche Integralgleichung zweiter Art mit allerdings singulärem Kern:

$$(6)\quad -\beta(s,t) + \int_0^t \frac{d\tau}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} \int_C \beta(\sigma,\tau)\, e^{-\frac{r_*^2}{4\varkappa(t-\tau)}}\, r_* \cos(r_*, n)\, d\sigma = f(s,t),$$

$$r_*^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2; \quad x = x(s),\ y = y(s);$$

$$\xi = \xi(\sigma),\ \eta = \eta(\sigma);\ r_* \cos(r_*, n) = -(x-\xi)\frac{d\eta}{d\sigma} + (y-\eta)\frac{d\xi}{d\sigma}.$$

Natürlich kann man diese Gleichung in ihre m Bestandteile in bezug auf alle C_μ einzeln aufspalten, sie ist also m solchen Gleichungen mit alsdann für stetig anzusehenden $\beta_\mu(s_\mu, t)$ äquivalent; es ist indes formal bequemer, sich an die summarische Form (6) zu halten.

Die Singularität des Kernes für $r_* = 0$, $\tau = t$ läßt sich hier nicht gut mit gewohnten Mitteln überwinden. Wir werden sogleich sehen, daß auch der Konvergenzcharakter der Neumann-Volterraschen Reihenentwicklung der Lösung demgemäß hier von besonderer Art sein wird: das allgemeine Glied wird nicht, wie üblich, im wesentlichen $\frac{c^n t^n}{n!}$, sondern $\frac{(ct)^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ äquivalent sein. Indessen wird auch dies natürlich für die Konvergenz vollkommen genügen.

Wir setzen demnach an, ohne erst in (6) vor das Integral rechter Hand den üblichen Faktor λ hinzuschreiben:

$$(6,1) \qquad -\beta(s,t) = f_0(s,t) + f_1(s,t) + \ldots + f_n(s,t) + \ldots;$$

$$f_0(s,t) = f(s,t);\ f_{n+1}(s,t) = \int_0^t d\tau \int_C K(s,t;\sigma,\tau) f_n(\sigma,\tau)\, d\sigma;$$

$$K(s,t;\sigma,\tau) = \frac{r_* \cos(r_*, n)}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} e^{-\frac{r_*^2}{4\varkappa(t-\tau)}},$$

und haben allgemein $f_{n+1}(s,t)$ so abzuschätzen, daß die (absolute und) gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung von $\beta(s,t)$ gesichert erscheint. Es sei zunächst

$$(6,2) \qquad \operatorname{Max} |f_0(s,t)| = f_0;$$

wir haben dann noch die Verhältnisse für $r_* \to 0$ im Integral für $f_{n+1}(s,t)$ gleichmäßig abzuschätzen.

Man wähle P_* zum Anfangspunkt, die Tangente in P_* zu C zur ξ-Achse, die Gleichung von C in der Umgebung von P_* sei dann — wir betrachten etwa $\xi \geqq 0$ —:

$$\eta = \frac{\xi^2}{2c} + \text{Restglied höherer Ordnung},$$

wobei gleichmäßig für alle P_*

$$c \geqq c_0 > 0$$

gelten wird. Wir brauchen eine Abschätzung für

$$r_* \cos(r_*, n)\, d\sigma = r_*^2\, d\varphi_* = 2\, d\Omega,$$

unter $d\Omega$ das Element des Flächensektors von P_* aus verstanden; man hat ohne weiteres

$$\Omega = \frac{1}{2}\xi\eta - \int_0^\xi \eta\, d\xi = \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\xi^2}{2c} + \ldots\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\xi^2}{2c} + \ldots\right) = \frac{\xi^3}{12c} + \ldots;$$

$$r_* = \xi + \ldots;\ \Omega = \frac{r_*^3}{12c} + \ldots;\ r_*^3 = 12c\Omega + \ldots$$

$$r_* = (12c\Omega)^{1/3} + \ldots,$$

wo überall nur die Glieder niedrigster Ordnung ausgeschrieben sind. Daraus folgt nun gleichmäßig für das ganze gegebene C-System

$$r_*^2 \geqq (12c_*)^{2/3}\left[\int_0^\sigma |d\Omega|\right]^{2/3},\ c_* = \text{const} > 0;$$

statt der eckigen Klammer schreiben wir weiterhin einfacher W.

Es sei nunmehr für irgendein $n \geqq 0$ bereits

$$|f_n(s,t)| \leqq f_n \frac{t^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},\ f_n = \text{const}$$

festgestellt; jedenfalls gilt dies aus (6, 2) für $n = 0$ mit gegebenem f_0. Nach Einführung in (6, 1) findet man nun

$$|f_{n+1}(s,t)| \leqq \frac{f_n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^t \frac{\tau^{n/2}\, d\tau}{4\pi\varkappa(t-\tau)^2} \int_C e^{-\frac{(12\, c_* W)^{2/3}}{4\varkappa(t-\tau)}} dW,$$

woraus nach Einführung von

$$(12\, c_* W)^{2/3} = 4\varkappa(t-\tau)\Theta,\ \tau = t\,\tau_*;\ 12\, c_* W = [4\varkappa(t-\tau)]^{3/2}\Theta^{3/2};$$
$$c_*\, dW = [\varkappa(t-\tau)]^{3/2}\Theta^{1/2}\, d\Theta$$

folgt:

$$|f_{n+1}(s,t)| < \frac{f_n \frac{\sqrt{\varkappa}}{4\pi c_n} t^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \int_0^1 \frac{\tau_*^{n/2}\, d\tau_*}{\sqrt{1-\tau_*}} \int_0^\infty e^{-\vartheta}\Theta^{1/2}\, d\Theta$$

$$= \frac{f_n \sqrt{\varkappa}\, t^{\frac{n+1}{2}}}{4\pi c_* \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{f_n \sqrt{\varkappa}}{8\, c_* \Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)} t^{\frac{n+1}{2}},$$

was demnach allgemein zu

$$|f_{n+1}(s,t)| < \frac{f_0 \left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{8\, c_*}\right)^{n+1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}+1\right)} t^{\frac{n+1}{2}}$$

und damit zu den gewünschten Konvergenzeigenschaften der gegebenen Entwicklung der Lösung (6, 1) führt.

Die Modifikation von (6, 1) im Falle des Vorhandenseins einer umschließenden Kurve C_0 liegt auf der Hand.

§ 4.

Weitere Randwertaufgaben.

Nach dem Vorangegangenen erscheint der Weg der Lösung auch für die zweite und gemischte Randwertaufgabe vorgezeichnet. Es sei etwa, bei verschwindender Anfangstemperatur, der normale Wärmefluß $g(s,t)$ längs der ganzen Berandung vorgeschrieben; man hat dann auf die Ränder C eine einfache Wärmebelegung $\alpha(s,t)$ zu verteilen, die im Endresultat am Rande den gleichen Stromeffekt aufweist, wofür die Sprungformeln (5, 8) bis (5, 9) in Frage kommen; der Gang der Lösung ist dann der gleiche wie im § 3, auch der Konvergenzbeweis ist nahezu wörtlich zu übernehmen. Wenn auf einigen Randkurven C_μ die Temperatur $f_\mu(s,t)$, auf anderen C_ν aber der normale Wärmestrom $g_\nu(s,t)$ vorgeschrieben ist,

so hat man auf ersteren Doppelbelegungen $\beta_\mu(s,t)$, auf den zweiten einfache Herde $\alpha_\nu(s,t)$ anzubringen, u. ä. m. Es verdient vermerkt zu werden, daß die betreffenden Aufgaben stets eine Lösung haben; auf Komplikationen, die sich aus Singularitäten der Berandung ergeben könnten (Ecken und Spitzen, Punkträndern u. dgl.), gehen wir hier nicht ein.

Es sei noch ein Beispiel herangezogen, das eine Unstetigkeit der Temperaturleitfähigkeit $\varkappa$ selbst betrifft. Es kommt in den Anwendungen häufig vor, daß ein wärmegebender Rand C_1 erst mit einer Isolierschicht D_1 umgeben wird, deren Konstante $\varkappa_1$ verschieden von derjenigen $\varkappa_2$ der weiteren Umgebung D_2 ist. Sei C_2 die Trennungskurve beider Medien; längs C_2 sind dann die Lösungen *zweier* Fundamentalgleichungen (1) mit den gegebenen verschiedenen $\varkappa$ derart zusammenzuschweißen, daß dort

$$u_1 = u_2,\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0$$

ausfällt; die Wärmeleitfähigkeiten k_1, k_2 sind dabei ebenfalls konstant gedacht, die Normalableitungen sind jeweilig nach der Innennormalen – also hier in entgegengesetzten Richtungen — genommen gedacht.

Für die Lösung einer solchen Aufgabe braucht man den Satz, daß die *Normal*ableitung des Wärmepotentials B eines Doppelherdes $\beta(s,t)$, ähnlich wie in der gewöhnlichen Potentialtheorie, stetig bleibt. Der Beweis ist etwa auch ganz analog wie dort zu führen[8]). so daß wir hier die Einzelheiten übergehen. Man hat nun daraufhin, um zu im wesentlichen Volterraschen Integralgleichungen *zweiter* Art zu gelangen — die besondere Singularität des Kernes bringt es hier wieder mit sich, daß die gewohnten Methoden der Umwandlung aus einer Gleichung erster Art versagen —, längs C_2 nach der einen Seite (etwa nach innen hin) einen *doppelten*, nach der anderen Seite aber einen *einfachen* Herd zu legen und gemäß (7) die entsprechenden Gleichungen aufzustellen; natürlich ist auf C_1 selbst ebenfalls eine entsprechende Belegung anzubringen. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß zwei einfache bzw. zwei doppelte Herde auf *beiden* Seiten von C_2 tatsächlich eine schwer erfaßbare Integralgleichung *erster* Art in die Aufgabe hineinbringen würden.

§ 5.

Die räumlichen Belegungen.

Es dürfte nun klar sein, wie sich die analoge Behandlung der räumlichen Aufgabe gestaltet. Die Anfangstemperatur ist wieder nach klassischen Vorschriften auf Null zu bringen. Die Randflächen C mögen entsprechend

[8]) Man vergleiche die besonders einfache Darstellung von E. Schmidt, Schwarzfestschrift (Berlin 1914).

regulär sein, die verwendeten Belegungen $\alpha(s,t)$ bzw. $\beta(s,t)$ seien stetig und einmal (bzw. gelegentlich mehr, z. B. wenn $\frac{\partial B}{\partial n}$ gebraucht wird) stetig differenzierbar. Wir schreiben nur die Formeln für die räumlichen Wärmepotentiale selbst auf:

$$A = \int_C d\sigma \int_0^t \frac{\alpha(\sigma,\tau)}{\pi\sqrt{2\pi\varkappa}\,(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}}\, d\tau;$$

$$B = \int_C \frac{\cos(r,n)}{r^2}\, d\sigma \int_0^t \frac{\beta(\sigma,\tau)}{[2\sqrt{\pi\varkappa}\,(t-\tau)]^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}} \cdot r^3 \frac{d\tau}{t-\tau}.$$

Man hat dann bei Annäherung an einen Randpunkt P_*

$$B^{(i)} = \beta(\sigma_*,t) + B_{**};\quad B^{(a)} = -\beta(\sigma_*,t) + B_{**}$$

mit aus dem Früheren durchsichtiger Bezeichnung, und Analoges gilt m. m. für die Normalableitungen von A, woraus die weiteren Anwendungen genau wie im ebenen Falle folgen.

(Eingegangen am 15. Februar 1932.)

Zur affinen Differentialgeometrie zweier komplexer Veränderlicher: Flächen im vierdimensionalen Raume.

Von

Helmut Urban in Köslin.

In den „Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität", Bd. 7, hat H. Kneser einen Beitrag zur Differentialgeometrie zweier komplexer Veränderlicher geliefert. Während dort eine affine Differentialgeometrie der im vierdimensionalen Raum der beiden komplexen Veränderlichen x und y gelegenen Überflächen entwickelt wurde, sollen die folgenden Untersuchungen[1]) den in diesem Raum gelegenen Flächen gewidmet sein. Es wird sich auch hier um *die* Begriffe, Größen und Flächeneigenschaften handeln, die gegenüber der affinen Transformationsgruppe

$$(1) \qquad x \to a x + b y + f, \qquad y \to c x + d y + g$$

invariant sind, wo die komplexen Koeffizienten nur der Bedingung

$$a d - b c \neq 0$$

genügen sollen.

Ausgeschlossen bleiben von vornherein solche Flächenpunkte, deren Tangentialebene analytische Stellung hat. Dann lassen sich leicht in jedem Punkte vier reell linear unabhängige Vektoren angeben und die Ableitungsgleichungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ mit den zugehörigen Integrabilitätsbedingungen für die auftretenden Koeffizienten aufstellen. Diese Koeffizienten sind invariant gegenüber der Gruppe (1) und bilden die Grundlage der weiteren Untersuchungen. Einige Fragen, die sich an den Begriff der Parallelverschiebung von Vektoren (im Sinne Levi-Civitas) anschließen, bilden den Abschluß des ersten Kapitels.

Mit Hilfe des Tensorkalküls und auf mehr algebraischem Wege wird sodann eine allgemeine Invariantentheorie entwickelt, als deren Ergebnis für die hauptsächlichen Flächenklassen eine kanonische Flächendarstellung, gewisse invariante Ableitungen, deren Vertauschungsformeln und die zu-

[1]) Die vorliegende Arbeit ist eine Greifswalder Dissertation.

gehörigen invarianten Ableitungsgleichungen des Ortsvektors x erreicht werden.

Das dritte Kapitel ist wieder mehr geometrischen Fragen gewidmet und behandelt einige spezielle Flächenklassen. Zunächst wird eine analytische Bedingung für Minimalflächen und die Lösung des Plateauschen Problems angegeben. Es folgt eine geometrische Kennzeichnung der Schiebflächen mit integrabler Parallelverschiebung und derjenigen Schiebflächen, die Minimalflächen sind. Einige Sätze zur Klassifikation der Flächen mit integrabler Parallelverschiebung und der Geradlinienflächen bilden den Abschluß der Arbeit.

Erstes Kapitel.

Flächendarstellung. Grundformeln. Parallelismus von Levi-Civita.

§ 1.

Vektoren. Flächendarstellung.

Die Wertepaare zweier komplexer Veränderlicher x, y stellen die Punkte eines vierdimensionalen Raumes vor. Die Werte x, y sind die Komponenten des Ortsvektors

$$\mathfrak{x} = (x, y).$$

Für die Rechnung mit Vektoren mögen folgende Regeln gelten:

$$a\,\mathfrak{x} = (a\,x, a\,y) \quad a \text{ komplexe Zahl},$$

$$\mathfrak{x}_1 = (x_1, y_1), \qquad \mathfrak{x}_2 = (x_2, y_2), \qquad \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = -\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_1.$$

Zwei Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ sollen komplex (bzw. reell) linear unabhängig heißen, falls die Linearkombination $\alpha\,\mathfrak{x}_1 + \beta\,\mathfrak{x}_2$ nur dann verschwindet, wenn die komplexen (bzw. reellen) Koeffizienten α, β beide Null sind. Zwei *reell* linear abhängige Vektoren liegen in einer Geraden. Daß $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ *komplex* linear abhängig sind, ist gleichbedeutend mit $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2 = 0$. Die beiden Vektoren liegen dann in einer analytischen Ebene.

Sind x und y komplexe, hinreichend oft differenzierbare Funktionen der reellen Veränderlichen u und v und sind die Vektoren $\mathfrak{x}_u = (x_u, y_u)$ und $\mathfrak{x}_v = (x_v, y_v)$ reell linear unabhängig, so bildet die Gesamtheit der Punkte (x, y) eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, eine Fläche.

Ist $\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v = 0$, so ist $x_u = \lambda\,x_v$, $y_u = \lambda\,y_v$ mit komplexem λ, also

$$d\,x = x_v(\lambda\,d\,u + d\,v), \qquad d\,y = y_v(\lambda\,d\,u + d\,v).$$

Es ist dann $\frac{dy}{dx}$ unabhängig von $\frac{du}{dv}$ und daher y eine analytische Funktion von x oder umgekehrt. Diesen Fall schließen wir für alles folgende aus, setzen also

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \neq 0 \tag{2}$$

voraus. Dann sind $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v$ zwei komplex linear unabhängige Vektoren und daher $\mathfrak{x}_u, i\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, i\mathfrak{x}_v$ reell linear unabhängig.

§ 2.

Tangentiale und normale Vektoren.

Ein beliebiger Vektor $\mathfrak{z}$ läßt sich stets darstellen als Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ mit komplexen Koeffizienten

$$\mathfrak{z} = \alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v.$$

Das sind zwei lineare Gleichungen für α und β. Wegen (2) ist

$$\alpha = \frac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}_v}{\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v}, \qquad \beta = \frac{\mathfrak{x}_u \mathfrak{z}}{\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v}.$$

Sind α und β reell, so heiße $\mathfrak{z}$ tangential, sind α und β rein imaginär, so heiße $\mathfrak{z}$ normal. Diese tangentiale bzw. normale Eigenschaft eines Vektors ist invariant gegenüber Parameterwechsel und der affinen Gruppe (1). Jeder Vektor läßt sich auf genau eine Weise in eine tangentiale und in eine normale Komponente zerlegen.

§ 3.

Ableitungsgleichungen für $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$.

In üblicher Weise wird künftig statt u, v auch u^1, u^2 oder allgemein u^i geschrieben und, wo Irrtümer ausgeschlossen sind, das partielle Differentiationssymbol $\frac{\partial}{\partial u^i}$ durch den tiefgestellten Index i ersetzt werden. Nötigenfalls wird dieser Differentiationsindex von anderen Indizes durch ein Komma getrennt. Soll ferner in einem Ausdruck über einen hoch- und einen tiefstehenden Index summiert werden, so wird das Summenzeichen unterdrückt, gleichgültig, ob es sich um Tensorkomponenten handelt oder nicht.

Für die Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ ergeben sich dann folgende Ausdrücke:

$$\begin{gathered} \mathfrak{x}_{ik} = \Gamma_{ik}^1 \mathfrak{x}_u + \Gamma_{ik}^2 \mathfrak{x}_v = \Gamma_{ik}^\lambda \mathfrak{x}_\lambda, \\ \Gamma_{ik}^1 = \frac{\mathfrak{x}_{ik}\mathfrak{x}_v}{\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v}, \qquad \Gamma_{ik}^2 = \frac{\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{ik}}{\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v}, \qquad \Gamma_{ik}^\lambda = \Gamma_{ki}^\lambda. \end{gathered} \tag{3}$$

Da sich die Determinante zweier Vektoren bei affiner Transformation der Veränderlichen x, y mit der Determinante $a\,d - b\,c$ multipliziert, sind die Größen Γ_{ik}^{λ} invariant gegenüber der Gruppe (1), aber natürlich nicht bei Parameterwechsel.

$\Re$ und $\Im$ sollen wie üblich den Real- bzw. Imaginärteil des folgenden Ausdrucks bezeichnen. Wir schreiben jedoch statt $\Re\,\Gamma_{ik}^{\lambda}$ und $\Im\,\Gamma_{ik}^{\lambda}$ einfach $\Re_{ik}^{\lambda}$ und $\Im_{ik}^{\lambda}$.

§ 4.

Allgemeine Integrabilitätsbedingungen.

Wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge gelten für die Γ_{ik}^{λ} folgende Integrabilitätsbedingungen:

$$\mathfrak{x}_{ik\mu} = \Gamma_{ik,\mu}^{\lambda}\,\mathfrak{x}_{\lambda} + \Gamma_{ik}^{\lambda}\,\mathfrak{x}_{\lambda\mu} = (\Gamma_{ik,\mu}^{\lambda} + \Gamma_{ik}^{\nu}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})\,\mathfrak{x}_{\lambda},$$
$$\mathfrak{x}_{i\mu k} = \Gamma_{i\mu,k}^{\lambda}\,\mathfrak{x}_{\lambda} + \Gamma_{i\mu}^{\lambda}\,\mathfrak{x}_{\lambda k} = (\Gamma_{i\mu,k}^{\lambda} + \Gamma_{i\mu}^{\nu}\Gamma_{\nu k}^{\lambda})\,\mathfrak{x}_{\lambda},$$
$$\Gamma_{ik,\mu}^{\lambda} - \Gamma_{i\mu,k}^{\lambda} = \Gamma_{i\mu}^{\nu}\Gamma_{\nu k}^{\lambda} - \Gamma_{ik}^{\nu}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}.$$

Vertauschung von μ und k ändert nichts an dieser Aussage, für $\mu = k$ ist sie von selbst erfüllt. Es bleiben also nur die vier Bedingungen:

$$\Gamma_{i1,2}^{\lambda} - \Gamma_{i2,1}^{\lambda} = \Gamma_{i2}^{\nu}\Gamma_{\nu 1}^{\lambda} - \Gamma_{i1}^{\nu}\Gamma_{\nu 2}^{\lambda}, \tag{4}$$

die nach Real- und Imaginärteil zerlegt folgendermaßen lauten:

$$\begin{aligned} \Re_{i1,2}^{\lambda} - \Re_{i2,1}^{\lambda} &= \Re_{i2}^{\nu}\Re_{\nu 1}^{\lambda} - \Re_{i1}^{\nu}\Re_{\nu 2}^{\lambda} - (\Im_{i2}^{\nu}\Im_{\nu 1}^{\lambda} - \Im_{i1}^{\nu}\Im_{\nu 2}^{\lambda}), \\ \Im_{i1,2}^{\lambda} - \Im_{i2,1}^{\lambda} &= \Re_{i2}^{\nu}\Im_{\nu 1}^{\lambda} - \Re_{i1}^{\nu}\Im_{\nu 2}^{\lambda} + \Im_{i2}^{\nu}\Re_{\nu 1}^{\lambda} - \Im_{i1}^{\nu}\Re_{\nu 2}^{\lambda}. \end{aligned} \tag{5}$$

§ 5.

Parallelismus von Levi-Civita.

Ändert sich ein tangentialer Vektor längs einer Flächenkurve so, daß seine Änderung in jedem Flächenpunkt zur Fläche normal ist, so heißt nach Levi-Civita[2]) der Vektor längs der Flächenkurve parallel verschoben. Wir wenden diesen Begriff auch bei unserer Normalendefinition an und wollen das Gesetz der Parallelverschiebung analytisch formulieren.

Für $\mathfrak{z} = \alpha^i\,\mathfrak{x}_i$ ist

$$d\,\mathfrak{z} = \alpha^i\,\mathfrak{x}_{ik}\,d\,u^k + \mathfrak{x}_i\,d\,\alpha^i$$

oder

$$d\,\mathfrak{z} = (\Gamma_{ik}^{\lambda}\,\alpha^i\,d\,u^k + d\,\alpha^{\lambda})\,\mathfrak{x}_{\lambda}.$$

[2]) Vgl. z. B. T. Levi-Civita, Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik, 3. Vortrag. Berlin, Springer 1924.

Falls $\mathfrak{z}$ tangential (α^i reell), soll also $d\mathfrak{z}$ normal, d. h. $\Gamma^\lambda_{ik}\alpha^i du^k + d\alpha^\lambda$ rein imaginär sein. Demnach lautet das Gesetz der Parallelverschiebung:

$$d\alpha^\lambda = -\mathfrak{R}^\lambda_{ik}\alpha^i du^k. \tag{6}$$

Für integrable Parallelverschiebung verschwindet bekanntlich der Krümmungstensor. Es ist dann

$$\mathfrak{R}^\lambda_{i1,2} - \mathfrak{R}^\lambda_{i2,1} = \mathfrak{R}^r_{i2}\mathfrak{R}^\lambda_{r1} - \mathfrak{R}^r_{i1}\mathfrak{R}^\lambda_{r2}$$

oder mit Rücksicht auf (5)

$$\mathfrak{I}^r_{i2}\mathfrak{I}^\lambda_{r1} - \mathfrak{I}^r_{i1}\mathfrak{I}^\lambda_{r2} = 0. \tag{7}$$

Auf einer Fläche mit integrabler Parallelverschiebung können stets solche Parameter eingeführt werden, für die sämtliche $\mathfrak{R}^\lambda_{ik}$ identisch verschwinden[3]).

§ 6.

Änderung des Flächeninhalts bei Parallelverschiebung.

Wir definieren den Flächeninhalt des von den beiden tangentialen Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten Parallelogramms als $F = |\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}|$ und fragen, wie sich dieser Flächeninhalt bei Parallelverschiebung der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ändert.

Bezeichnet der Querstrich den konjugiert komplexen Wert, so ist $F = \sqrt{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})(\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{b}})}$ und

$$\frac{dF}{F} = \frac{d\{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})(\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{b}})\}}{2(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})(\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{b}})} = \frac{1}{2}\left\{\frac{d(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} + \frac{d(\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{b}})}{\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{b}}}\right\} = \Re\frac{d(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}.$$

Da sich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bei Parallelverschiebung normal zur Fläche ändern, ist

$$d\mathfrak{a} = i(\alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b}), \qquad d\mathfrak{b} = i(\gamma\mathfrak{a} + \delta\mathfrak{b})$$

mit reellem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Daher wird

$$\frac{d(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = \frac{(d\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} + \frac{(\mathfrak{a}, d\mathfrak{b})}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = i(\alpha - \delta)$$

und

$$\frac{dF}{F} = \Re\frac{d(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}} = 0.$$

Daraus folgt:

Der Flächeninhalt des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms ändert sich nicht, wenn man die Vektoren längs derselben Kurve parallel verschiebt.

---

[3]) Vgl. z. B. H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, S. 23, Abs. 2; Berlin, Springer 1923.

Zweites Kapitel.

Invariantentheorie. Kanonische Flächendarstellung. Invariante Ableitungen.

§ 1.

Die Linearform p und die kubische Form P.

Den weiteren Untersuchungen sollen vor allem solche Größen zugrunde gelegt werden, die sich bei Parameterwechsel kovariant transformieren. Führen wir vermöge reeller Funktionen $u = u(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})$ und $v = v(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})$ mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante neue Parameter $\overset{*}{u}$ und $\overset{*}{v}$ ein, so gelten, wie aus der Definitionsgleichung der Γ_{ik}^{λ} leicht folgt, die Beziehungen

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{ik}^{\lambda} \frac{\partial u^{u}}{\partial \overset{*}{u}{}^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\nu}^{u} \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial \overset{*}{u}{}^{i}} \frac{\partial u^{\nu}}{\partial \overset{*}{u}{}^{k}} + \frac{\partial^2 u^{\lambda}}{\partial \overset{*}{u}{}^{i} \partial \overset{*}{u}{}^{k}}.$$

Im besonderen bilden also die Größen $\mathfrak{I}_{ik}^{\lambda}$ einen Tensor.

Wir bezeichnen mit ζ^{α} irgend zwei kontravariante Größen und setzen

$$p_{\alpha} = \tfrac{1}{3} \mathfrak{I}_{\lambda\alpha}^{\lambda}.$$

Dann stellt $p = p_{\alpha} \zeta^{\alpha}$ eine invariante Linearform dar.

Es ist

$$\mathfrak{I} \frac{d(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)}{\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v} = d \arg (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)$$

und nach (3)

$$\frac{d(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)}{\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v} = \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda} du^{\alpha},$$

also

$$\mathfrak{I}_{\lambda\alpha}^{\lambda} du^{\alpha} = d \arg (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v). \tag{8}$$

Daher ist

$$p_u du^{\alpha} = \tfrac{1}{3} d \arg (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v). \tag{9}$$

Wir setzen weiter

$$\begin{aligned} P_{111} &= -\mathfrak{I}_{11}^{2}, \\ 3P_{112} &= 3P_{121} = 3P_{211} = \mathfrak{I}_{11}^{1} - 2\mathfrak{I}_{12}^{2}, \\ 3P_{122} &= 3P_{212} = 3P_{221} = -\mathfrak{I}_{22}^{2} + 2\mathfrak{I}_{12}^{1}, \\ P_{222} &= \mathfrak{I}_{22}^{1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Dann ist

$$P_{\alpha\beta\gamma} \zeta^{\alpha} \zeta^{\beta} \zeta^{\gamma} = (\mathfrak{I}_{ik}^{1} \zeta^{2} - \mathfrak{I}_{ik}^{2} \zeta^{1}) \zeta^{i} \zeta^{k}.$$

Da sich die rechte Seite bei Übergang zu neuen Parametern mit der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)}$ multipliziert, ist die kubische Form

$$P = P_{\alpha\beta\gamma}\,\zeta^{\alpha}\,\zeta^{\beta}\,\zeta^{\gamma}$$

invariant nur gegenüber Parametertransformationen mit $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})} = 1$.

§ 2.

Normierung der Parameter. Einteilung der Flächen in fünf Klassen.

Wir werden den weiteren Ausführungen die beiden Formen P und p zugrunde legen. Um Invarianz der Form P zu erzielen, zeichnen wir eine Klasse von Parametersystemen aus, die untereinander nur durch Transformationen mit der Funktionaldeterminante Eins zusammenhängen. Ist die Fläche in irgendwelchen Parametern gegeben, so sollen diese zunächst stets so normiert werden, daß auf der ganzen Fläche

$$|\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v| = 1 \tag{11}$$

ist. Das kann stets auf mancherlei Weise geschehen. Danach sollen nur noch Parametertransformationen mit $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})} = 1$ zugelassen sein. Bei ihnen bleibt die Bedingung (11) erhalten.

Vom algebraischen Standpunkt können nun bezüglich der Formen P und p die folgenden fünf Fälle eintreten, nach denen wir die Flächen in fünf Klassen einteilen:

I. Flächenklasse:

$p \neq 0$, p ist *nicht* in P als Faktor enthalten.

II. Flächenklasse:

$p \neq 0$, p ist *einmal* in P als Faktor enthalten.

III. Flächenklasse:

$p \neq 0$, p ist *zweimal* in P als Faktor enthalten.

IV. Flächenklasse:

$p \neq 0$, p ist *dreimal* in P als Faktor enthalten.

V. Flächenklasse:

$p \equiv 0$.

Die Frage, ob zu sämtlichen Flächenklassen tatsächlich Flächen existieren, ist davon unberührt und bliebe zu untersuchen. Am Schluß dieser Arbeit ist nur noch die Existenz der Klasse II zweifelhaft.

§ 3.

Das vollständige System der Simultanin- und -kovarianten der Formen P und p.

Das vollständige Kovariantensystem der kubischen Form[4]) P besteht aus den Kovarianten

$$(12)\quad D = D_{\alpha\beta}\zeta^\alpha\zeta^\beta = 2\{(P_{111}P_{122} - P_{112}^2)\zeta^1\zeta^1 + (P_{111}P_{222} - P_{122}P_{112})\zeta^1\zeta^2 + (P_{112}P_{222} - P_{122}^2)\zeta^2\zeta^2\},$$

$$(13)\quad Q = Q_{\alpha\beta\gamma}\zeta^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma = (P_{1\alpha\beta}D_{2\gamma} - P_{2\alpha\beta}D_{1\gamma})\zeta^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma,$$

und der Invarianten

$$(14)\quad R = 2(D_{11}D_{22} - D_{12}^2).$$

Zwischen P, D, Q und R besteht die Cayleysche Gleichung

$$(15)\quad 2Q^2 + D^3 + RP^2 = 0.$$

Durch Überschiebung der Linearform p über die Formen P, D und Q erhält man neue Kovarianten und bei Fortsetzung des Prozesses schließlich das vollständige System der Simultanin- und -kovarianten von p und P[5]). Wir setzen

$$(16)\quad p^1 = p_2 \qquad \text{und} \qquad p^2 = -p_1.$$

Wegen (11) transformieren sich die Größen p^i kontravariant.

Dann erhalten wir folgende 13 Ko- bzw. Invarianten:

$$(17)\quad \begin{array}{llll} P_{\alpha\beta\gamma}\zeta^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma, & P_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma, & P_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta\zeta^\gamma, & P_{\alpha\beta\gamma}p\ p^\beta p^\gamma; \\ & D_{\alpha\beta}\zeta^\alpha\zeta^\beta, & D_{\alpha\beta}p^\alpha\zeta^\beta, & D_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta; \\ Q_{\alpha\beta\gamma}\zeta^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma, & Q_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma, & Q_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta\zeta^\gamma, & Q_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta p^\gamma; \\ & & & R; \\ & & p_\alpha\zeta^\alpha. & \end{array}$$

Im folgenden setzen wir noch zur Abkürzung

$$(18)\quad A = P_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta p^\gamma, \quad B = D_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta, \quad C = Q_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta p^\gamma, \quad \varphi = \varphi_\alpha\zeta^\alpha = P_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta\zeta^\gamma.$$

Zwischen den Invarianten besteht die der Gleichung (15) analoge Beziehung

$$2C^2 + B^3 + RA^2 = 0.$$

---

[4]) Vgl. z. B. R. Weitzenböck, Invariantentheorie, II, § 10, Groningen 1923.

[5]) Den Beweis des benutzten allgemeinen Satzes findet man z. B. bei A. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 31. Teubner, Leipzig 1872.

§ 4.

Einführung spezieller Flächenparameter für die Flächenklassen I, II und III.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß sich — mit Ausnahme der Flächen vom Typus IV und V — für einen beliebigen Flächenpunkt O stets solche Parameter einführen lassen, daß in diesem Punkt $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ ist und daß dort noch ein Koeffizient der Form P verschwindet, der nicht schon infolge der Zugehörigkeit zur Klasse II oder III auf der ganzen Fläche Null ist.

Wir können, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, annehmen, daß der betrachtete Punkt die Parameterwerte $u = v = 0$ hat. Sind w_α irgend zwei Konstante, die der Bedingung

$$w_1 (p_2)_0 - w_2 (p_1)_0 = 1$$

genügen — wo der Index 0 den Wert im Nullpunkt bezeichnen soll —, so transformieren wir die Parameter u^1, u^2 vermöge der Gleichungen

$$\overset{*}{u}{}^1 = w_\alpha u^\alpha, \qquad \overset{*}{u}{}^2 = (p_\alpha)_0 u^\alpha. \tag{19}$$

Im Nullpunkt wird dann $\overset{*}{u} = \overset{*}{v} = 0$ und

$$(d\,\overset{*}{u}{}^2)_0 = (p_\alpha\, d\, u^\alpha)_0 = (\overset{*}{p}_\alpha\, d\,\overset{*}{u}{}^\alpha)_0,$$

also

$$(\overset{*}{p}_1)_0 = 0 \quad \text{und} \quad (\overset{*}{p}_2)_0 = 1.$$

Ein anderes Parametersystem $\tilde{u}, \tilde{v}$, für das diese Bedingungen auch erfüllt sind, läßt sich nur noch durch eine Transformation erreichen, für die $\frac{\partial (\overset{*}{\tilde{u}}, \overset{*}{\tilde{v}})}{\partial (\tilde{u}, \tilde{v})} = 1$ und im Nullpunkt $\overset{*}{\tilde{v}} = \tilde{v}$, $d\overset{*}{\tilde{v}} = d\tilde{v}$ ist. Für eine solche Transformation muß daher $\left(\frac{\partial \overset{*}{\tilde{u}}}{\partial \tilde{u}}\right)_0 = 1$ sein, und es kann in den Größen erster Ordnung nur noch $\left(\frac{\partial \overset{*}{\tilde{u}}}{\partial \tilde{v}}\right)_0 = \lambda$ beliebig gewählt werden. Es muß also sein:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\tilde{u}} &= \tilde{u} + \lambda \tilde{v} + \ldots \text{ höhere Glieder}, \\ \overset{*}{\tilde{v}} &= \tilde{v} + \ldots \text{ höhere Glieder}. \end{aligned} \tag{20}$$

Wir wollen nun die Willkür für λ durch eine neue Forderung beseitigen. Die kubische Form P möge nach der Transformation (19) die Koeffizienten

$$\overset{*}{P}_{111} = a_0, \quad \overset{*}{P}_{112} = a_1, \quad \overset{*}{P}_{122} = a_2, \quad \overset{*}{P}_{222} = a_3$$

haben. Nach der Transformation (20) wird dann im Nullpunkt

$$\overset{*}{\tilde{\zeta}}{}^1 = \tilde{\zeta}^1 + \lambda \tilde{\zeta}^2, \quad \overset{*}{\tilde{\zeta}}{}^2 = \tilde{\zeta}^2,$$

und daher

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{111} &= a_0, \\ \tilde{P}_{112} &= a_0 \lambda + a_1, \\ \tilde{P}_{122} &= a_0 \lambda^2 + 2 a_1 \lambda + a_2, \\ \tilde{P}_{222} &= a_0 \lambda^3 + 3 a_1 \lambda^2 + 3 a_2 \lambda + a_3. \end{aligned}$$

Somit haben wir das Ergebnis:

I. Ist $a_0 \neq 0$, d. h. $A \neq 0$, so liegt die Flächenklasse I vor, und für $\lambda = -\left(\frac{a_1}{a_0}\right)_0$ wird im Nullpunkt $P_{112} = 0$.

II. Ist für jeden Punkt der Fläche $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, so liegt die Flächenklasse II vor, und es wird für $\lambda = -\left(\frac{a_2}{2a_1}\right)_0$ im Nullpunkt auch noch $P_{122} = 0$.

III. Ist für jeden Punkt der Fläche $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, so liegt die Flächenklasse III vor, und es wird für $\lambda = -\left(\frac{a_3}{3a_2}\right)_0$ im Nullpunkt auch noch $P_{222} = 0$.

Bei der Flächenklasse IV bleibt λ unbestimmt. Für die Klasse V ist schon die Transformation (19) nicht mehr möglich.

§ 5.

Typische Darstellung der In- und Kovarianten durch die Linearformen p und φ für die Klasse I.

Bei der Klasse I läßt sich erreichen, daß in einem beliebigen Punkt $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ und

$$P = b_0 \zeta^1 \zeta^1 \zeta^1 + 3 b_2 \zeta^1 \zeta^2 \zeta^2 + b_3 \zeta^2 \zeta^2 \zeta^2$$

ist. Dann nehmen die 13 In- bzw. Kovarianten (17) folgende Gestalt an:

$$P_{\alpha\beta\gamma} \zeta^\alpha \zeta^\beta \zeta^\gamma = b_0 \zeta^1 \zeta^1 \zeta^1 + 3 b_2 \zeta^1 \zeta^2 \zeta^2 + b_3 \zeta^2 \zeta^2 \zeta^2,$$

$$P_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha \zeta^\beta \zeta^\gamma = b_0 \zeta^1 \zeta^1 + b_2 \zeta^2 \zeta^2,$$

$$P_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha p^\beta \zeta^\gamma = b_0 \zeta^1 = \varphi,$$

$$P_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha p^\beta p^\gamma = b_0 = A.$$

$$D_{\alpha\beta} \zeta^\alpha \zeta^\beta = 2 (b_0 b_2 \zeta^1 \zeta^1 + b_0 b_3 \zeta^1 \zeta^2 - b_2^2 \zeta^2 \zeta^2),$$

$$D_{\alpha\beta} p^\alpha \zeta^\beta = b_0 (2 b_2 \zeta^1 + b_3 \zeta^2),$$

$$D_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 2 b_0 b_2 = B.$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma} \zeta^\alpha \zeta^\beta \zeta^\gamma = b_0^2 b_3 \zeta^1 \zeta^1 \zeta^1 - 6 b_0 b_2^2 \zeta^1 \zeta^1 \zeta^2 - 3 b_0 b_2 b_3 \zeta^1 \zeta^2 \zeta^2 - (b_0 b_3^2 + 2 b_2^3) \zeta^2 \zeta^2 \zeta^2,$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha \zeta^\beta \zeta^\gamma = b_0 (b_0 b_3 \zeta^1 \zeta^1 - 4 b_2^2 \zeta^1 \zeta^2 - b_2 b_3 \zeta^2 \zeta^2),$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha p^\beta \zeta^\gamma = b_0 (b_0 b_3 \zeta^1 - 2 b_2^2 \zeta^2),$$

$$Q_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha p^\beta p^\gamma = b_0^2 b_3 = C.$$

$$R = -2 b_0 (4 b_2^3 + b_0 b_3^2).$$

$$p_\alpha \zeta^\alpha = \zeta^2.$$

Es wird also $\zeta^1 = \frac{\varphi}{A}$, $\zeta^2 = p$;

$$b_0 = A, \quad b_2 = \frac{B}{2A}, \quad b_3 = \frac{C}{A^2}, \tag{21}$$

und wir können das System der In- und Kovarianten folgendermaßen durch p und φ ausdrücken:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta\gamma}\zeta^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma &= \frac{C}{A^2}p^3 + \frac{3B}{2A^2}p\varphi + \frac{1}{A^2}\varphi^3,\\
P_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma &= \frac{B}{2A}p^2 + \frac{1}{A}\varphi^2,\\
P_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta\zeta^\gamma &= \varphi,\\
P_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta p^\gamma &= A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\alpha\beta}\zeta^\alpha\zeta^\beta &= \frac{-B^2}{2A^2}p^2 + \frac{2C}{A^2}p\varphi + \frac{B}{A^2}\varphi^2,\\
D_{\alpha\beta}p^\alpha\zeta^\beta &= \frac{C}{A}p + \frac{B}{A}\varphi,\\
D_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta &= B.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\alpha\beta\gamma}\zeta^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma &= -\frac{B^3+4C^2}{4A^3}p^3 - \frac{3BC}{2A^3}p^2\varphi\\
&\qquad - \frac{3B^2}{2A^3}p\varphi^2 + \frac{C}{A^3}\varphi^3,\\
Q_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha\zeta^\beta\zeta^\gamma &= -\frac{BC}{2A^2}p^2 - \frac{B^2}{A^2}p\varphi + \frac{C}{A^2}\varphi^2,\\
Q_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta\zeta^\gamma &= -\frac{B^2}{2A}p + \frac{C}{A}\varphi,\\
Q_{\alpha\beta\gamma}p^\alpha p^\beta p^\gamma &= C.
\end{aligned}$$

$$R = -\frac{B^3+2C^2}{A^2}.$$

Diese Beziehungen gelten für beliebige Parametersysteme nach (11).

§ 6.

Vorbereitungen zur kanonischen Darstellung der Flächen I, II und III.

Wir wollen jetzt eine kanonische Darstellung der Flächen vom Typus I, II und III für einen beliebigen Punkt O angeben. Das zugrunde gelegte Parametersystem soll bis zu den Größen erster Ordnung mit dem übereinstimmen, das wir in § 4 dieses Kapitels eingeführt haben, so daß in dem betrachteten Punkt $u = v = 0$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ ist und noch P_{112} bzw. P_{122} bzw. P_{222} verschwindet.

Das vierdimensionale räumliche Koordinatensystem mit den Koordinaten $\Re x$, $\Re y$, $\Im x$ und $\Im y$ legen wir durch eine Affinität von der Form (1) in der Weise fest, daß im Nullpunkt

$$\mathfrak{x} = (0,0), \qquad \mathfrak{x}_u = (1,0), \qquad \mathfrak{x}_v = (0,1)$$

ist. Dadurch sind die sechs Koeffizienten der Affinität (1) eindeutig bestimmt. Man findet leicht, daß $ad - bc$ gleich dem reziproken Wert von $\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v$ im Nullpunkt ist. Es ist also im allgemeinen $ad - bc$ komplex, aber $|ad - bc| = 1$ wegen (11). Daher bleibt auch nach der Affinität die Normierung der Parameter erhalten.

Die $\Re x$-Achse und $\Re y$-Achse sind jetzt im Nullpunkt Tangenten an die u- bzw. v-Kurve, und wir können im besonderen $u = \Re x$ und $v = \Re y$ setzen. Hierdurch wird freilich im allgemeinen $|\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v| \neq 1$. Doch wird sich später zeigen, daß auch durch diese letzte Änderung der Parameter die Bedingung $|\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v| = 1$ in der Umgebung des Nullpunktes bis zu den Gliedern der betrachteten Ordnung erhalten bleibt.

Nach dieser Wahl des räumlichen Koordinatensystems und der Parameter u und v können wir die komplexen Veränderlichen x und y nach u und v in Reihen entwickelt denken:

$$\begin{aligned} x &= u + \frac{i}{2}(au^2 + 2buv + cv^2) + \frac{i}{6}(ku^3 + 3lu^2v + 3muv^2 + nv^3) + \dots \\ y &= v + \frac{i}{2}(\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2) + \frac{i}{6}(\varkappa u^3 + 3\lambda u^2 v + 3\mu uv^2 + \nu v^3) + \dots \end{aligned} \tag{22}$$

Hierin sind die 14 Koeffizienten reelle invariante Größen, die wir nun in der Weise angeben wollen, daß sie sich aus jeder beliebigen Flächendarstellung, für die $|\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v| = 1$ ist, berechnen lassen, ohne daß erst irgendwelche Transformationen auszuführen sind.

Nach den im ersten Kapitel angegebenen Formeln errechnet man aus (22):

$$\begin{aligned} &(\Re^\lambda_{ik})_0 = 0; \\ &(\Im^1_{11})_0 = a, \qquad (\Im^1_{12})_0 = b, \qquad (\Im^1_{22})_0 = c, \\ &(\Im^2_{11})_0 = \alpha, \qquad (\Im^2_{12})_0 = \beta, \qquad (\Im^2_{22})_0 = \gamma. \\ &|\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v|^2 = 1 + (\text{Glieder zweiter Ordnung}) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{a+\beta}{3} + \frac{k+\lambda}{3}u + \frac{l+\mu}{3}v + \dots, \\ p_2 &= \frac{b+\gamma}{3} + \frac{l+\mu}{3}u + \frac{m+\nu}{3}v + \dots. \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} P_{111} &= -\alpha \qquad -\varkappa u \qquad -\lambda v \qquad + \dots, \\ P_{112} &= \frac{a-2\beta}{3} + \frac{k-2\lambda}{3}u + \frac{l-2}{3}v + \dots, \\ P_{122} &= \frac{2b-\gamma}{3} + \frac{2l-\mu}{3}u + \frac{2m-\nu}{3}v + \dots, \\ P_{222} &= c + mu + nv \dots. \end{aligned}$$

§ 7.

Kanonische Flächendarstellung der Klasse I.

Um die Koeffizienten der Darstellung (22) im Falle I zu berechnen, können wir nach den Ausführungen des vorigen Paragraphen annehmen, daß im Nullpunkt $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, also $p^1 = 1$, $p^2 = 0$ und $P_{112} = 0$ ist. Dann wird nach (18) im Nullpunkt

$$A = P_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha p^\beta p^\gamma = P_{111} \neq 0,$$
$$\varphi_i = P_{\alpha\beta i} p^\alpha p^\beta = P_{11i},$$

also, wenn wir wie bei p auch bei der Linearform φ den Index der Koeffizienten nach oben ziehen,

$$\varphi_1 = -\varphi^2 = A, \quad \varphi_2 = \varphi^1 = 0.$$

Mit Rücksicht auf (21) und (23) erhält man dann

$$P_{111} = A = -\alpha,$$
$$P_{112} = 0 = \frac{a-2\beta}{3}, \qquad a+\beta = 0,$$
$$P_{122} = \frac{B}{2A} = \frac{2b-\gamma}{3}, \qquad b+\gamma = 3;$$
$$P_{222} = \frac{C}{A^2} = c;$$

und daraus für die Koeffizienten zweiter Ordnung in (22)

$$(24) \qquad \begin{array}{lll} a = 0, & b = \frac{B+2A}{2A}, & c = \frac{C}{A^2}, \\ \alpha = -A, & \beta = 0, & \gamma = \frac{4A-B}{2A}. \end{array}$$

Um die Koeffizienten dritter Ordnung zu berechnen, bilden wir acht neue Invarianten $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Dazu bedienen wir uns der kovarianten Ableitung des Tensors $P_{\alpha\beta\gamma}$ bezüglich der Koeffizienten $\Re^\lambda_{ik}$ der Parallelverschiebung. Den Index der kovarianten Ableitung setzen wir in Klammern[6]).

Wir definieren

$$(25) \qquad \begin{array}{ll} A_1 = P_{\lambda\mu\nu(m)} p^\lambda p^\mu p^\nu p^m, & A_5 = P_{\lambda\mu\nu(m)} p^\lambda p^\mu p^\nu \varphi^m, \\ A_2 = P_{\lambda\mu\nu(m)} p^\lambda p^\mu \varphi^\nu p^m, & A_6 = P_{\lambda\mu\nu(m)} p^\lambda p^\mu \varphi^\nu \varphi^m, \\ A_3 = P_{\lambda\mu\nu(m)} p^\lambda \varphi^\mu \varphi^\nu p^m, & A_7 = P_{\lambda\mu\nu(m)} p^\lambda \varphi^\mu \varphi^\nu \varphi^m, \\ A_4 = P_{\lambda\mu\nu(m)} \varphi^\lambda \varphi^\mu \varphi^\nu p^m, & A_8 = P_{\lambda\mu\nu(m)} \varphi^\lambda \varphi^\mu \varphi^\nu \varphi^m. \end{array}$$

---

[6]) Zur Bildung der kovarianten Ableitung vgl. z. B. T. Levi-Civita, Der absolute Differentialkalkül, 3. Kap. Berlin, Springer 1928. Es ist also z. B.

$$P_{\lambda\mu\nu(m)} = P_{\lambda\mu\nu,m} - P_{\lambda\mu i} \Re^i_{\nu m} - P_{\lambda i\nu} \Re^i_{\mu m} - P_{i\mu\nu} \Re^i_{\lambda m}.$$

Diese acht Größen sind jedenfalls wie die kubische Form P invariant gegenüber Parametertransformationen mit der Funktionaldeterminante Eins. Es soll jetzt gezeigt werden, daß ihr Wert *im Nullpunkt* auch bei der letzten Transformation, die in § 6 durchgeführt wurde, ungeändert blieb. Ehe wir dort $u = \Re x$ und $v = \Re y$ als neue Parameter einführten, waren die Parameter $\overset{*}{u}, \overset{*}{v}$ normiert. Es war also $|\mathfrak{x}^*_u \mathfrak{x}^*_v| = 1$. Nach der Transformation wurde nach (23)

$$|\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v|^2 = 1 + (\text{Glieder zweiter Ordnung}) + \ldots,$$

also im Nullpunkt

$$|\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v|_0 = 1, \qquad d\,|\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v|_0 = 0.$$

Da sich $\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v$ bei Parameterwechsel mit der Funktionaldeterminante multipliziert, war also für gleichsinnige Parameter $\frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)} = |\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v|$ und daher

$$\left(\frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)}\right)_0 = 1, \qquad \left(d\,\frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)}\right)_0 = 0. \tag{26}$$

Die kubische Form P transformiert sich folgendermaßen:

$$\overset{*}{P}_{\alpha\beta\gamma}\,\overset{*}{\zeta}^{\alpha}\,\overset{*}{\zeta}^{\beta}\,\overset{*}{\zeta}^{\gamma} = P_{\alpha\beta\gamma}\,\zeta^{\alpha}\,\zeta^{\beta}\,\zeta^{\gamma}\,\frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)}.$$

Daher ist

$$d\left(\overset{*}{P}_{\alpha\beta\gamma}\,\overset{*}{\zeta}^{\alpha}\,\overset{*}{\zeta}^{\beta}\,\overset{*}{\zeta}^{\gamma}\right) = \frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)}\,d\left(P_{\alpha\beta\gamma}\,\zeta^{\alpha}\,\zeta^{\beta}\,\zeta^{\gamma}\right) + P_{\alpha\beta\gamma}\,\zeta^{\alpha}\,\zeta^{\beta}\,\zeta^{\gamma}\,d\,\frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)}$$

und bei Parallelverschiebung des Vektors $\zeta^{\alpha}\,\mathfrak{x}_{\alpha}$ wird

$$P_{\alpha\beta\gamma(m)}\,\overset{*}{\zeta}^{\alpha}\,\overset{*}{\zeta}^{\beta}\,\overset{*}{\zeta}^{\gamma}\,d\,\overset{*}{u}^{m} = P_{\alpha\beta\gamma(m)}\,\zeta^{\alpha}\,\zeta^{\beta}\,\zeta^{\gamma}\,d\,u^{m}\,\frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)} + P_{\alpha\beta\gamma}\,\zeta^{\alpha}\,\zeta^{\beta}\,\zeta^{\gamma}\,d\,\frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)}.$$

Im Nullpunkt ist also nach (26)

$$\overset{*}{P}_{\alpha\beta\gamma(m)}\,\overset{*}{\zeta}^{\alpha}\,\overset{*}{\zeta}^{\beta}\,\overset{*}{\zeta}^{\gamma}\,d\,\overset{*}{u}^{m} = P_{\alpha\beta\gamma}\,\zeta^{\alpha}\,\zeta^{\beta}\,\zeta^{\gamma}\,d\,u^{m}.$$

Die Größen $P_{\alpha\beta\gamma(m)}$ transformieren sich also im Nullpunkt auch bei der letzten Parametertransformation wie Tensorkomponenten. Im besonderen haben daher die Größen $A_1, \ldots, A_5$ ihre Werte im Nullpunkt bei dieser Transformation nicht geändert. Es ist

$$\begin{aligned}
A_1 &= A\,P_{111,1} = -\varkappa,\\
A_2 &= -A\,P_{112,1} = -A\,\frac{k - 2\lambda}{3},\\
A_3 &= A^2\,P_{122,1} = A^2\,\frac{2l - \mu}{3},\\
A_4 &= -A^3\,P_{222,1} = -A^3\,m;
\end{aligned}$$

$$A_5 = -A\,P_{111,2} = A\lambda,$$
$$A_6 = A^2 P_{112,2} = A^2\frac{l-2\mu}{3},$$
$$A_7 = -A^3 P_{122,2} = -A^3\frac{2m-\nu}{3},$$
$$A_8 = A^4 P_{222,2} = A^4 n.$$

Daraus ergeben sich für die Koeffizienten dritter Ordnung folgende Werte:

$$k = \frac{2A_5 - 3A_2}{A},\quad l = \frac{2A_3 - A_6}{A^2},\quad m = \frac{-A_4}{A^3},\quad n = \frac{A_8}{A^4};$$
$$\varkappa = -A_1,\quad \lambda = \frac{A_5}{A},\quad \mu = \frac{A_3 - A_6}{A^2},\quad \nu = \frac{3A_7 - 2A_4}{A^3}. \tag{27}$$

Setzen wir (24) und (27) in (22) ein, so erhalten wir für die Flächenklasse I folgende kanonische Darstellung:

$$x = u + \frac{i}{2}\left(\frac{2A+B}{A}uv + \frac{C}{A^2}v^2\right) + \frac{i}{6}\left(\frac{2A_5 - 3A_2}{A}u^3 + 3\frac{2A_3 - A_6}{A^2}u^2 v - \frac{3A_4}{A^3}uv^2 + \frac{A_8}{A^4}v^3\right) + \ldots,$$
$$y = v + \frac{i}{2}\left(-Au^2 + \frac{4A-B}{2A}v^2\right) + \frac{i}{6}\left(-A_1 u^3 + \frac{3A_5}{A}u^2 v + 3\frac{A_3 - A_6}{A^2}uv^2 + \frac{3A_7 - 2A_4}{A^3}v^3\right) + \ldots. \tag{28}$$

§ 8.

Invariante Ableitungen für die Flächenklasse I.

Wir definieren die invarianten Ableitungen einer Invariante $\Phi(u, v)$ bezüglich der Linearform p als

$$\delta_p \Phi = \Phi_\nu p^\nu, \tag{29}$$

wo wieder $\frac{\partial \Phi}{\partial u^\nu} = \Phi_\nu$ gesetzt ist, und entsprechend für die Linearform φ als $\delta_\varphi \Phi = \Phi_\nu \varphi^\nu$. Diese und die folgenden Ableitungen bezüglich einer Linearform lassen sich auch von beliebigen Funktionen von u und v bilden, nur sind sie dann nicht notwendig invariant. Es ist

$$\delta_p \delta_\varphi \Phi = (\Phi_\nu \varphi^\nu)_u p^u = \Phi_{\nu u}\varphi^\nu p^u + \Phi_\nu \varphi^\nu_u p^u$$

und

$$(\delta_p \delta_\varphi - \delta_\varphi \delta_p)\Phi = \Phi_\nu(\varphi^\nu_u p^u - p^\nu_u \varphi^u). \tag{30}$$

Allgemein sind auch diese Bildungen $\delta_p \delta_\varphi$ usw. nur invariant gegenüber Transformationen mit $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})} \equiv 1$. Wegen der Beziehung (26) haben sich aber auch bei der letzten in § 6 durchgeführten Parametertransfor-

mation die Werte der zweiten invarianten Ableitungen im Nullpunkt nicht geändert[7]). Wir können uns daher der invarianten Ableitungen auch bezüglich der hier zugrunde gelegten Parameter bedienen, soweit wir — wie es im folgenden geschehen soll — die zweite Ableitungsordnung nicht überschreiten und die Werte dieser Ableitungen nur im Nullpunkt betrachten.

Für das bei der kanonischen Darstellung zugrunde gelegte Parametersystem ist im Nullpunkt

$$\delta_p \Phi = \Phi_u, \qquad \delta_\varphi \Phi = -A \Phi_v.$$

Nach (30) ist daher

$$\begin{aligned}(\delta_p \delta_\varphi - \delta_\varphi \delta_p)\Phi &= \delta_p \Phi (\varphi_1^1 + A p_2^1) - \frac{\delta_\varphi \Phi}{A}(\varphi_1^2 + A p_2^2) \\ &= \delta_p \Phi (\varphi_{21} + A p_{22}) + \frac{\delta_\varphi \Phi}{A}(\varphi_{11} + A p_{12}).\end{aligned} \tag{31}$$

Aus den Gleichungen (23) errechnet man

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A + \left(-\varkappa + 2A\frac{l+\mu}{3}\right)u + \left(-\lambda + 2A\frac{m+\nu}{3}\right)v + \ldots, \\ \varphi_2 &= \left(k\frac{A-B}{3A} - \lambda\frac{2A-B}{3A}\right)u + \left(l\frac{A-B}{3A} - \mu\frac{2A+B}{3A}\right)v + \ldots.\end{aligned} \tag{32}$$

Setzt man in die zweiten Ableitungen p_{ik} und φ_{ik} die Formeln (27) ein, so erhält man aus (31) folgende Vertauschungsformel für die zweiten invarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned}(\delta_p \delta_\varphi - \delta_\varphi \delta_p)\Phi = &\frac{(B-A)A_2 - A_4 - BA_5 + A_7}{A^2}\delta_p \Phi \\ &+ \frac{AA_1 + 3A_3 - 2A_6}{A^2}\delta_\varphi \Phi.\end{aligned} \tag{33}$$

Wir wollen nun die invarianten Ableitungsgleichungen für den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ aufstellen. Sind r und s irgend zwei invariante Linearformen — z. B. p oder φ —, so ist im Sinne der Definition (29)

$$\begin{aligned}\delta_r \delta_s \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}_{\mu\nu} r^\mu s^\nu + s^\lambda_\mu r^\mu \mathfrak{x}_\lambda \\ &= (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} r^\mu s^\nu + s^\lambda_\mu r^\mu)\mathfrak{x}_\lambda.\end{aligned}$$

Bei der kanonischen Darstellung sind nach (23) im Nullpunkt die Größen $\Re^\lambda_{ik}$ Null. Es wird also

$$\delta_r \delta_s \mathfrak{x} = (i\mathfrak{I}^1_{\mu\nu} r^\mu s^\nu + s_{2\mu} r^\mu)\delta_p \mathfrak{x} - \frac{1}{A}(i\mathfrak{I}^2_{\mu\nu} r^\mu s^\nu - s_{1\mu} r^\mu)\delta_\varphi \mathfrak{x}.$$

---

[7]) Man erhält als Transformationsformel

$$\Delta^3 \delta^*_p \delta^*_\varphi \Phi = \Delta \delta_p \delta_\varphi \Phi - \frac{\partial \Delta}{\partial u^\lambda} p^\lambda \delta_\varphi \Phi; \qquad \Delta = \frac{\partial(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})}{\partial(u, v)}.$$

Dann folgt die Behauptung aus (26).

Demnach erhält man für die zweiten invarianten Ableitungen von $\mathfrak{x}$:

(34)

	$\delta_p \mathfrak{x}$	$i\delta_p \mathfrak{x}$	$\delta_\varphi \mathfrak{x}$	$i\delta_\varphi \mathfrak{x}$
$\delta_p \delta_p \mathfrak{x}$	p_{21}	$\mathfrak{I}^1_{11}$	$\frac{p_{11}}{A}$	$-\frac{\mathfrak{I}^2_{11}}{A}$
$\delta_p \delta_\varphi \mathfrak{x}$	φ_{21}	$-\mathfrak{I}^1_{12} A$	$\frac{\varphi_{11}}{A}$	$\mathfrak{I}^2_{12}$
$\delta_\varphi \delta_p \mathfrak{x}$	$-p_{22} A$	$-\mathfrak{I}^1_{21} A$	$-p_{12}$	$\mathfrak{I}^2_{21}$
$\delta_\varphi \delta_\varphi \mathfrak{x}$	$-\varphi_{22} A$	$\mathfrak{I}^1_{22} A^2$	$-\varphi_{12}$	$-\mathfrak{I}^2_{22} A$

Setzt man für $\mathfrak{I}^\lambda_{ik}$, p_{ik} und φ_{ik} die aus (23) und (32) ersichtlichen Werte ein, so ergibt sich nach (24) und (27) schließlich:

(35)

	$\delta_p \mathfrak{x}$	$i\delta_p \mathfrak{x}$	$\delta_\varphi \mathfrak{x}$	$i\delta_\varphi \mathfrak{x}$
$\delta_p \delta_p \mathfrak{x}$	$\frac{3A_3 - 2A_6}{3A^2}$	0	$\frac{-A_2 + A_5}{A^2}$	1
$\delta_p \delta_\varphi \mathfrak{x}$	$\frac{(B-A)A_2 - BA_5}{A^2}$	$-\left(1+\frac{B}{2}\right)$	$\frac{3AA_1 + 6A_3 - 4A_6}{3A^2}$	0
$\delta_\varphi \delta_p \mathfrak{x}$	$\frac{A_4 - A_7}{A^2}$	$-\left(1+\frac{B}{2}\right)$	$\frac{-3A_3 + 2A_6}{3A^2}$	0
$\delta_\varphi \delta_\varphi \mathfrak{x}$	$\frac{3BA_3 - A_6(A+2B)}{3A^2}$	C	$\frac{-2A_4 + AA_5 - 2A_7}{A^2}$	$\frac{B}{2} - 2A$

§ 9.

Kanonische Flächendarstellung der Klasse II.

Bei der Flächenklasse II ist die kubische Form P das Produkt der Linearform p und einer quadratischen Form $q = q_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu$. Es ist also

$$\begin{aligned} P_{111} &= q_{11} p_1, \\ 3P_{112} &= q_{11} p_2 + 2 q_{12} p_1, \\ 3P_{122} &= 2 q_{12} p_2 + q_{22} p_1, \\ P_{222} &= q_{22} p_2. \end{aligned} \tag{36}$$

Die quadratische und die lineare Form haben folgende In- bzw. Kovarianten:

$$\begin{aligned} \psi_\nu &= q_{\mu\nu} p^\mu, \\ E &= q_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \neq 0, \text{ da sonst die Klasse III vorliegt,} \\ F &= q_{11} q_{22} - q_{12}^2. \end{aligned} \tag{37}$$

Nach § 6 wird im Nullpunkt

$$p_1 = -p^2 = 0, \quad p_2 = p^1 = 1, \quad P_{111} = P_{122} = 0,$$

und daher

$$3P_{112} = q_{11} = E \neq 0,$$
$$3P_{122} = 2q_{12} = 0, \qquad \psi_1 = -\psi^2 = E,$$
$$P_{222} = q_{22} = \frac{F}{E}; \qquad \psi_2 = \psi^1 = 0.$$

Daraus folgt nach (23) für die Glieder zweiter Ordnung in (22)

$$(38) \qquad \begin{aligned} a &= E, & b &= 1, & c &= \frac{F}{E}, \\ \alpha &= 0, & \beta &= -E, & \gamma &= 2. \end{aligned}$$

Um die Koeffizienten dritter Ordnung zu berechnen, definieren wir entsprechend § 7 folgende neue Invarianten:

$$(39) \qquad \begin{aligned} E_1 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma p^m, & E_5 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma \psi^m, \\ E_2 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha p^\beta \psi^\gamma p^m, & E_6 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha p^\beta \psi^\gamma \psi^m, \\ E_3 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha \psi^\beta \psi^\gamma p^m, & E_7 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha \psi^\beta \psi^\gamma \psi^m, \\ E_4 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, \psi^\alpha \psi^\beta \psi^\gamma p^m, & E_8 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, \psi^\alpha \psi^\beta \psi^\gamma \psi^m. \end{aligned}$$

Daraus erhält man die den Formeln (26) entsprechenden Beziehungen

$$(40) \qquad \begin{aligned} k &= \frac{2E_5 - 3E_2}{E}, & l &= \frac{2E_3 - E_6}{E^2}, & m &= \frac{-E_4}{E^3}, & n &= \frac{E_8}{E^4}; \\ \varkappa &= -E_1, & \lambda &= \frac{E_5}{E}, & \mu &= \frac{E_3 - E_6}{E^2}, & \nu &= \frac{3E_7 - 2E_4}{E^3}. \end{aligned}$$

In diesem Falle bestehen zwischen den acht Invarianten noch zwei lineare Gleichungen, die wir z. B. folgendermaßen gewinnen: Wir berechnen A bis zu den Gliedern erster Ordnung.

$$A = \left(-\varkappa - E\frac{k+\lambda}{3}\right)u + \left(-\lambda - E\frac{l+\mu}{3}\right)v + \ldots.$$

Da nun $A \equiv 0$ ist, müssen die Koeffizienten von u und v verschwinden. Daraus folgt mit Rücksicht auf (40)

$$(41) \qquad E_1 + E_3 - E_5 = 0 \quad \text{und} \quad 3E_3 + 3E_5 - 2E_6 = 0.$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen E_1 und E_5, so ergibt sich für die Flächen II folgende kanonische Darstellung:

$$(42) \qquad \begin{aligned} x &= u + \frac{i}{2}\left(Eu^2 + 2uv + \frac{F}{E}v^2\right) + \frac{i}{6}\left(\frac{-9E_2 - 6E_3 + 4E_6}{3E}u^3\right. \\ &\quad \left. + 3\frac{2E_3 - E_6}{E^2}u^2 v - 3\frac{E_4}{E^3}uv^2 + \frac{E_8}{E^4}v^3\right) + \ldots, \\ y &= v + \frac{i}{2}(-Euv + v^2) + \frac{i}{6}\left(\frac{3E_2 + 3E_3 - 2E_6}{3}u^3\right. \\ &\quad \left. + \frac{-3E_3 + 2E_6}{E}uv^2 + 3\frac{E_3 - E_6}{E^2}uv^2 + \frac{-2E_4 + 3E_7}{E^3}v^3\right) + \ldots. \end{aligned}$$

§ 10.

Invariante Ableitungen für die Flächenklasse II.

Wir wollen jetzt für die invarianten Ableitungen bezüglich der Linearformen p und ψ die entsprechenden Formeln wie in § 8 herstellen. Dazu ist es nötig, wie ein Vergleich mit den dort entwickelten Formeln zeigt, die Ableitungen von ψ_μ im Nullpunkt zu kennen. Man erhält zunächst

$$\psi_{11} = q_{11,1} + E\frac{l+\mu}{3}, \qquad \psi_{12} = q_{11,2} + E\frac{m+\nu}{3},$$
$$\psi_{21} = q_{12,1} - \frac{F}{E}\frac{k+\lambda}{3}, \qquad \psi_{22} = q_{12,2} - \frac{F}{E}\frac{l+\mu}{3}.$$

Hierin müssen wir nun die Werte der Ableitungen von $q_{\mu\nu}$ im Nullpunkt feststellen. Dazu differenzieren wir die zweite und dritte der Gleichungen (36) nach u und v und setzen in das Ergebnis die Werte im Nullpunkt ein. So ergibt sich:

$$q_{11,1} = k - 2\lambda - E\frac{l+\mu}{3},$$
$$q_{11,2} = l - 2\mu - E\frac{m+\nu}{3},$$
$$2q_{12,1} = 2l - \mu - \frac{F}{E}\frac{k+\lambda}{3},$$
$$2q_{12,2} = 2m - \nu - \frac{F}{E}\frac{l+\mu}{3}.$$

Es ist also im Nullpunkt

$$\psi_{11} = k - 2\lambda, \qquad \psi_{21} = l - \frac{\mu}{2} - \frac{F}{E}\frac{k+\lambda}{2},$$
$$\psi_{12} = l - 2\mu, \qquad \psi_{22} = m - \frac{\nu}{2} - \frac{F}{E}\frac{l+\mu}{2}.$$

Setzen wir hierin die in (40) angegebenen Werte ein und eliminieren aus (41) wieder E_1 und E_5, so wird schließlich

$$(43)\qquad \begin{aligned} \psi_{11} &= -\frac{3E_2}{E}, & \psi_{21} &= \frac{3E_3 - E_6 + F(3E_2 + 3E_3 - 2E_6)}{2E^2},\\ \psi_{12} &= \frac{E_6}{E^2}, & \psi_{22} &= \frac{-3E_7 + F(-3E_3 + 2E_6)}{2E^3}. \end{aligned}$$

Definieren wir jetzt entsprechend (29) die invariante Ableitung einer Invarianten $\Phi(u, v)$ bezüglich ψ als $\delta_\psi \Phi = \Phi_\nu \psi^\nu$, so gilt als Analogon der Formel (31):

$$(\delta_p \delta_\psi - \delta_\psi \delta_p)\Phi = (\psi_{21} + E p_{22})\,\delta_p \Phi + (\psi_{11} + E p_{12})\frac{\delta_\psi \Phi}{E}.$$

Setzen wir hierin die Größen p_{ik}, die sich aus (23), (40) und (41) ergeben, und die Größen ψ_{ik} aus (43) ein, so erhalten wir als Vertauschungsformel:

$$(\delta_p \delta_\psi - \delta_\psi \delta_p)\Phi = \frac{3E_3 - 2E_4 - E_6 + 2E_7 + F(3E_2 + 3E_3 - 2E_6)}{2E^2}\,\delta_p \Phi + \frac{-9E_2 + 3E_3 - 2E_6}{3E^2}\,\delta_\psi \Phi. \tag{44}$$

Für die zweiten invarianten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ erhält man ein analoges Formelsystem wie (34). Man braucht dort nur φ durch ψ und A durch E zu ersetzen. Daraus ergibt sich dann:

(45)

	$\delta_p \mathfrak{x}$	$i\,\delta_p \mathfrak{x}$	$\delta_\psi \mathfrak{x}$	$i\,\delta_\psi \mathfrak{x}$
$\delta_p \delta_p \mathfrak{x}$	$\frac{3E_3 - 2E_6}{3E^2}$	$\frac{E}{3}$	$\frac{-3E_2 - 3E_3 + 2E_6}{3E^2}$	0
$\delta_p \delta_\psi \mathfrak{x}$	$\frac{3E_3 - E_6 + F(3E_2 + 3E_3 - 2E_6)}{2E^2}$	$-E$	$\frac{-3E_2}{E^2}$	$-\frac{E}{3}$
$\delta_\psi \delta_p \mathfrak{x}$	$\frac{E_4 - E_7}{E^2}$	$-E$	$\frac{2E_6 - 3E_3}{3E^2}$	$-\frac{E}{3}$
$\delta_\psi \delta_\psi \mathfrak{x}$	$\frac{3E_7 + F(3E_3 - 2E_6)}{2E^2}$	EF	$\frac{-E_6}{E^2}$	$-2E$

§ 11.

Kanonische Flächendarstellung der Fläche III.

Bei der Flächenklasse III ist die Linearform p zweimal in der kubischen Form P enthalten. Bezeichnen wir die restliche Linearform mit $\chi = \chi_\nu \zeta^\nu$, so ist

$$\begin{aligned} P_{111} &= (p_1)^2 \chi_1, \\ 3P_{112} &= (p_1)^2 \chi_2 + 2 p_1 p_2 \chi_1, \\ 3P_{122} &= 2 p_1 p_2 \chi_2 + (p_2)^2 \chi_1, \\ P_{222} &= (p_2)^2 \chi_2. \end{aligned} \tag{46}$$

Es ist $H = \chi_\nu p^\nu \neq 0$, da sonst die Flächenklasse IV vorliegt. Nach § 6 wird im Nullpunkt

$$p_1 = -p^2, \quad p_2 = p^1 = 1, \quad P_{111} = P_{112} = P_{222} = 0$$

und daher

$$3P_{122} = \chi_1 = -\chi^2 = H \neq 0, \quad P_{222} = \chi_2 = \chi^1 = 0.$$

Daraus folgt nach (23) für die Glieder zweiter Ordnung in (22)

$$\begin{aligned} &a = 0, \qquad b = \frac{H}{3} + 1, \qquad c = 0, \\ &\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 2 - \frac{H}{3} \end{aligned} \tag{47}$$

Zur Berechnung der Glieder dritter Ordnung definieren wir folgende neue Invarianten:

$$\begin{aligned} H_1 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha p^\beta p^\gamma p^m, \\ H_2 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha p^\beta \chi^\gamma p^m, \\ H_3 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha \chi^\beta \chi^\gamma p^m, \\ H_4 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, \chi^\alpha \chi^\beta \chi^\gamma p^m, \\ H_5 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha p^\beta p^\beta \chi^m, \\ H_6 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha p^\beta \chi^\gamma \chi^m, \\ H_7 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, p^\alpha \chi^\beta \chi^\gamma \chi^m, \\ H_8 &= P_{\alpha\beta\gamma(m)}\, \chi^\alpha \chi^\beta \chi^\gamma \chi^m. \end{aligned} \tag{48}$$

Daraus erhält man entsprechend den früheren Fällen:

$$\begin{aligned} &k = \frac{2H_5 - 3H_2}{H}, \quad l = \frac{2H_3 - H_6}{H^2}, \quad m = \frac{-H_4}{H^3}, \quad n = \frac{H_8}{H^4}; \\ &\varkappa = -H_1, \qquad \lambda = \frac{H_5}{H}, \qquad \mu = \frac{H_3 - H_6}{H^2}, \quad \nu = \frac{3H_7 - 2H_4}{H^3}. \end{aligned} \tag{49}$$

Wie bei der vorigen Flächenklasse bestehen auch hier zwischen den Invarianten $H_1, \ldots, H_8$ lineare Beziehungen. Um sie zu erhalten, differenzieren wir die erste und zweite der Gleichungen (46) nach u und v und setzen in das Ergebnis die Werte im Nullpunkt ein. Dann ergibt sich

$$\varkappa = \lambda = 0,$$

also

$$H_1 = H_5 = 0,$$

und

$$2\,\frac{k+\lambda}{3}\,H = k - 2\lambda,$$

$$2\,\frac{l+\mu}{3}\,H = l - 2\mu.$$

Daraus erhält man nach (49) die Beziehungen

$$H_2(2H - 3) = 0, \quad H_3 = \frac{H_6(3 + 4H)}{6H}.$$

Die Formeln (49) nehmen daher die Gestalt an

$$(50)\quad \begin{aligned} &k = -\frac{3H_2}{H},\quad l = H_6\frac{3+H}{3H^3},\quad m = \frac{-H_4}{H^3},\qquad n = \frac{H_8}{H^4};\\ &\varkappa = 0,\qquad \lambda = 0,\qquad \mu = H_6\frac{3-2H}{6H^3},\quad \nu = \frac{3H_7-2H_4}{H^3}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende kanonische Darstellung der Flächenklasse III:

$$(51)\quad \begin{aligned} x &= u + i\left(1+\frac{H}{3}\right)uv + \frac{i}{6}\left(\frac{-3H_2}{H}u^3 + H_6\frac{3+H}{H^3}u^2v - \frac{3H_4}{H^3}uv^2\right.\\ &\qquad\left. + \frac{H_8}{H^4}v^3\right) + \ldots,\\ y &= v + \frac{i}{2}\left(2-\frac{H}{3}\right)v^2 + \frac{i}{6}\left(H_6\frac{3-2H}{2H^3}uv^2 + \frac{3H_7-2H_4}{H^3}v^3\right) + \ldots. \end{aligned}$$

Es muß außerdem noch $H_2(2H-3) = 0$ sein. Bis zu den Gliedern zweiter Ordnung bleibt die Entwicklung (51) auch für die Flächenklasse IV mit $H = 0$ gültig.

§ 12.

Invariante Ableitungen für die Flächenklasse III.

Um die Vertauschungsformel und die invarianten Ableitungsgleichungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ aufzustellen, berechnen wir die Ableitungen von χ_α im Nullpunkt. Wir differenzieren die dritte und vierte der Gleichungen (46) und erhalten mit Rücksicht auf (50) für den Nullpunkt

$$(52)\quad \begin{aligned} &\chi_{11} = \frac{3H_6}{2H^3},\quad \chi_{12} = \frac{2H(H_4-H_7)-3H_7}{H^3},\\ &\chi_{21} = \frac{-H_4}{H^3},\quad \chi_{22} = \frac{H_8}{H^4}. \end{aligned}$$

Definieren wir die invariante Ableitung einer Invariante $\Phi(u,v)$ bezüglich χ als $\delta_\chi\Phi = \Phi_\nu\chi^\nu$, so gilt entsprechend (31) die Formel

$$(\delta_p\delta_\chi - \delta_\chi\delta_p)\Phi = (\chi_{21} + Hp_{22})\delta_p\Phi + (\chi_{11} + Hp_{12})\frac{\delta_\chi\Phi}{H}.$$

Die Größen p_{ik} ergeben sich aus (23) und (50). Setzen wir sie und χ_{ik} aus (52) in die letzte Formel ein, so erhalten wir die Vertauschungsformel

$$(53)\quad (\delta_p\delta_\chi - \delta_\chi\delta_p)\Phi = \frac{-H_4(1+H)+HH_7}{H}\delta_p\Phi + \frac{H_6(3+H)}{2H}\delta_\chi\Phi.$$

Für die zweiten invarianten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ erhält man ein analoges Formelsystem wie (34). Man braucht dort nur φ durch χ, und A durch H zu ersetzen. Daraus gewinnt man:

(54)

	$\delta_p \mathfrak{x}$	$i\,\delta_p \mathfrak{x}$	$\delta_\chi \mathfrak{x}$	$i\,\delta_\chi \mathfrak{x}$
$\delta_p \delta_p \mathfrak{x}$	$\frac{H_6}{2H^3}$	0	$\frac{-H_2}{H^2}$	0
$\delta_p \delta_\chi \mathfrak{x}$	$\frac{-H_4}{H^3}$	$-H(1+H)$	$\frac{3H_6}{2H^4}$	0
$\delta_\chi \delta_p \mathfrak{x}$	$\frac{H_4 - H_7}{H^2}$	$-H(1+H)$	$\frac{-H_6}{2H^3}$	0
$\delta_\chi \delta_\chi \mathfrak{x}$	$\frac{-H_8}{H^3}$	0	$\frac{-2H(H_4 - H_7) + 3H_7}{H^3}$	$H(H-2)$

Wie bei der kanonischen Darstellung (51) muß auch hier noch die Bedingung $H_2(2H - 3) = 0$ berücksichtigt werden.

Drittes Kapitel.

Minimal- und Schiebflächen. Flächen mit integrabler Parallelverschiebung. Geradlinienflächen.

§ 1.

Bedingung für Minimalflächen.

Entsprechend der Definition des Flächeninhalts (Kap. I, § 6) erhält man für die Oberfläche folgendes Integral:

(55) $$F = \int\int |\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v|\, du\, dv.$$

Das so definierte Oberflächenintegral ist invariant gegenüber Parameterwechsel und multipliziert sich bei Koordinatenwechsel mit $|ad - bc|$.

Wir wollen jetzt die Bedingung für die Extremalen des Variationsproblems $\delta F = 0$ ableiten. Setzen wir zur Abkürzung $\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = f$ und $\sqrt{\frac{\bar{f}}{f}} = r$, so ist

$$\delta F = \delta \int\int \sqrt{f\bar{f}}\, du\, dv = \int\int \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\bar{f}}{f}}\,\delta f + \sqrt{\frac{f}{\bar{f}}}\,\delta \bar{f}\right\} du\, dv.$$

Es muß daher sein

$$\int\int \Re(r\,\delta f)\, du\, dv = 0.$$

Wir schreiben $r \cdot \delta f$ in der Form

$$r\,\delta f = \frac{\partial}{\partial u}\{r(y_v\,\delta x - x_v\,\delta y)\} + \frac{\partial}{\partial v}\{r(x_u\,\delta y - y_u\,\delta x)\}$$
$$- r_u(y_v\,\delta x - x_v\,\delta y) - r_v(x_u\,\delta y - y_u\,\delta x).$$

Dann läßt sich das über den Realteil der beiden ersten Glieder erstreckte Doppelintegral nach bekannten Sätzen in je ein Kurvenintegral umformen. Da auf dem Rande

$$\delta x = \delta y = 0$$

ist, fallen diese beiden Glieder fort. Es bleibt dann

$$\int\int \Re \{(r_v y_u - r_u y_v)\,\delta x + (r_u x_v - r_v x_u)\,\delta y\}\,du\,dv = 0.$$

Wegen der Willkür von δx und δy muß

$$r_v y_u - r_u y_v = r_u x_v - r_v x_u = 0$$

sein. Daraus folgt wegen (2), daß $r_u = r_v = 0$, also r konstant sein muß. Es war

$$r = \sqrt{\frac{\bar{f}}{f}} = e^{-i \arg (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v)}.$$

Wir nennen die Extremalen unserer Aufgabe „Minimalflächen" und haben das Ergebnis:

Die Minimalflächen sind durch $\arg (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = \text{const}$ *gekennzeichnet.*

Sie stimmen nach (9) mit den Flächen der Klasse V überein.

§ 2.

Bestimmung einer Minimalfläche durch eine geschlossene Randkurve.

Man kann jede Fläche — eventuell nach einer affinen Transformation — auf solche Parameter beziehen, daß

$$x = u + i\,v,$$
$$y = \varphi(u, v) + i\,\psi(u, v)$$

ist, und man kann für Minimalflächen annehmen, daß $\arg (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v) = 0$ ist. Dann ist

$$\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = \varphi_v + \psi_u + i(\psi_v - \varphi_u),$$

also

$$\psi_v = \varphi_u.$$

Daher gibt es eine Funktion $\Omega(u, v)$, so daß $\Omega_u = \psi$ und $\Omega_v = \varphi$, also $\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = \Omega_{uu} + \Omega_{vv} = \Delta\,\Omega > 0$ ist.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir jetzt an die Bestimmung einer Minimalfläche durch eine vorgegebene geschlossene Randkurve gehen. Die der Randkurve entsprechende Kurve in der u, v-Ebene sei doppelpunktfrei und gegeben durch $u(s)$ und $v(s)$, wo s die Bogenlänge bezeichnen möge. Es seien ferner Ω_u und Ω_v auf dem Rande gegeben:

$$\Omega_u|^{\text{Rand}} = \psi(s), \quad \Omega_v|^{\text{Rand}} = \varphi(s).$$

Daraus gewinnt man

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_a}\Big|^{\text{Rand}} = f(s),$$

wo n_a die Richtung der äußeren Normale bedeute, und bis auf eine Konstante

$$\Omega\,|^{\text{Rand}} = g(s).$$

Es ist dann die Funktion $\Omega(u, v)$ so zu bestimmen, daß die Randbedingungen erfüllt sind und daß im Innern $\Delta\,\Omega > 0$ ist.

$\mathsf{X}(u, v)$ sei die Lösung der ersten Randwertaufgabe mit $\mathsf{X}\,|^{\text{Rand}} = g(s)$. Setzt man $\Omega = \Phi + \mathsf{X}$, so bleibt $\Phi(u, v)$ zu bestimmen, so daß

$$\Phi\,|^{\text{Rand}} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_a} = f(s) - \frac{\partial \mathsf{X}}{\partial n_a} = \omega(s)$$

und $\Delta\,\Phi > 0$ im Innern ist.

Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie wird für

$$\Phi = \int\int G(u, v;\, x, y)\, \delta(x, y)\, d\,x\, d\,y,$$

wo mit G die Greensche Funktion für das von der Randkurve umschlossene Gebiet bezeichnet ist,

$$\Phi\,|^{\text{Rand}} = 0, \quad \Delta\,\Phi = -\,\delta.$$

Man erkennt hier eine notwendige Bedingung für die Funktion $\omega(s)$. Es ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_a} = \int\!\!\int \frac{\partial G}{\partial n_a}\,\delta(x, y)\, d\,x\, d\,y = \omega(s).$$

Soll $\Delta\,\Phi > 0$, also $\delta < 0$ sein, so muß $\omega(s) > 0$ sein, da stets $\frac{\partial G}{\partial n_a} < 0$ ist.

Bilden wir jetzt vermöge einer analytischen Funktion $h(u + i\,v) = \overset{*}{u}(u, v) + i\,\overset{*}{v}(u, v)$ das Innere der Kurve konform auf den Einheitskreis ab, so wird

$$\Omega_{uu} + \Omega_{vv} = (\overset{*}{u}{}_u^2 + \overset{*}{u}{}_v^2)\,(\Omega^{**}_{uu} + \Omega^{**}_{vv}),$$

falls die Abbildungsfunktionen auch auf dem Rande zweimal stetig differenzierbar sind. Dazu genügt es, daß die Ableitungen $\frac{d^2 u}{d s^2}, \frac{d^2 v}{d s^2}$ existieren, stetig sind und einer H-Bedingung genügen[8]). Diese Bedingungen sind z. B.

[8]) Siehe L. Lichtenstein, Potentialtheorie und konforme Abbildung, Enzykl. II, C 3, S. 254.

erfüllt, wenn wir voraussetzen, daß die Funktionen $u(s)$ und $v(s)$ dreimal stetig differenzierbar sind. Da stets $\overset{*}{u}_u^2 + \overset{*}{u}_v^2 > 0$ ist, muß nun $\Omega(\overset{*}{u}, \overset{*}{v})$ so bestimmt werden, daß unter den entsprechenden Randbedingungen wie vorher im Innern des Einheitskreises $\Omega_{u\,u}^{*\,*} + \Omega_{v\,v}^{*\,*} > 0$ ist. Wir schreiben statt $\overset{*}{u}, \overset{*}{v}$ wieder u, v und setzen

$$u + i\,v = \varrho\, e^{i\,\psi}, \quad x + i\,y = r\, e^{i\,\varphi}.$$

Dann hat die Greensche Funktion für den Einheitskreis folgende Form:

$$G = -\frac{1}{4\,\pi} \lg \frac{r^2 + \varrho^2 - 2\,r\,\varrho\cos(\varphi - \psi)}{r^2\,\varrho^2 + 1 - 2\,r\,\varrho\cos(\varphi - \psi)}.$$

Daraus erhält man

$$\Phi = -\frac{1}{4\,\pi} \int_{\varphi=0}^{2\,\pi} \int_{r=0}^{1} \lg \frac{r^2 + \varrho^2 - 2\,r\,\varrho\cos(\varphi - \psi)}{r^2\,\varrho^2 + 1 - 2\,r\,\varrho\cos(\varphi - \psi)}\, \delta(r, \varphi)\, r\, d\,r\, d\,\varphi$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_a} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}\bigg|^{\varrho=1} = -\frac{1}{2\,\pi} \int\int \frac{1 - r^2}{r^2 + 1 - 2\,r\cos(\varphi - \psi)}\, \delta(r, \varphi)\, r\, d\,r\, d\,\varphi.$$

Wir haben jetzt $\delta(r, \varphi)$ so zu bestimmen, daß für die vorgegebene Funktion $\omega(\psi)$ die letzte Gleichung erfüllt ist. Dazu formen wir den Integranden in geeigneter Weise um. Es ist

$$\frac{1}{1 + r^2 - 2\,r\cos(\varphi - \psi)} = \frac{1}{1 - r\,e^{i\,(\varphi - \psi)}} \cdot \frac{1}{1 - r\,e^{-i\,(\varphi - \psi)}}.$$

Da $|r\,e^{i\,(\varphi - \psi)}| = r < 1$ ist, wird daraus unter Benutzung der Formel für die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 + r^2 - 2\,r\cos(\varphi - \psi)} = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} r^{\mu+\nu}\, e^{i\,(\mu - \nu)\,(\varphi - \psi)},$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|\lambda|}}{1 - r^2}\, e^{i\,\lambda\,(\varphi - \psi)}.$$

Es muß daher sein

$$\omega(\psi) = -\frac{1}{2\,\pi} \int\int \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} r^{|\lambda|+1}\, e^{i\,\lambda\,(\varphi - \psi)}\, \delta(r, \varphi)\, d\,r\, d\,\varphi.$$

Setzen wir jetzt für die bezüglich φ periodische Funktion $\delta(r, \varphi)$ ihre Fouriersche Reihe

$$\delta = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \delta_\lambda(r)\, e^{i\,\lambda\,\varphi},$$

wo $\delta_{-\lambda} = \bar{\delta}_\lambda$ und δ_0 reell ist, so wird

$$\omega(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int\int \sum_{\lambda,\nu=-\infty}^{\infty} r^{|\lambda|+1}\,\delta_\nu(r)\,e^{i[\varphi(\lambda+\nu)-\lambda\psi]}\,dr\,d\varphi,$$

$$= -\int_0^1 \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} r^{|\lambda|+1}\,\delta_\lambda(r)\,e^{i\lambda\psi}\,dr.$$

Wir setzen jetzt auch für die periodische Funktion $\omega(\psi)$ ihre Fouriersche Reihe an.

$$\omega(\psi) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \omega_\lambda e^{i\lambda\psi},$$

wo $\omega_{-\lambda} = \bar{\omega}_\lambda$ und ω_0 reell ist. Dann muß also zwischen den Fourierkoeffizienten von δ und ω folgender Zusammenhang bestehen:

$$\omega_\lambda = -\int_0^1 r^{|\lambda|+1}\,\delta_\lambda(r)\,dr.$$

Im folgenden werden wir eine Funktion $\delta(r, \varphi)$ so bestimmen, daß sie mit der gegebenen Funktion ω die letzte Beziehung erfüllt. Wir machen dazu den Ansatz

$$-\delta(r, \varphi) = C + r^n F(\varphi),$$

wo C eine positive Konstante, n eine positive ganze Zahl und $F(\varphi)$ periodisch sein soll. Die Fouriersche Reihe von F sei

$$F(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_\lambda e^{i\lambda\varphi},$$

wo $F_{-\lambda} = \bar{F}_\lambda$ und F_0 reell ist. Dann muß also

$$\delta_0 = -C - r^n F_0,$$
$$\delta_\lambda = -r^n F_\lambda \quad (\lambda \neq 0)$$

sein und daher

$$\omega_0 = \int_0^1 r(C + r^n F_0)\,dr = \frac{C}{2} + \frac{F_0}{n+2},$$

$$\omega_\lambda = F_\lambda \int_0^1 r^{|\lambda|+n+1}\,dr = \frac{F_\lambda}{|\lambda|+n+2} \quad (\lambda \neq 0),$$

also

$$F_0 = (n+2)\left(\omega_0 - \frac{C}{2}\right),$$
$$F_\lambda = (|\lambda| + n + 2)\,\omega_\lambda \quad (\lambda \neq 0).$$

Daraus ergibt sich für F die Darstellung

$$F(\varphi) = (n+2)\left(\omega(\varphi) - \frac{C}{2}\right) + \sum_{-\infty}^{\infty}{}' |\lambda| \omega_\lambda e^{i\lambda\varphi}.$$

Bezeichnen wir mit $\tilde{\omega}$ die zur Fourierschen Reihe von ω konjugierte Reihe[9]), so ist

$$\tilde{\omega} = -2 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \Im(\omega_\lambda e^{i\lambda\varphi})$$

und

$$(\tilde{\omega})' = (\widetilde{\omega'}) = \tilde{\omega}' = -\sum_{-\infty}^{\infty}{}' |\lambda| \omega_\lambda e^{i\lambda\varphi}.$$

Wir erhalten also

$$\delta(r, \varphi) = -C - r^n\left[(n+2)\left(\omega(\varphi) - \frac{C}{2}\right) - \tilde{\omega}'(\varphi)\right].$$

Es muß nun stets $\delta < 0$ sein. Dazu machen wir die — nach früheren Bemerkungen notwendige — Voraussetzung, daß $\omega(\varphi) > 0$ ist. Weiter wollen wir annehmen, daß $\tilde{\omega}'$ gleichmäßig konvergiert[10]), daß also $\tilde{\omega}' < M$. Dann erkennt man die Existenz einer Minimalfläche folgendermaßen:

Wir wählen:

1. C so, daß $2 \operatorname{Min} \omega > C > 0$,
2. n so, daß $n + 2 > \dfrac{M}{\operatorname{Min} \omega - \dfrac{C}{2}}$.

Dann folgt aus 1., daß $\omega - \frac{C}{2} > 0$, und daher aus 2., daß

$$(n+2)\left(\omega - \frac{C}{2}\right) - \tilde{\omega}' > 0$$

und somit, daß $\delta < 0$ ist.

Es gibt daher unter den genannten Bedingungen durch jede Umrandungskurve unendlich viele Minimalflächen, die alle den gleichen Flächeninhalt O haben.

$$O = \int\int |\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v| \, du\, dv = \int\int \Delta\, \Omega\, du\, dv$$

$$= \int\int \Delta\, \Phi\, du\, dv = \oint \frac{\partial \Phi}{\partial n_a} ds = \oint \omega(s)\, ds.$$

---

[9]) Man vgl. z. B. W. Rogosinski, Fouriersche Reihen. Sammlung Göschen 1022, Kap. IV, § 6.

[10]) Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\tilde{\omega}'$ ist z. B. gesichert, wenn ω zweimal stetig differenzierbar ist. Dazu fordern wir, daß anfangs $\varphi(s)$, $\psi(s)$ zweimal und $u(s)$, $v(s)$ dreimal stetig differenzierbar sind.

§ 3.

Schiebflächen mit integrabler Parallelverschiebung.

Hängt der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ in der Form

$$\mathfrak{x}(u,v) = \mathfrak{u}(u) + \mathfrak{v}(v) \tag{56}$$

von u und v ab, so ist die dargestellte Fläche eine Schiebfläche. Es soll jetzt untersucht werden, auf welchen Schiebflächen die Parallelverschiebung integrabel ist.

Nach (56) ist $\mathfrak{x}_{uv} = 0$, also auch $\Gamma^{\lambda}_{12} = 0$, und die Bedingungen für integrable Parallelverschiebung (7) vereinfachen sich zu

$$\mathfrak{I}^2_{11}\mathfrak{I}^1_{22} = \mathfrak{I}^1_{22}\mathfrak{I}^1_{11} = \mathfrak{I}^2_{11}\mathfrak{I}^2 = 0. \tag{57}$$

Daher nehmen die zweiten der Integrabilitätsbedingungen (5) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^1_{11,2} = \mathfrak{I}^2_{22,1} &= -\mathfrak{R}^1_{22}\mathfrak{I}^2_{11} - \mathfrak{R}^2_{11}\mathfrak{I}^1_{22}, \\ \mathfrak{I}^1_{22,1} &= -\mathfrak{R}^1_{22}\mathfrak{I}^1_{11} - \mathfrak{R}^1_{11}\mathfrak{I}^1_{22}, \\ \mathfrak{I}^2_{11,2} &= -\mathfrak{R}^2_{11}\mathfrak{I}^2_{22} - \mathfrak{R}^2_{22}\mathfrak{I}^2_{11}. \end{aligned} \tag{58}$$

Um die weiteren Untersuchungen abzukürzen, schicken wir folgende Bemerkungen voraus:

1. Ist $\Gamma^2_{11} = 0$, so ist $\mathfrak{u}'\mathfrak{u}'' = 0$ oder $\mathfrak{u}'' = \lambda\,\mathfrak{u}'$ mit komplexen λ, also $\mathfrak{u}' = \mathfrak{k}e^{\int \lambda\, du}$, wo $\mathfrak{k}$ ein konstanter Vektor ist, d. h. die u-Kurve liegt in einer analytischen Ebene. Liegt umgekehrt die u-Kurve in einer analytischen Ebene, so ist $\mathfrak{u}'\mathfrak{u}'' = 0$ und daher auch $\Gamma^2_{11} = 0$.

2. Ist $\mathfrak{I}^1_{22} \neq 0$, so folgt aus (57) $\mathfrak{I}^2_{11} = \mathfrak{I}^1_{11} = 0$ und daher aus (58) $\mathfrak{R}^2_{11} = 0$.

Aus $\mathfrak{I}^2_{11} \neq 0$ folgt entsprechend $\Gamma^1_{22} = \mathfrak{I}^2_{22} = 0$.

3. Ist $\Gamma^2_{11} = 0$ und $\mathfrak{I}^1_{11} = 0$, so ist $\mathfrak{u}'' = \mathfrak{R}^1_{11}\mathfrak{u}'$ und daher $\mathfrak{u}' = \mathfrak{k}e^{\int \mathfrak{R}^1_{11}\, du}$, wo $\mathfrak{k}$ ein konstanter Vektor ist, d. h. die u-Kurve ist eine Gerade.

4. Die (nicht-analytischen) Ebenen sind durch identisches Verschwinden der Tensorkomponenten $\mathfrak{I}^{\lambda}_{ik}$ gekennzeichnet.

Sind nämlich für ein bestimmtes Parametersystem u, v sämtliche $\mathfrak{I}^{\lambda}_{ik}$ Null, so verschwinden sie als Tensorkomponenten auch für irgendwelche anderen Parameter. Ferner ist auf einer solchen Fläche nach (7) die Parallelverschiebung integrabel, und wir können daher solche Parameter $\overset{*}{u}, \overset{*}{v}$ einführen, für die alle $\overset{*}{\mathfrak{R}}{}^{\lambda}_{ik}$ verschwinden. Es ist dann $\mathfrak{x}^{**}_{uu} = \mathfrak{x}^{**}_{uv} = \mathfrak{x}^{**}_{vv} = 0$, also sind $\mathfrak{x}^{*}_{u}$ und $\mathfrak{x}^{*}_{v}$ konstante Vektoren, d. h. die Fläche ist eine Ebene.

Andererseits kann jede nicht-analytische Ebene in der Form

$$\mathfrak{x} = u\,\mathfrak{a} + v\,\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$$

mit

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \neq 0$$

dargestellt werden. Dann gilt $\mathfrak{x}_{ik} = 0$, also auch $\mathfrak{I}^{\lambda}_{ik} = 0$.

Wir unterscheiden jetzt folgende vier Fälle:

I.	$\Gamma^1_{22} \neq 0,$	$\Gamma^2_{11} \neq 0$
II.	$\Gamma^1_{22} \neq 0,$	$\Gamma^2_{11} = 0.$
III.	$\Gamma^1_{22} = 0,$	$\Gamma^2_{11} \neq 0.$
IV.	$\Gamma^1_{22} = 0,$	$\Gamma^2_{11} = 0.$

I. Im ersten Fall liegt nach 1 weder die u- noch die v-Kurve in einer analytischen Ebene. Aus $\Gamma^2_{11} \neq 0$ folgt $\mathfrak{I}^1_{22} = 0$ nach 2 und aus $\Gamma^1_{22} \neq 0$ entsprechend $\mathfrak{I}^2_{11} = 0$. Es muß also $\mathfrak{R}^1_{22} \neq 0$ und $\mathfrak{R}^2_{11} \neq 0$ sein. Aus den beiden letzten Gleichungen von (58) folgt daher, daß auch $\mathfrak{I}^1_{11} = \mathfrak{I}^2_{22} = 0$ ist. Im ersten Fall müssen daher sämtliche $\mathfrak{I}^{\lambda}_{ik}$ verschwinden, d. h. nach 4, die Fläche ist eine Ebene. Andererseits ist jede Ebene als Schiebfläche darstellbar und auf ihr, da alle $\mathfrak{I}^{\lambda}_{ik}$ Null sind, nach (7) die Parallelverschiebung integrabel.

II. Im zweiten Fall liegt die u-Kurve in einer analytischen Ebene und die v-Kurve nicht. Ist $\mathfrak{I}^1_{22} = 0$, so muß $\mathfrak{R}^1_{22} \neq 0$ und daher nach (58) $\mathfrak{I}^1_{11} = 0$ sein. Ist aber $\mathfrak{I}^1_{22} \neq 0$, so ist $\mathfrak{I}^1_{11} = 0$ nach der Bemerkung 2. In diesem Fall folgt also aus der Bemerkung 3, daß die u-Kurve eine Gerade und daher die Fläche ein Zylinder ist. Andererseits kann man jede Zylinderfläche in der Weise als Schiebfläche darstellen. daß $\mathfrak{u}'' = 0$ und daher $\mathfrak{I}^1_{11} = \mathfrak{I}^2_{11} = 0$, also nach (57) die Parallelverschiebung integrabel ist.

III. Der dritte Fall läßt sich durch Vertauschung der Parameter auf den vorigen zurückführen.

IV. Im vierten Fall liegen die u- und die v-Kurve in analytischen Ebenen. Nach (57) ist in diesem Fall die Parallelverschiebung stets integrabel. Wir können daher unser Ergebnis folgendermaßen formulieren:

Außer auf Zylinderflächen (und Ebenen) ist die Parallelverschiebung nur auf solchen Schiebflächen integrabel, deren erzeugende Kurven je in einer analytischen Ebene liegen.

§ 4.

Flächen mit integrabler Parallelverschiebung, die gleichzeitig Schieb- und Minimalflächen sind.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Flächen mit integrabler Parallelverschiebung gleichzeitig Schieb- und Minimalflächen sind. Beziehen wir

sie auf Schiebparameter, so muß $\Gamma^{\lambda}_{12} = 0$ sein. Da sie außerdem Minimalflächen sind, muß auch noch $\mathfrak{I}^1_{11} = \mathfrak{I}^2_{22} = 0$ sein. Für integrable Parallelverschiebung bleibt daher von den Bedingungen (57) nur $\mathfrak{I}^1_{22}\,\mathfrak{I}^2_{11} = 0$ zu erfüllen.

Ist $\mathfrak{I}^1_{22} = 0$ und $\mathfrak{I}^2_{11} = 0$, so sind sämtliche $\mathfrak{I}^{\lambda}_{ik}$ Null, und die Fläche ist eine Ebene. Andererseits sind sämtliche Ebenen Flächen der besprochenen Art.

Ist aber z. B. $\mathfrak{I}^2_{11} = 0$ und $\mathfrak{I}^1_{22} \neq 0$, so folgt aus den Integrabilitätsbedingungen (58), daß $\mathfrak{K}^2_{11} = 0$, und daher nach der Bemerkung 3, daß die u-Kurve eine Gerade, die Fläche also ein Zylinder ist. Dasselbe folgt aus dem umgekehrten Fall, wenn $\mathfrak{I}^1_{22} = 0$ und $\mathfrak{I}^2_{11} \neq 0$ ist.

Wir haben daher nur noch festzustellen, welche Zylinderflächen Minimalflächen sind.

Für eine solche Fläche können wir $\mathfrak{u}' = (1, 0)$ und

$$\mathfrak{v}'' = \Gamma^1_{22}\,(1, 0) + \mathfrak{K}^2_{22}\,\mathfrak{v}'$$

annehmen. Setzen wir $\mathfrak{v}' = (\xi, \eta)$, so sind die Differentialgleichungen

$$\xi' = \Gamma^1_{22} + \mathfrak{K}^2_{22}\,\xi,$$
$$\eta' = \qquad \mathfrak{K}^2_{22}\,\eta$$

zu lösen. Man erhält

$$\mathfrak{v}' = (\alpha, \beta)\, e^{\int \mathfrak{K}^2_{22}\, dv} + (1, 0)\, e^{\int \mathfrak{K}^2_{22}\, dv} \int e^{-\int \mathfrak{K}^2_{22}\, dv}\, \Gamma^1_{22}\, dv,$$

wo α und β beliebige komplexe Konstante sind, nur darf β wegen $\mathfrak{u}'\,\mathfrak{v}' \neq 0$ nicht Null sein. Der Vektor $\mathfrak{v}'$ setzt sich aus den drei Vektoren (α, β), $(1, 0)$ und $(i, 0)$ reell linear zusammen. Daher liegt die Zylinderfläche in einem solchen dreidimensionalen Raum, in dem auch die zu der Richtung der Erzeugenden gehörige analytische Ebene liegt. Ein solcher Zylinder läßt sich umgekehrt in der Form

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{v}' = \varphi(v)\,\mathfrak{a} + f(v)\,\mathfrak{b}$$

darstellen, wo φ komplex und f reell ist. Für ihn ist stets $\arg(\mathfrak{u}'\,\mathfrak{v}')$ konstant. Wir haben so das Ergebnis:

Die Zylinderflächen, die in einer vom Vektor $\mathfrak{a}$ *in Richtung der Erzeugenden, von* $i\,\mathfrak{a}$ *und von einem dritten Vektor aufgespannten Hyperebene*[11]) *liegen, sind die einzigen Flächen mit integrabler Parallelverschiebung, die gleichzeitig Schieb- und Minimalflächen sind.*

---

[11]) Die Begriffe „Hyperebene" und „dreidimensionaler Raum" werden hier völlig synonym gebraucht.

§ 5.

Schiebflächen, die Minimalflächen sind.

Im Anschluß an die letzten Untersuchungen wollen wir jetzt die Forderung der integrablen Parallelverschiebung fallen lassen. Wir fragen also nach den Flächen, die gleichzeitig Schieb- und Minimalflächen sind. Zu ihnen gehören jedenfalls diejenigen Zylinderflächen, die mit der analytischen Ebene, die zu der Richtung der Erzeugenden gehört, in der gleichen Hyperebene liegen. Es bleibt also zu untersuchen, ob es außer diesen noch andere Schiebflächen gibt, die gleichzeitig Minimalflächen sind.

Beziehen wir die Flächen auf Schiebparameter, so muß $\arg(\mathfrak{u}'\mathfrak{v}')$ konstant sein. Da längs einer v-Kurve $\mathfrak{u}'$ konstant ist, so liegt die v-Kurve mit $\mathfrak{u}'$ in einer Ebene oder in einem Zylinder, der Minimalfläche ist. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen muß also die v-Kurve in einer Hyperebene liegen. Dasselbe gilt für die u-Kurve.

Es bleiben daher z. B. für die u-Kurve folgende Fälle, die Neues liefern können:

1. Die u-Kurve liegt in einer analytischen Ebene.

2. Die u-Kurve liegt in einer nicht-analytischen Ebene.

3. Die u-Kurve liegt in einem dreidimensionalen Raum, aber nicht in einer Ebene.

1. Liegt die u-Kurve in einer analytischen Ebene, so ist $\mathfrak{u}' = \lambda(u)\,\mathfrak{a}$ mit komplexem λ. Wir können annehmen, daß der Vektor $\mathfrak{a}$ so gewählt ist, daß für einen bestimmten Wert $u = u_1$ gerade $\mathfrak{u}_1' = \mathfrak{a}$ ist. Dann muß also sein

$$\arg(\mathfrak{u}'\mathfrak{v}') = \arg(\mathfrak{a}\mathfrak{v}') = \arg\{\lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{v}')\} = \text{const}$$

und daher $\arg\lambda = 0$, also $\lambda > 0$. Dann wäre die u-Kurve eine Gerade, und wir hätten nichts Neues.

2. Liegt die u-Kurve in einer nicht-analytischen Ebene, so ist

$$\mathfrak{u}' = f(u)\,\mathfrak{a} + g(u)\,\mathfrak{b},$$

wo f und g reell und, da sonst der vorige Fall vorliegt, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \neq 0$ ist. Wir können wieder annehmen, daß für bestimmte Parameterwerte u_1, u_2 gerade $\mathfrak{u}_1' = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{u}_2' = \mathfrak{b}$ ist. Dann muß sein

$$\arg(\mathfrak{u}'\mathfrak{v}') = \arg(\mathfrak{a}\mathfrak{v}') = \arg(\mathfrak{b}\mathfrak{v}') = \text{const.}$$

Die v-Kurve bildet daher mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ je einen Zylinder, der Minimalfläche ist. Sie liegt also mit $\mathfrak{a}$ und $i\mathfrak{a}$ bzw. mit $\mathfrak{b}$ und $i\mathfrak{b}$ in je einer Hyperebene. Diese beiden sind wegen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \neq 0$ verschieden. Die v-Kurve muß

also in der Schnittebene dieser beiden Hyperebenen liegen. Daher können wir

$$\mathfrak{v}' = m(v)\,\mathfrak{c} + n(v)\,\mathfrak{d}$$

setzen, wo wieder $\mathfrak{v}_1' = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{v}_2' = \mathfrak{d}$ und m, n reell seien. Die obige Bedingung heißt dann

$$\arg(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) = \arg(\mathfrak{a}\,\mathfrak{d}) = \arg(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) = \arg(\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}).$$

Wegen $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \neq 0$ lassen sich die Vektoren $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit komplexen Koeffizienten linear kombinieren:

$$\mathfrak{c} = \alpha\,\mathfrak{a} + \beta\,\mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{d} = \gamma\,\mathfrak{a} + \delta\,\mathfrak{b}.$$

Dann muß jetzt

$$\arg\{\beta(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\} = \arg\{\delta(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\} = \arg\{-\alpha(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\} = \arg\{-\gamma(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\} = \text{const},$$

und daher

$$\arg\beta = \arg\delta = \arg(-\alpha) = \arg(-\gamma) = c$$

sein. Wir können also

$$\alpha = r_1 e^{ic}, \quad \beta = r_2 e^{ic}, \quad \gamma = r_3 e^{ic}, \quad \delta = r_4 e^{ic}$$

setzen, wo r_1, r_2, r_3, r_4 und c reelle Konstante sind. Dann wird

$$\mathfrak{v}' = e^{ic}\{(r_1 m + r_3 n)\,\mathfrak{a} + (r_2 m + r_4 n)\,\mathfrak{b}\},$$

d. h. die beiden Ebenen, in denen die u- bzw. v-Kurve liegen, gehen dadurch auseinander hervor, daß man sämtliche Vektoren der einen Ebene mit einer komplexen Konstanten multipliziert.

Liegen andererseits die u- und v-Kurve in zwei Ebenen dieser Art, so erhält man eine Schiebfläche, die Minimalfläche ist, wie aus den obigen Formeln folgt.

3. Liegt schließlich die u-Kurve in einer Hyperebene, ohne daß sie eben ist, so liefert der Fall, daß dann die v-Kurve eine Gerade ist, nichts Neues. Nach den Untersuchungen des vorigen Falles kann auch die v-Kurve nicht in einer Ebene liegen. Es soll nun gezeigt werden, daß auch die letzte Möglichkeit, daß nämlich die u- und die v-Kurve je in einer Hyperebene liegen, ohne daß sie eben sind, nicht besteht.

Liegt nämlich die u-Kurve in einem dreidimensionalen Raum, so kann man setzen

$$\mathfrak{u}' = f(u)\,\mathfrak{a} + g(u)\,\mathfrak{b} + h(u)\,\mathfrak{c},$$

und es müßte wieder

$$\arg(\mathfrak{a}\,\mathfrak{v}') = \arg(\mathfrak{b}\,\mathfrak{v}') = \arg(\mathfrak{c}\,\mathfrak{v}') = \text{const}$$

sein. Da die v-Kurve nicht in einer Ebene liegt, muß sie mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ je einen Zylinder bilden, der Minimalfläche ist. Daher müssen die zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ gehörigen analytischen Ebenen in derselben Hyperebene liegen

wie die v-Kurve. Dann müssen aber $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$, also auch $\mathfrak{u}'$, in derselben analytischen Ebene liegen, was der Voraussetzung widerspricht. Damit ist dieser letzte Fall als unmöglich nachgewiesen.

Wir sehen mit Rücksicht auf das Ergebnis des vorigen Paragraphen:

Schiebflächen mit nicht-integrabler Parallelverschiebung sind dann und nur dann Minimalflächen, wenn ihre erzeugenden Kurven in nicht-analytischen Ebenen liegen, die dadurch auseinander hervorgehen, daß man sämtliche Vektoren der einen Ebene mit einer komplexen Konstanten multipliziert.

§ 6.

Die Klassifikation der Flächen mit integrabler Parallelverschiebung und der Geradlinienflächen.

Es sollen jetzt notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt werden, unter denen für die Flächen einer bestimmten Flächenklasse die Parallelverschiebung integrabel ist. Die Bedingungen für integrable Parallelverschiebung (7) lassen sich auf die Form bringen:

$$G_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta i} p^i + p_\alpha p_\beta = 0. \tag{59}$$

Falls die betrachtete Fläche zur Klasse I gehört, wird nach dem zweiten Formelsystem Kap. I, § 5:

$$G_{\alpha\beta}\zeta^\alpha\zeta^\beta = \left(1 - \frac{B}{2A} - \frac{B^2}{2A^2}\right)p^2 + \frac{2C}{A^2}\,p\,\varphi + \left(\frac{B}{A^2} - \frac{1}{A}\right)\varphi^2.$$

Daraus erkennt man:

Dafür, daß auf einer Fläche der Klasse I die Parallelverschiebung integrabel ist, ist notwendig und hinreichend, daß $A = B$ und $C = 0$ ist.

Als Beispiel diene die Fläche

$$\mathfrak{x} = (f(u), g(v)), \qquad f, g \text{ komplex.}$$

Falls die Argumente von f' und g' veränderlich sind, ist das eine nichtzylindrische Schiebfläche, deren erzeugende Kurven je in einer analytischen Ebene liegen.

Es soll jetzt festgestellt werden, für welche Flächen der Klassen II, III und IV die Parallelverschiebung integrabel ist. Auf ihnen lassen sich Parameter einführen, so daß $p_1 \equiv 0$ und $p_2 \equiv 1$, also $P_{111} \equiv 0$ ist. Dann folgt aus (59), daß $G_{11} \equiv 0$, und daher aus (12), daß $P_{112} \equiv 0$ ist. Eine solche Fläche kann also nicht zur Klasse II gehören, da dann für das betrachtete Parametersystem $P_{112} \neq 0$ sein müßte. Die Bedingung $G_{12} \equiv 0$ ist von den Klassen III und IV erfüllt. Aus $G_{22} \equiv 0$ folgt

$$-2P_{122}^2 - P_{122} + 1 = 0.$$

Es muß also für die betrachteten Flächen $P_{122} = -1$ oder $P_{122} = \frac{1}{2}$, d. h. $H = -3$ oder $H = \frac{3}{2}$ sein. Wir haben daher als Ergebnis:

Unter den Flächen der Klassen II und IV gibt es jedenfalls keine mit integrabler Parallelverschiebung.

Auf den Flächen der Klasse III ist die Parallelverschiebung dann und nur dann integrabel, wenn $H = -3$ oder $H = \frac{3}{2}$ ist.

Wir fassen im folgenden die Ebenen, Zylinder, Kegel und Tangentenflächen von Kurven unter dem Namen „Torsen" zusammen. Ihre Flächenstreifen längs der geradlinigen Erzeugenden sind also eben. Andernfalls sollen Geradlinienflächen „windschief" heißen. Torsen lassen sich auf solche Parameter beziehen, daß

$$\mathfrak{x}_{uu} = 0, \quad \mathfrak{x}_{uv} = \mathfrak{R}^{\lambda}_{12}\,\mathfrak{x}_{\lambda}.$$

Daraus folgt nach (7):

Auf Torsen ist die Parallelverschiebung integrabel.

Wir beweisen weiter den Satz:

Die Torsen, die nicht Minimalflächen sind, sind durch $H = -3$ gekennzeichnet.

Aus der obigen Darstellung folgt nämlich, daß $\mathfrak{I}^{\lambda}_{11} = \mathfrak{I}^{\lambda}_{12} = 0$, also $p_1 = 0$ ist. Es muß also, da die Fläche keine Minimalfläche sein soll, $p_2 = \frac{\mathfrak{I}^{3}_{22}}{3} \neq 0$ sein. Nach (10) erhält man

$$P = -\mathfrak{I}^{2}_{22}\zeta^1\zeta^2\zeta^2 + \mathfrak{I}^{1}_{22}\zeta^2\zeta^2\zeta^2, \quad p = \frac{\mathfrak{I}^{3}_{22}}{3}\zeta^2,$$

also $\chi_1 = -\frac{9}{\mathfrak{I}^{3}_{22}}$ und daher $H = -3$.

Ist andererseits $H = -3$, so kann man Parameter mit $p_1 = \frac{1}{3}\mathfrak{I}^{\lambda}_{\lambda 1} \equiv 0$ und $p_2 = \frac{1}{3}\mathfrak{I}^{\lambda}_{\lambda 2} \equiv 1$ einführen. Dann ist

$$P_{111} = -\mathfrak{I}^{2}_{11} = 0,$$
$$3P_{112} = \mathfrak{I}^{1}_{11} - 2\mathfrak{I}^{2}_{12} = 0,$$
$$3P_{122} = -\mathfrak{I}^{3}_{22} + 2\mathfrak{I}^{1}_{12} = H = -3.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{I}^{\lambda}_{11} = \mathfrak{I}^{\lambda}_{12} = 0, \quad \mathfrak{I}^{2}_{22} = 3.$$

Nach der zweiten der Integrabilitätsbedingungen (5) muß daher $\mathfrak{R}^{2}_{11} = 0$ sein. Es gilt also

$$\mathfrak{x}_{uu} = \mathfrak{R}^{1}_{11}\,\mathfrak{x}_u, \quad \mathfrak{x}_{uv} = \mathfrak{R}^{\lambda}_{12}\,\mathfrak{x}_{\lambda},$$

d. h. die u-Kurve ist eine Gerade, längs derer der Flächenstreifen eben ist. Die Fläche ist also eine Torse.

Zur weiteren Kenntnis der Klasse III führen ferner die beiden Sätze:

Alle windschiefen Flächen mit integrabler Parallelverschiebung gehören zur Klasse III; für sie ist $H = \frac{3}{2}$.

Die Flächen der Klasse III, auf denen die Parallelverschiebung nicht integrabel ist, sind windschief.

Zum Beweis des ersten Satzes können wir wieder $\mathfrak{x}_{uu} = 0$ wählen. Dann ist $\mathfrak{I}^1_{11} = 0$, und die Bedingungen (7) lauten:

$$\mathfrak{I}^1_{12}\mathfrak{I}^2_{12} = 0, \quad (\mathfrak{I}^2_{12})^2 = 0,$$
$$(\mathfrak{I}^1_{12})^2 + \mathfrak{I}^1_{22}\mathfrak{I}^2_{12} - \mathfrak{I}^1_{12}\mathfrak{I}^2_{22} = 0.$$

Es muß also $\mathfrak{I}^2_{12} = 0$ und, da die Fläche windschief sein soll, $\mathfrak{I}^1_{12} \neq 0$ sein. Daher ist ferner $\mathfrak{I}^1_{12} = \mathfrak{I}^2_{22} \neq 0$. So erhält man

$$P = \mathfrak{I}^1_{12}\xi^1\xi^2\xi^2 + \mathfrak{I}^1_{22}\zeta^2\zeta^2\zeta^2, \quad p = \tfrac{2}{3}\mathfrak{I}^1_{12}\zeta^2,$$

woraus die Behauptung $H = \frac{3}{2}$ folgt.

Eine solche windschiefe Fläche ist z. B. gegeben durch

$$\mathfrak{x} = e^{\frac{iv}{2}}(u, 2i).$$

Um den zweiten Satz zu beweisen, wählen wir wieder solche Parameter, daß $p_1 \equiv 0$ und $p_2 \equiv 1$, also $P_{111} = P_{112} = 0$ und $3P_{122} = H$ ist. Daraus folgt

$$\mathfrak{I}^1_{11} = \mathfrak{I}^2_{12} = 0, \quad \mathfrak{I}^1_{12} = \frac{H}{3} + 1, \quad \mathfrak{I}^2_{22} = 2 - \frac{H}{3}.$$

Da die Parallelverschiebung nicht integrabel sein soll, ist $H \neq -3$ und $H \neq \frac{3}{2}$. Dann folgt, daß $\mathfrak{I}^1_{12} \neq 0$, und aus den Bedingungen (5), daß $\mathfrak{R}^2_{11} = 0$ ist. Es ist also $\mathfrak{x}_{uu} = \mathfrak{R}^1_{11}\mathfrak{x}_u$, d. h. die u-Kurven sind Gerade, und wegen $\mathfrak{I}^1_{12} \neq 0$ ist die Fläche windschief.

Ist $H = 0$, gehört also die Fläche der Klasse IV an, so folgt aus (5), daß $\mathfrak{R}^2_{11} = \mathfrak{R}^2_{12} = 0$ ist. Es ist dann also

$$\mathfrak{x}_{uu} = \mathfrak{R}^1_{11}\mathfrak{x}_u, \quad \mathfrak{x}_{uv} = (\mathfrak{R}^1_{12} + i)\mathfrak{x}_u.$$

Die u-Kurven sind also Gerade, die alle einer analytischen Ebene parallel sind. Wir sehen:

Die Flächen der Klasse IV sind windschief; ihre Erzeugenden sind einer analytischen Ebene parallel.

Zur Klasse IV gehört z. B. die Fläche

$$\mathfrak{x} = (ue^{2iv}, -ie^{iv}).$$

Für sie ist $P \equiv 0$.

Zum Schluß beweisen wir noch den Satz:

Alle Minimalflächen mit integrabler Parallelverschiebung sind notwendig Torsen.

Da für Minimalflächen $p \equiv 0$ ist, muß wegen der integrablen Parallelverschiebung nach (59) die quadratische Kovariante der Form P identisch verschwinden. Dann ist P Kubus einer Linearform. Ist diese Linearform identisch Null, so ist $P \equiv 0$, also wegen $p \equiv 0$ auch $\mathfrak{I}^{\lambda}_{ik} \equiv 0$. Die Fläche ist dann eine Ebene. Ist die Linearform nicht identisch Null, so kann man solche Parameter einführen, daß

$$P_{111} = P_{112} = P_{122} = 0, \quad P_{222} \neq 0.$$

Dann ist $\mathfrak{I}^{\lambda}_{11} = \mathfrak{I}^{\lambda}_{12} = 0$ und nach (5) auch $\mathfrak{R}^{2}_{11} = 0$. Wegen $\mathfrak{x}_{uu} = \mathfrak{R}^{1}_{11}\mathfrak{x}_{u}$ sind die u-Kurven Gerade, und wegen $\mathfrak{I}^{\lambda}_{12} = 0$ sind die Flächenstreifen längs dieser Geraden eben. Die Flächen sind also Torsen.

(Eingegangen am 31. Januar 1933.)

Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen.

Von

Reinhold Baer in Manchester.

Um die Fülle der Erweiterungen einer Gruppe $\mathfrak{N}$ durch eine Gruppe G[1]) überblicken zu können, ist es nötig, außer den Bestimmungsstücken $\mathfrak{N}$ und G der Erweiterungsaufgabe noch weitere Bestimmungsstücke heranzuziehen. Ein solches liefert uns die multiplikative Funktion

$$\chi(g) = \text{Automorphismenklasse},$$

die die g entsprechende Restklasse der nach $\mathfrak{N}$ zerlegten Erweiterung in $\mathfrak{N}$ induziert. Besteht das Zentrum $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{N}$ allein aus der Gruppeneins, so gibt es bei willkürlich vorgegebenen $\chi(g)$ stets genau einen Erweiterungstyp von $\mathfrak{N}$ durch G, der $\chi(g)$ realisiert; dabei rechnen zwei Erweiterungen von $\mathfrak{N}$ durch G zum gleichen Erweiterungstyp, wenn sie durch $\mathfrak{N}$ und G elementweise in Ruhe lassende Isomorphismen aufeinander beziehbar sind[2]) (§ 1). Besteht aber $\mathfrak{Z}$ nicht allein aus der Gruppeneins, so bilden die $\chi(g)$ realisierenden Erweiterungen eine kommutative Schar, wenn es überhaupt derartige Erweiterungen gibt. Es ist aber nicht mehr möglich, jedes beliebige $\chi(g)$ zu realisieren (§ 7); immerhin gilt dann die obige Aussage wenigstens „modulo $\mathfrak{Z}$", d. h. der Erweiterungstyp von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ durch G und die von seinen Elementen zu induzierenden Automorphismen von $\mathfrak{N}$ liegen eindeutig fest (§ 1).

Hierdurch ist unser Problem auf den Spezialfall zurückgeführt, für den die angegebenen Sätze nichts leisten: auf die Erweiterung kommutativer Gruppen.

Diese spezielle Aufgabe ist stets lösbar — eine Übersicht über die möglichen Lösungen verschaffen wir uns dadurch, daß wir uns G durch Erzeugende und Relationen gegeben denken und den Relationen geeignete, für den Erweiterungstyp charakteristische Elemente aus der erweiterten

[1]) Vgl. O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen I, Monatsh. f. Math. u. Phys. **34** (1926), S. 165—180, besonders Satz 1, S. 168.

[2]) Zwei Erweiterungen können also zum gleichen Typ gehören, ohne zum gleichen Erweiterungstyp zu gehören.

kommutativen Gruppe $\mathfrak{N}$ zuordnen[3]) (§ 2, § 5) — und die Erweiterungstypen bilden selbst eine kommutative Gruppe (§ 3), die mit der R. Brauer-E. Noetherschen Gruppe hyperkomplexer Systeme eng verwandt ist[4]). Die Gruppe der Erweiterungstypen besteht, falls G eine freie Gruppe ist, allein aus der Gruppeneins (d. h. das Problem ist eindeutig lösbar); ist G zyklisch, so kann man die Struktur der Erweiterungstypengruppe völlig übersehen (§ 4).

Nennen wir eine Funktion χ_g, die den Elementen g aus G eindeutig und homomorph Automorphismen von $\mathfrak{N}$ zuordnet, einen Charakter von G in $\mathfrak{N}$, so ist das Produkt zweier Charaktere im allgemeinen nicht wieder ein Charakter, ja es ist sogar nicht immer möglich, einen Charakter in eine Gruppe aus Charakteren einzubetten. Betrachtet man aber in der Typengruppe der Erweiterungen der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$ durch G, die einen vorgegebenen Charakter χ von G in $\mathfrak{A}$ realisieren, die Teilschar der Typen, bei denen die der Untergruppe N von G entsprechende Untergruppe eine vorgegebene Struktur $\mathfrak{N}$ hat — allerdings gibt es Strukturen $\mathfrak{N}$ von χ realisierenden Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ durch N, die in dieser Weise überhaupt nicht realisierbar sind — und wählen wir N so aus, daß in $\mathfrak{N}$ ein Charakter von G induziert wird, so bilden diese Charaktere wenigstens eine Schar (§ 7).

Schließlich wird als Anwendung der hier entwickelten Methoden noch das Problem behandelt, wann eine vorgegebene endliche kommutative Gruppe G Faktorgruppe nach dem Zentrum einer geeigneten Gruppe sein kann. Bestimmt man nämlich die Invarianten $n_1, \ldots, n_n$ von G so, daß n_{i+1} Teiler von n_i ist, so erweist sich $n \geqq 2$ und $n_1 = n_2$ als notwendig und hinreichend (§ 6).

§ 1.

Charakter und Kollektivcharakter.

Bekanntlich versteht man unter einer Erweiterung der Gruppe $\mathfrak{N}$ durch die Gruppe C eine Gruppe $\mathfrak{G}$, so daß $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ isomorph C ist. Jedes Element $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}$ induziert dann den durch $\gamma(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}\mathfrak{x}\mathfrak{g}^{-1}$ definierten Automorphismus γ von $\mathfrak{N}$. Werden die Automorphismen α und β von $\mathfrak{N}$ durch Elemente $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ induziert, die derselben Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ angehören, so ist $\alpha\beta^{-1}$[5]) ein innerer Auto-

[3]) Diese Methode umfaßt die übliche der Charakterisierung durch Faktorensysteme als Spezialfall. Vgl. Fußnote [10]) S. 389.

[4]) Vgl. z. B. R. Brauer: Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932), S. 241—252.

[5]) Im Gegensatz zur üblichen Schreibweise erklären wir nämlich das Produkt zweier Abbildungen α und β stets durch: $\alpha \cdot \beta(\mathfrak{x}) = \alpha[\beta(\mathfrak{x})]$.

morphismus von $\mathfrak{N}$, da ja $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ zu $\mathfrak{N}$ gehört, und $\alpha\beta^{-1}(\mathfrak{x}) = \alpha[\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{b}] = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{x}\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})\mathfrak{x}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})^{-1}$ ist. Da schließlich, falls $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{u}$ aus $\mathfrak{N}$ beliebig ist, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{u}\mathfrak{g}$ zur gleichen Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ gehören, induziert jede Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ genau eine volle Automorphismenklasse von $\mathfrak{N}$ [d. h. eine Restklasse der Gruppe aller (eigentlichen) Automorphismen von $\mathfrak{N}$ nach dem Normalteiler der inneren Automorphismen]. Damit ist aber jedem Element c aus C eine Automorphismenklasse $\mathsf{X}(c)$ von $\mathfrak{N}$ zugeordnet und es gilt:

$$\mathsf{X}(ab) = \mathsf{X}(a)\,\mathsf{X}(b), \qquad \mathsf{X}(a^{-1}) = \mathsf{X}(a)^{-1},$$

da $\alpha\beta^{-1}(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})\mathfrak{x}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})^{-1}$ ist.

Wir nennen dann $\mathfrak{G}$ eine $\mathsf{X}(c)$-*C-Erweiterung* von $\mathfrak{N}$, und $\mathsf{X}(c)$ ist ein Kollektivcharakter gemäß folgender

Definition 1: *Die Funktion* $\mathsf{X}(c)$ *heißt ein Kollektivcharakter der Gruppe* C *in der Gruppe* $\mathfrak{N}$, *wenn sie den Elementen aus* C *eindeutig und homomorph Automorphismenklassen von* $\mathfrak{N}$ *zuordnet.*

Zwei Elemente $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die derselben Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ angehören, denen also dasselbe Element aus C entspricht, induzieren dann und nur dann denselben Automorphismus von $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$ dem Zentrum[6]) $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{N}$ angehört [da ja $\mathfrak{a}\mathfrak{x}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{b}^{-1}$ für alle $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{N}$ nach sich zieht, daß $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{x}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b})^{-1}$ ist], wenn also $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derselben Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ angehören. Damit ist einer jeden Restklasse $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ eindeutig ein Automorphismus $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{N}$ zugeordnet und es gilt:

$$\chi_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \chi_{\mathfrak{A}}\chi_{\mathfrak{B}}, \quad \chi_{\mathfrak{A}^{-1}} = \chi_{\mathfrak{A}}^{-1}.$$

Also ist $\chi_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{x})$ ein Charakter von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{N}$ gemäß folgender

Definition 2: *Die Funktion* χ_g *heißt ein Charakter von* G *in* $\mathfrak{N}$, *wenn sie jedem Element* g *aus* G *eindeutig und homomorph einen Automorphismus von* $\mathfrak{N}$ *zuordnet.*

Für jedes Gruppenpaar $\mathfrak{N}$ und G gibt es stets wenigstens einen Charakter von G in $\mathfrak{N}$, nämlich den *Hauptcharakter*, der jedem Element aus G den identischen Automorphismus von $\mathfrak{N}$ zuordnet. — Eine analoge Bemerkung gilt für die Kollektivcharaktere.

Dann und nur dann decken sich die Begriffe Charakter und Kollektivcharakter irgendwelcher Gruppen in der Gruppe $\mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{N}$ mit seinem Zentrum $\mathfrak{Z}$ zusammenfällt, d. h. wenn $\mathfrak{N}$ kommutativ ist.

Ordnet man einer jeden Restklasse $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ das Element c aus C zu, das der Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ entspricht, in der $\mathfrak{A}$ enthalten ist, so

---

[6]) Das ist die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{N}$, die mit jedem Element von $\mathfrak{N}$ vertauschbar sind.

erhält man eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ auf C, und $\chi_{\mathfrak{A}}$ durchläuft alle und nur die Automorphismen aus $\mathsf{X}(c)$, und zwar jeden genau einmal, wenn $\mathfrak{A}$ alle die Restklassen durchläuft, denen bei unserem Homomorphismus c zugeordnet ist. $\chi_{\mathfrak{A}}$ ist dann durch Auflösung aus $\mathsf{X}(c)$ entstanden gemäß der folgenden

Definition 3: *Ist* $\mathsf{X}(c)$ *ein Kollektivcharakter von* C *in* $\mathfrak{N}$, χ_g *ein Charakter von* G *in* $\mathfrak{N}$, *so heißt* χ_g *durch Auflösung aus* $\mathsf{X}(c)$ *entstanden, wenn es eine homomorphe Abbildung* η *von* G *auf* C *gibt, so daß*

1. χ_g *ein Automorphismus aus* $\mathsf{X}[\eta(g)]$ *ist, und es*
2. *zu jedem Automorphismus* α *aus* $\mathsf{X}(c)$ *ein und nur ein* g *mit* $\eta(g) = c$ *gibt, so daß* $\chi_g = \alpha$ *ist.*

Nicht jeder Charakter läßt sich durch Auflösung eines geeigneten Kollektivcharakters gewinnen. Dies zeigt der

Satz 1: *Dann und nur dann läßt sich der Charakter* χ_g *von* G *in* $\mathfrak{N}$ *durch Auflösung eines Kollektivcharakters gewinnen, wenn es einen Normalteiler* N *von* G *gibt, so daß*

1. χ_n *für* n *aus* N *ein innerer Automorphismus von* $\mathfrak{N}$ *ist, und es*
2. *zu jedem inneren Automorphismus* α *von* $\mathfrak{N}$ *genau ein* a *in* N *mit* $\chi_a = \alpha$ *gibt*[7]).

Ist nämlich einerseits χ_g durch Auflösung eines Kollektivcharakters zu gewinnen, so erhält man den gesuchten Normalteiler N als die Gesamtheit der Elemente aus G, denen durch den die Auflösung definierenden Homomorphismus gerade die Gruppeneins zugeordnet wird.

Sind umgekehrt die Bedingungen 1. und 2. des Satzes erfüllt, so durchläuft χ_g genau alle Automorphismen, und zwar jeden genau einmal, einer gewissen Automorphismenklasse $\mathsf{X}(A)$, wenn g alle Elemente der Restklasse A von G/N durchläuft. X ist dann ein Kollektivcharakter von G/N in $\mathfrak{N}$, und X wird zu χ durch den Homomorphismus aufgelöst, der entsteht, wenn man dem Element g aus G die Restklasse Ng von G/N zuordnet.

Definition 4: *Ist für* $i = 1, 2$ *der Charakter* $\chi_g^{(i)}$ *von* G_i *in* $\mathfrak{N}$ *eine Auflösung des Kollektivcharakters* $\mathsf{X}(c)$ *der Gruppe* C *in der Gruppe* $\mathfrak{N}$ *durch den auflösenden Homomorphismus* η_i *von* G_i *auf* C, *so heißen die beiden Auflösungen isomorph, wenn es eine isomorphe Abbildung* γ *von* G_1 *auf* G_2 *gibt, so daß*

1. $\eta_2[\gamma(g)] = \eta_1(g)$ *für alle* g *aus* G_1, *und*
2. $\chi^{(2)}_{\gamma(g)} = \chi^{(1)}_g$ *ist.*

---

[7]) Der Kollektivcharakter X, dessen Auflösung χ ist, ist keineswegs eindeutig bestimmt, da bei verschiedener Auswahl von N der Typ von G/N verschieden sein kann.

Satz 2: *Jeder Kollektivcharakter läßt sich auf eine und bis auf Isomorphismen nur auf eine Weise auflösen.*

Beweis: A. Ist $\mathsf{X}(c)$ ein Kollektivcharakter der Gruppe C in der Gruppe $\mathfrak{N}$, so sei P die Gesamtheit der Paare $[a, \alpha]$ mit a aus C und α aus $\mathsf{X}(a)$. Setzen wir fest, daß dann und nur dann $[a, \alpha] = [b, \beta]$ ist, wenn $a = b$, $\alpha = \beta$ ist, daß weiter $[a, \alpha]\,[b, \beta] = [a\,b, \alpha\,\beta]$ ist, und setzen wir schließlich $\pi_{[a, \alpha]} = \alpha$; so gilt:

Satz 2a: *P ist eine Gruppe, $\pi_{[a, \alpha]}$ ein Charakter von P in $\mathfrak{N}$, der eine Auflösung des Kollektivcharakters $\mathsf{X}(c)$ ist; dabei ist $\varrho([a, \alpha]) = a$ eine auflösende homomorphe Abbildung von P auf C.*

Daß das Produkt von irgend zwei Elementen aus P stets und eindeutig definiert ist, folgt aus $\mathsf{X}(a)\,\mathsf{X}(b) = \mathsf{X}(a\,b)$. Das Assoziativgesetz in P folgt daraus, daß es in C gilt, und daß die Multiplikation von Abbildungen stets assoziativ ist. Daß schließlich die Division stets und eindeutig ausführbar ist, folgt aus der entsprechenden Eigenschaft von C und aus $\mathsf{X}(a\,b^{-1}) = \mathsf{X}(a)\,\mathsf{X}(b)^{-1}$. Also ist P eine Gruppe.

Daß π ein Charakter von P in $\mathfrak{N}$ ist, folgt aus

$$\pi_{[a, \alpha]\,[b, \beta]^{-1}} = \pi_{[a\,b^{-1},\ \alpha\,\beta^{-1}]} = \alpha\,\beta^{-1} = \pi_{[a, \alpha]}\,\pi_{[b, \beta]}^{-1}.$$

Daß ϱ eine homomorphe Abbildung von P auf C ist, folgt aus

$$\varrho([a, \alpha]\,[b, \beta]^{-1}) = \varrho([a\,b^{-1}, \alpha\,\beta^{-1}]) = a\,b^{-1} = \varrho([a, \alpha])\,\varrho([b, \beta])^{-1}.$$

Daß schließlich der Kollektivcharakter $\mathsf{X}(c)$ durch ϱ in den Charakter π aufgelöst wird, folgt daraus, daß dann und nur dann $[a, \alpha] = [b, \beta]$ ist, wenn $\varrho([a, \alpha]) = \varrho([b, \beta])$ und $\alpha = \beta$ ist, und daß in P alle Paare $[a, \alpha]$ mit α aus $\mathsf{X}(a)$ vorkommen.

B. Um zu zeigen, daß irgend zwei Auflösungen des Kollektivcharakters $\mathsf{X}(c)$ isomorph sind, genügt es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2b: *Jede Auflösung des Kollektivcharakters $\mathsf{X}(c)$ ist der durch den Charakter $\pi_{[a, \alpha]}$ von P in $\mathfrak{N}$ dargestellten Auflösung isomorph.*

Ist nämlich χ_g ein Charakter von G in $\mathfrak{N}$, der durch Auflösung mit Hilfe der homomorphen Abbildung η von G auf C aus dem Kollektivcharakter $\mathsf{X}(c)$ entsteht, so setzen wir

$$\gamma(g) = [\eta(g), \chi_g]$$

und haben zu zeigen, daß γ eine Isomorphie der beiden Auflösungen liefert.

Da χ_g ein Automorphismus aus $\mathsf{X}[\eta(g)]$ ist, so ist γ in ganz G eindeutig definiert. Ist weiter $\gamma(g) = \gamma(h)$, so ist $[\eta(g), \chi_g] = [\eta(h), \chi_h]$, also $\eta(g) = \eta(h)$ und $\chi_g = \chi_h$. Da aber χ eine Auflösung von X durch η ist, so tritt in $\mathsf{X}[\eta(g)]$ jeder Automorphismus nur genau einmal auf, was $g = h$ nach sich zieht. Da weiter jeder Automorphismus α aus $\mathsf{X}(a)$ für beliebiges a aus C unter den χ_g mit $\eta(g) = a$ vorkommen muß, so

folgt, daß γ eine eineindeutige Abbildung von ganz G auf ganz P ist. — Daß γ ein Isomorphismus ist, folgt aus

$$\gamma(gh) = [\eta(gh), \chi_{gh}] = [\eta(g)\eta(h), \chi_g\chi_h] = [\eta(g), \chi_g][\eta(h), \chi_h],$$

da ja η ein Homomorphismus und χ ein Charakter ist.

Daß schließlich γ sogar eine Isomorphie der beiden Auflösungen liefert, folgt aus

$$\varrho[\gamma(g)] = \varrho\{[\eta(g), \chi_g]\} = \eta(g)$$

und

$$\pi_{\gamma(g)} = \pi_{[\eta(g), \chi_g]} = \chi_g.$$

Der Kollektivcharakter $\mathsf{X}(c)$ von C in $\mathfrak{N}$ liefert auch einen Kollektivcharakter von C in $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$.

Denn bei allen Automorphismen von $\mathfrak{N}$ geht $\mathfrak{Z}$ in sich über; also liefern alle Automorphismen von $\mathfrak{N}$ auch Automorphismen von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$, insbesondere liefern die inneren Automorphismen von $\mathfrak{N}$ auch innere Automorphismen von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$, und umgekehrt läßt sich jeder innere Automorphismus von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ durch einen inneren Automorphismus von $\mathfrak{N}$ erzeugen.

Folgerung 1: *Es gibt stets* $\mathsf{X}(c)$*-C-Erweiterungen von* $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$.

Um dies einzusehen, betrachten wir die Gruppe P des Satzes 2a. Ist dann N die Gesamtheit der Paare $[1, \alpha]$ aus P, so ist N Normalteiler von P, da $[1, \alpha][1, \beta]^{-1} = [1, \alpha\beta^{-1}]$ und $[a, \alpha][1, \beta][a, \alpha]^{-1} = [1, \alpha\beta\alpha^{-1}]$ ist. Da in $[1, \alpha]$ notwendig α ein innerer Automorphismus ist, da weiter alle inneren Automorphismen zu Paaren $[1, \alpha]$ aus N Anlaß geben, so ist N isomorph der Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{N}$, und da zwei Elemente aus $\mathfrak{N}$ dann und nur dann denselben inneren Automorphismus von $\mathfrak{N}$ induzieren, wenn sie in derselben Restklasse von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ liegen, so ist N isomorph $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$. Ist schließlich β ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{N}$, so gibt es ein $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{N}$ mit $\beta(\mathfrak{x}) = \mathfrak{b}\mathfrak{x}\mathfrak{b}^{-1}$ und es wird $\alpha\beta\alpha^{-1}(\mathfrak{x}) = \alpha(\mathfrak{b})\mathfrak{x}\alpha(\mathfrak{b})^{-1}$, d. h. $[a, \alpha]$ induziert in N denselben Automorphismus wie α in $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$. Damit ist man aber in der Lage, eine $\mathsf{X}(c)$-C-Erweiterung von $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ zu konstruieren.

Definition 5: *Zwei* $\mathsf{X}(c)$*-C-Erweiterungen von* $\mathfrak{N}$ *gehören zum gleichen Erweiterungstyp, wenn es eine isomorphe Beziehung zwischen ihnen gibt, die* $\mathfrak{N}$ *und* C *elementweise in Ruhe läßt.*

Folgerung 2: *Besteht das Zentrum von* $\mathfrak{N}$ *nur aus der Gruppeneins, so gibt es eine und im wesentlichen nur eine* $\mathsf{X}(c)$*-C-Erweiterung von* $\mathfrak{N}$[8]).

[8]) Es sei auf die folgende Anwendung dieser Folgerung 2 hingewiesen: Sei $\mathfrak{F}$ die Poincarésche Fundamentalgruppe einer geschlossenen, orientierbaren Fläche vom Geschlecht > 2, und T die Gruppe aller topologischen Abbildungen dieser Fläche auf sich. Dann induziert jedes Element t aus T genau eine Automorphismenklasse

Die Existenz einer solchen Erweiterung folgt bereits aus Folgerung 1, da hier $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}$ ist. — Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz 2, wenn man bedenkt, daß jede $\mathsf{X}(c)$-C-Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{N}$ einen Charakter von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z} = \mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$ induziert, der durch Auflösung aus $\mathsf{X}(c)$ entstanden ist.

Folgerung 3: *Ist $\mathfrak{G}$ eine $\mathsf{X}(c)$-C-Erweiterung von $\mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ isomorph P, so daß die dem Element $[a, \alpha]$ aus P zugeordnete Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{N}$ gerade α induziert. — Also ist der Erweiterungstyp der $\mathsf{X}(c)$-C-Erweiterungen wenigstens „modulo $\mathfrak{Z}$" eindeutig bestimmt.*

Dies folgt aus Satz 2b, da $\mathfrak{G}$ einen Charakter von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{N}$ induziert, der durch Auflösung aus $\mathsf{X}(c)$ entstanden ist.

Es sei $\mathsf{X}_i(c)$ für $i = 1, 2$ ein Kollektivcharakter von C_i in $\mathfrak{N}_i$ und $\chi_g^{(i)}$ ein durch Auflösung aus $\mathsf{X}_i(c)$ vermittelst der homomorphen Abbildung η_i entstehender Charakter von G_i in $\mathfrak{N}_i$. G_i besitzt dann einen zu $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{Z}_i$ isomorphen Normalteiler, von dem wir o. B. d. A. annehmen können, daß er mit $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{Z}_i$ identisch ist.

Ist ν eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{N}_1$ auf $\mathfrak{N}_2$, so induziert ν auch eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{Z}_1$ auf $\mathfrak{N}_2/\mathfrak{Z}_2$. Ist α ein Automorphismus von $\mathfrak{N}_1$, so ist $\nu\alpha\nu^{-1}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{N}_2$, das Bild von α bei ν.

Satz 3: *Dann und nur dann gibt es eine in $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{Z}_1$ mit ν übereinstimmende isomorphe Abbildung γ von G_1 auf G_2, so daß*

$$\nu\chi_g^{(1)}\nu^{-1} = \chi_{\gamma(g)}^{(2)}$$

$\mathsf{X}(t)$ von $\mathfrak{F}$. $\mathsf{X}(t)$ ist ein Kollektivcharakter von T in $\mathfrak{F}$, und, da das Zentrum von $\mathfrak{F}$ allein aus der Identität besteht [vgl. J. Nielsen, Acta math. 50 (1927), S. 191—358, insbesondere S. 198, wo angegeben ist, daß zwei Elemente aus $\mathfrak{F}$ dann und nur dann vertauschbar sind, wenn sie in derselben zyklischen Untergruppe von $\mathfrak{F}$ enthalten sind, woraus unsere Behauptung folgt], so gibt es eine und nur eine $\mathsf{X}(t)$-T-Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$. Diese kann man sich auch als Gruppe aller der topologischen Abbildungen der zugehörigen universellen Überlagerungsfläche darstellen, bei denen Paare äquivalenter Punkte in Paare äquivalenter Punkte übergehen [die Gruppe der T-Funktionen vgl. J. Nielsen, a. a. O., S. 265]. — Versteht man unter D die Gruppe der topologischen Deformationen der Fläche, so ist dann und nur dann $\mathsf{X}(t_1) = \mathsf{X}(t_2)$, wenn $t_1 \cdot t_2^{-1}$ in D liegt [vgl. R. Baer, Journ. f. d. reine u. ang. Math. 159 (1928), S. 101—116, besonders Satz 3, § 3]; D ist Normalteiler von T, und jede Automorphismenklasse von $\mathfrak{F}$ wird durch Abbildungen aus T induziert [vgl. J. Nielsen, a. a. O., S. 266, Satz 11], so daß also T/D und die Gruppe G der Automorphismenklassen einstufig isomorph aufeinander bezogen sind. Gemäß Folgerung 2 gibt es also auch eine eindeutig bestimmte X-T/D-Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$, und durch Elemente aus $\mathfrak{G}$ wird jeder Automorphismus von $\mathfrak{F}$ genau einmal induziert. $\mathfrak{G}$ entsteht aus $\mathfrak{G}$ gewissermaßen durch Zerlegung nach dem Normalteiler D der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$.

ist, wenn es eine isomorphe Abbildung K *von* C_1 *auf* C_2 *gibt, so daß*

$$\nu\, \mathsf{X}_1(c)\, \nu^{-1} = \mathsf{X}_2[\mathsf{K}(c)]$$

gilt.

Beweis: Wegen Satz 2a und 2b können wir annehmen, daß $G_i = P_i$ [der Paargruppe][9]) und $\chi^{(i)} = \pi^{(i)}$ ist.

A. Es existiere eine Abbildung γ von P_1 auf P_2, die also

$$\nu\, \pi^{(1)}_{[a,\,\alpha]}\, \nu^{-1} = \pi^{(2)}_{\gamma([a,\,\alpha])}$$

erfüllt. Dann setzen wir $\mathsf{K}(a) = \varrho_2\{\gamma([a, \alpha])\}$.

K ist eindeutig. Denn es ist $\gamma([1, \alpha]) = \nu([1, \alpha]) = [1, \nu\alpha\nu^{-1}]$, da γ in N_1 mit ν übereinstimmt. Da nun

$$\varrho_2\{\gamma([a, \alpha])\}\, \varrho_2\{\gamma([a, \beta])\}^{-1} = \varrho_2\{\gamma([1, \alpha\beta^{-1}])\} = 1$$

ist, so wird also auch

$$\varrho_2\{\gamma([a, \alpha])\} = \varrho_2\{\gamma([a, \beta])\},$$

d. h. $\mathsf{K}(a)$ ist eindeutig. Ist umgekehrt $\mathsf{K}(a) = \mathsf{K}(b)$, so ist

$$\varrho_2\{\gamma([a, \alpha])\} = \varrho_2\{\gamma([b, \beta])\},$$

also $1 = \varrho_2\{\gamma([a\,b^{-1}, \alpha\beta^{-1}])\}$, also $a\,b^{-1} = 1$, da γ sonst keine eineindeutige Abbildung von N_1 auf N_2 wäre. Damit ist K als umkehrbar eindeutige Abbildung von C_1 auf C_2 erwiesen. Daß K ein Isomorphismus ist, folgt dann aus

$$\mathsf{K}(a\,b) = \varrho_2\{\gamma([a\,b, \alpha\beta])\} = \varrho_2\{\gamma[(a, \alpha])\}\, \varrho_2\{\gamma([b, \beta])\} = \mathsf{K}(a)\,\mathsf{K}(b).$$

Schließlich besteht $\mathsf{X}_2[\mathsf{K}(a)]$ aus der Gesamtheit der Automorphismen $\pi^{(2)}_{[\mathsf{K}(a),\,\alpha]}$ und wegen $\mathsf{K}(a) = \varrho_2\{\gamma([a, \alpha])\}$, wo α beliebig aus $\mathsf{X}_1(a)$ ist, und $\nu\, \pi^{(1)}_{[a,\,\alpha]}\, \nu^{-1} = \pi^{(2)}_{\gamma([a,\,\alpha])}$ wird also $\gamma([a, \alpha]) = [\mathsf{K}(a), \nu\alpha\nu^{-1}]$ und mithin $\nu\, \mathsf{X}_1(a)\, \nu^{-1} = \mathsf{X}_2[\mathsf{K}(a)]$.

B. Es gebe umgekehrt eine isomorphe Abbildung K von C_1 auf C_2, die $\nu\, \mathsf{X}_1(a)\, \nu^{-1} = \mathsf{X}_2[\mathsf{K}(a)]$ erfüllt. Dann setzen wir

$$\gamma([a, \alpha]) = [\mathsf{K}(a), \nu\alpha\nu^{-1}].$$

Diese Abbildung ist eindeutig wegen der von K erfüllten Bedingungen. Ist weiter

$$[\mathsf{K}(a), \nu\alpha\nu^{-1}] = [\mathsf{K}(b), \nu\beta\nu^{-1}],$$

so wird $\mathsf{K}(a) = \mathsf{K}(b)$, also $a = b$, und $\nu\alpha\nu^{-1} = \nu\beta\nu^{-1}$, also $\alpha = \beta$. Daraus folgt, daß γ eine eineindeutige Abbildung von P_1 auf P_2 ist. Weiter ist

$$\nu\, \pi^{(1)}_{[a,\,\alpha]}\, \nu^{-1} = \nu\alpha\nu^{-1} = \pi^{(2)}_{[\mathsf{K}(a),\,\nu\alpha\nu^{-1}]} = \pi^{(2)}_{\gamma([a,\,\alpha])}.$$

---

[9]) Dann ist zwar nicht mehr $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{Z}_i$ Untergruppe, aber die dazu isomorphe Gruppe N_i der Paare $[1, \alpha]$, wo α innerer Automorphismus von $\mathfrak{N}_i$ ist, und ν induziert in naturgemäßer Weise eine isomorphe Abbildung von N_1 auf N_2.

Schließlich ist

$$\gamma([1, \alpha]) = [\mathsf{K}(1), \nu\alpha\nu^{-1}] = [1, \nu\alpha\nu^{-1}],$$

d. h. γ stimmt in N_1 mit ν überein, leistet also das Verlangte.

Man bemerke noch, daß auf alle Fälle γ bzw. K so ausgewählt werden können, daß γ und K in C_1 übereinstimmen.

Ist speziell $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}$, so wird ν ein Automorphismus von $\mathfrak{N}$. Ist weiter $G_1 = G_2 = G$ und $C_1 = C_2 = C$, so wird auch γ ein Automorphismus und unser Satz 3 liefert die

Folgerung 1: *Dann und nur dann gibt es einen Automorphismus γ von G, der in $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$ mit ν übereinstimmt und*

$$\nu\chi_g^{(1)} = \chi_{\gamma(g)}^{(2)}\nu$$

erfüllt, wenn es einen Automorphismus K von C gibt, so daß

$$\nu\mathsf{X}_1(a) = \mathsf{X}_2[\mathsf{K}(a)]\,\nu$$

gilt.

Mit Hilfe von Satz 3 kann die Frage der Erweiterung von Isomorphismen von Normalteilern zu solchen der Obergruppe wenigstens „modulo $\mathfrak{Z}$" beantwortet werden, also allgemein, wenn das Zentrum nur aus der Gruppeneins besteht:

Ist nämlich $\mathfrak{G}_i$ für $i = 1, 2$ eine $\mathsf{X}_i(c)$-C_i-Erweiterung von $\mathfrak{N}_i$ und $\chi_{\mathfrak{A}}^{(i)}$ der von $\mathfrak{G}_i$ induzierte Charakter von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{Z}_i$ in $\mathfrak{N}_i$, der also aus X_i durch Auflösung entstanden ist, so folgt aus Satz 3 die

Folgerung 2: *Dann und nur dann gibt es eine isomorphe Abbildung γ von $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{Z}_1$ auf $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{Z}_2$, die in $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{Z}_1$ mit ν übereinstimmt und*

$$\nu\chi_{\mathfrak{A}}^{(1)} = \chi_{\gamma(\mathfrak{A})}^{(2)}\nu$$

erfüllt, wenn es eine isomorphe Abbildung K von C_1 auf C_2 gibt, so daß

$$\nu\mathsf{X}_1(a) = \mathsf{X}_2[\mathsf{K}(a)]\,\nu$$

gilt.

Es sei schließlich noch bemerkt, daß die Eindeutigkeitsaussage des Satzes 2 sich als Spezialfall des Satzes 3 gewinnen läßt, wenn man nur $\mathsf{K} = 1$, $\nu = 1$ und $\mathsf{X}_1 = \mathsf{X}_2$ setzt.

§ 2.

Erweiterung kommutativer Gruppen.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative Gruppe und $\chi_g(\mathfrak{a})$ ein Charakter der Gruppe G in der Gruppe $\mathfrak{A}$. Wir wollen uns einen Überblick über die sämtlichen $\chi_g(\mathfrak{a})$-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ verschaffen, d. h. über die sämtlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ derart, daß

1. $\mathfrak{A}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, und es

2. eine isomorphe Abbildung von G auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ gibt, so daß die g aus G zugeordnete Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ genau den Automorphismus $\chi_g(a)$ induziert.

Wir stellen uns G durch Erzeugende und Relationen gegeben vor und machen dabei die folgenden Annahmen, die keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellen:

1. Das System $\{e_\nu\}$ der Erzeugenden von G enthalte mit irgend einer Erzeugenden auch ihre Inverse, d. h. zu jedem ν gibt es ein $\varrho(\nu)$, so daß $e_\nu^{-1} = e_{\varrho(\nu)}$ und $\varrho[\varrho(\nu)] = \nu$ ist. Dies gestattet, die Elemente aus G rein multiplikativ aus den Erzeugenden aufzubauen.

Gelegentlich werden wir auch von der Annahme Gebrauch machen, daß $e_\nu \neq 1$ ist, werden aber der Bequemlichkeit halber die Gruppeneins stets durch e_0 bezeichnen.

2. Das System R der Relationen enthalte a l l e Relationen zwischen den Erzeugenden. Wir begnügen uns hier also nicht nur mit einem vollständigen Relationensystem.

Ein Wort a ist irgendein Produkt aus endlich vielen e_ν. Sind a und b zwei Worte, so bedeutet $a \equiv b$, daß a und b aus den e_ν in derselben Weise aufgebaut sind (d. h. a und b stellen dasselbe Element in der von den e_ν erzeugten freien Gruppe dar), während $a = b$ nur besagt, daß diese Worte dasselbe Element in G darstellen. Schließlich verstehen wir unter a^{-1} das Wort, das aus dem Wort a entsteht, indem man die inversen Erzeugenden in der umgekehrten Reihenfolge schreibt, d. h. ist

$$a \equiv e_{\nu_1} \dots e_{\nu_n},$$

so ist

$$a^{-1} \equiv e_{\varrho(\nu_n)} \dots e_{\varrho(\nu_1)} \left[\equiv e_{\nu_n}^{-1} \dots e_{\nu_1}^{-1}\right]$$

Sei jetzt $\mathfrak{G}$ eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$. Dann können wir aus der e_ν zugeordneten Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ irgendwie ein Element $\mathfrak{e}_\nu$ auswählen. Dabei setzen wir allerdings fest, daß $\mathfrak{e}_0 = 1$ ist, da ja e_0 die Gruppeneins in G bedeutet, die entsprechende Restklasse also $\mathfrak{A}$ selbst ist.

Wir definieren dann:

$$\mathfrak{w}\left(\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{e}_{\nu_i}.$$

Diese Funktion $\mathfrak{w}(a)$ ist für alle Worte a in den Erzeugenden e_ν erklärt und erfüllt:

$$\mathfrak{w}(a) \cdot \mathfrak{w}(b) = \mathfrak{w}(ab).$$

Wir bezeichnen sie deshalb als die [zu den $\mathfrak{e}_\nu$ gehörige] *multiplikative Wortfunktion*. Sind insbesondere die $\mathfrak{e}_\nu$ so ausgewählt, daß $\mathfrak{e}_{\varrho(\nu)} = \mathfrak{e}_\nu^{-1}$ ist, so wird:

$$\mathfrak{w}(a^{-1}) = \mathfrak{w}(a)^{-1}$$

und wir sagen, daß $\mathfrak{w}(a)$ eine n o r m i e r t e multiplikative Wortfunktion ist.

Ist das Wort $r = 1$, d. h. r ein Element aus dem System R aller Relationen, so muß $\mathfrak{w}(r)$ ein Element aus $\mathfrak{A}$ sein, da ja $\mathfrak{G}$ eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ also zu G isomorph) ist. Um diesen wichtigen Sachverhalt in Evidenz zu setzen, setzen wir $\mathfrak{w}(r) = \mathfrak{a}(r)$, falls $r = 1$ ist, und nennen $\mathfrak{a}(r)$ multiplikative Relationsfunktion. Ist $\mathfrak{w}(r)$ normiert, so nennen wir auch $\mathfrak{a}(r)$ normiert.

Durchläuft r alle Worte aus R, d. h. alle Relationen, so durchläuft $\mathfrak{a}(r)$ alle Elemente einer gewissen Halbgruppe $\mathfrak{R}$, da mit $\mathfrak{a}(r)$ und $\mathfrak{a}(s)$ auch $\mathfrak{a}(rs) = \mathfrak{a}(r) \cdot \mathfrak{a}(s)$ in $\mathfrak{R}$ liegt, und weiter $\mathfrak{a}(1) = \mathfrak{w}(1) = \mathfrak{e}_0 = 1$ ebenfalls in $\mathfrak{R}$ enthalten ist. Dagegen werden die Reziproken im allgemeinen nicht in $\mathfrak{R}$ enthalten sein. Dies gilt, wenn $\mathfrak{a}(r)$ normiert ist, da ja dann

$$\mathfrak{a}(r)^{-1} = \mathfrak{a}(r^{-1})$$

ist.

Bildet man die von den $\mathfrak{e}_\nu$ durch Multiplikation erzeugte Unterhalbgruppe $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{E}$ insbesondere eine Gruppe, wenn $\mathfrak{w}(a)$ normiert ist. Stets aber gilt, daß sich $\mathfrak{E}/\mathfrak{R}$ bilden läßt und eine zu G isomorphe Gruppe liefert.

Es stellt sich jetzt die folgende Frage:

Gegeben eine Funktion $\mathfrak{a}(r)$ aus $\mathfrak{A}$, die für alle r aus R definiert ist; wann gibt es eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$, so daß bei geeigneter Auswahl der $\mathfrak{e}_\nu$ sich als Relationsfunktion gerade $\mathfrak{a}(r)$ ergibt, insbesondere: wann wird $\mathfrak{a}(r)$ normiert sein?

Satz 1: *Es sei $\mathfrak{a}(r)$ eine multiplikative Relationsfunktion.*

a) *Dann und nur dann ist $\mathfrak{a}(r)$ durch eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ realisierbar, wenn*

$$\mathfrak{a}(c\,b\,d^{-1}) = \mathfrak{a}(c\,d^{-1})\,\chi_c[\mathfrak{a}(b)] \quad \text{für} \quad 1 = b,\ c = d \tag{1}$$

gilt.

b) *Dann und nur dann ist $\mathfrak{a}(r)$ durch eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ realisierbar und überdies normiert, wenn*

$$\mathfrak{a}(e_\nu\,b\,e_\nu^{-1}) = \chi_{e_\nu}[\mathfrak{a}(b)] \quad \text{für} \quad b = 1 \tag{2}$$

gilt.

c) *Durch $\mathfrak{a}(r)$ ist die $\mathfrak{a}(r)$ realisierende χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ im wesentlichen eindeutig bestimmt.*

Beweis: ad a) A. Wir haben die Notwendigkeit von (1) herzuleiten. Hierzu bilden wir die zugehörige multiplikative Wortfunktion $\mathfrak{w}(a)$. Dann wird für $1 = b$, $c = d$

$$\mathfrak{a}(c\,b\,d^{-1}) = \mathfrak{w}(c)\,\mathfrak{a}(b)\,\mathfrak{w}(d^{-1}) = \chi_c[\mathfrak{a}(b)]\,\mathfrak{w}(c)\,\mathfrak{w}(d^{-1}) = \chi_c[\mathfrak{a}(b)]\,\mathfrak{a}(c\,d^{-1}),$$

wie behauptet.

B. Zur Vorbereitung des unter C. zu führenden Beweises, daß die Bedingung (1) hinreichend ist, seien noch zwei Aussagen hergeleitet, aus denen übrigens auch folgt, daß $\mathfrak{a}(r)$ im wesentlichen nur eine einzige χ_σ-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ bestimmt.

Ist nämlich $\mathfrak{G}$ eine χ_σ-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ derart, daß bei geeigneter Auswahl der e_ν gerade $\mathfrak{a}(r)$ die Relationsfunktion und $\mathfrak{w}(a)$ die Wortfunktion wird, so läßt sich jedes Element aus $\mathfrak{G}$ auf wenigstens eine Weise auf die Form $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{w}(a)$ mit $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ bringen, wie auch jedes derartige $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{w}(a)$ genau ein Element aus $\mathfrak{G}$ darstellt. Dann gilt:

(*G*) *Dann und nur dann ist* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{w}(a) = \mathfrak{b}\,\mathfrak{w}(b)$, *wenn* $a = b$ *und* $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}(a\,a^{-1}) = \mathfrak{b}\,\chi_a[\mathfrak{a}(a^{-1}b)]$ *ist.*

Ist nämlich $\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}(a) = \mathfrak{b}\,\mathfrak{w}(b)$, so müssen $\mathfrak{w}(a)$ und $\mathfrak{w}(b)$ in derselben Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ liegen, was $a = b$ nach sich zieht. Also wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{w}(a) &= \mathfrak{w}(a)\,\mathfrak{w}(a^{-1})\,\mathfrak{w}(a^{-1})^{-1}\,\mathfrak{w}(b)^{-1}\,\mathfrak{w}(a^{-1})^{-1}\,\mathfrak{w}(a^{-1})\,\mathfrak{w}(b)\\ &= \mathfrak{a}(a\,a^{-1})\,\chi_a[\mathfrak{a}^{-1}(a^{-1}b)]\,\mathfrak{w}(b)\end{aligned}$$

und mithin

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}(a\,a^{-1})\,\chi_a[\mathfrak{a}^{-1}(a^{-1}b)].$$

Sind umgekehrt die Bedingungen erfüllt, so wird:

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{w}(b) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}(a\,a^{-1})\,\chi_a[\mathfrak{a}^{-1}(a^{-1}b)]\,\mathfrak{w}(b) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{w}(a).$$

Aus der Multiplikativität von $\mathfrak{w}(a)$ folgert man:

(*M*) $$\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}(a)\cdot\mathfrak{b}\,\mathfrak{w}(b) = \mathfrak{a}\,\chi_a[\mathfrak{b}]\cdot\mathfrak{w}(a\,b)$$

für beliebiges a und b.

C. Die multiplikative Relationsfunktion $\mathfrak{a}(r)$ mit r aus R und $\mathfrak{a}(r)$ aus $\mathfrak{A}$ erfülle die Bedingung (1). Wir ordnen jedem Wort a in den e_ν umkehrbar eindeutig ein neues Ding $\mathfrak{w}(a)$ zu und bilden die Gesamtheit $\mathfrak{G}$ der Paare $\mathfrak{a}\times\mathfrak{w}(a)$.

In $\mathfrak{G}$ erklären wir die Gleichheit durch die Regel: Dann und nur dann ist $\mathfrak{a}\times\mathfrak{w}(a) = \mathfrak{b}\times\mathfrak{w}(b)$, wenn $a = b$ und

$$\mathfrak{b}\,\chi_a[\mathfrak{a}(a^{-1}b)] = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}(a\,a^{-1})$$

ist.

Diese Gleichheitsdefinition ist reflexiv. Setzt man nämlich in (1) speziell $a \equiv c \equiv d$, $b \equiv a^{-1}\cdot a$, so ergibt sich:

$$\mathfrak{a}(a\,a^{-1}) = \chi_a[\mathfrak{a}(a^{-1}a)],$$

und daraus folgt:

$$\mathfrak{a}\times\mathfrak{w}(a) = \mathfrak{a}\times\mathfrak{w}(a).$$

Die Gleichheitsdefinition ist auch symmetrisch; denn mit $a = b$ ist auch $b = a$. Setzen wir weiter in (1) speziell $a^{-1}a \equiv b$, $c \equiv d$, so ergibt sich:

$$\mathfrak{a}(c\,a^{-1}a\,c^{-1}) = \mathfrak{a}(c\,c^{-1})\,\chi_c[\mathfrak{a}(a^{-1}a)].$$

Hieraus folgt dann, wenn man a^{-1} für c und b für a^{-1} einsetzt:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}\,(a\,a^{-1}) = \mathfrak{b}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,b)] = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,(b\,b^{-1})\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,a)]\,\chi_a[a^{-1}\,(b^{-1}\,a)].$$

Wegen

$$\mathfrak{a}\,(a\,a^{-1}) = \chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,a)]$$

wird also

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,(b\,b^{-1})\,\chi_a[a^{-1}\,(b^{-1}\,a)],$$

d. h. es ist auch

$$\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}\,(b) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{w}\,(a).$$

Ist schließlich

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}\,(a) = \mathfrak{b} \times \mathfrak{w}\,(b)$$

und

$$\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}\,(b) = \mathfrak{c} \times \mathfrak{w}\,(c),$$

so ist $a = b$ und $b = c$, also auch $a = c$. Weiter ist

$$\mathfrak{b}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,b)] = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}\,(a\,a^{-1})$$

und

$$\mathfrak{c}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(b^{-1}\,c)] = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,(b\,b^{-1}).$$

Wegen (1) wird also

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\,(a\,a^{-1})\,\mathfrak{a} &= \mathfrak{b}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,b)] = \mathfrak{b}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,b)]\,\mathfrak{a}^{-1}\,(b\,b^{-1})\,\mathfrak{a}\,(b\,b^{-1}) \\ &= \chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,b)]\,\mathfrak{a}^{-1}\,(b\,b^{-1})\,\mathfrak{c}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(b^{-1}\,c)] = \mathfrak{c}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,c)],\end{aligned}$$

d. h. die Gleichheitsdefinition ist auch transitiv.

Die Multiplikation der Elemente aus $\mathfrak{G}$ erklären wir durch folgende Regel:

$$[\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}\,(a)] \circ [\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}\,(b)] = \mathfrak{a}\,\chi_a(\mathfrak{b}) \times \mathfrak{w}\,(a\,b).$$

Es ist zunächst die Eindeutigkeit dieser Produktdefinition zu zeigen: Sei also etwa

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}\,(a) = \mathfrak{c} \times \mathfrak{w}\,(c)$$

und

$$\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}\,(b) = \mathfrak{d} \times \mathfrak{w}\,(d);$$

dann ist $a = c$, $b = d$ und

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}\,(a\,a^{-1}) = \mathfrak{c}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,c)], \quad \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,(b\,b^{-1}) = \mathfrak{d}\,\chi_b[\mathfrak{a}\,(b^{-1}\,d)],$$

und es wird:

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}\,(a)] \circ [\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}\,(b)] = \mathfrak{a}\,\chi_a(\mathfrak{b}) \times \mathfrak{w}\,(a\,b) \\ &= \mathfrak{c}\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,c)]\,\mathfrak{a}^{-1}\,(a\,a^{-1})\,\chi_a[\mathfrak{d}\,\chi_b\{\mathfrak{a}\,(b^{-1}\,d)\}\,\mathfrak{a}^{-1}\,(b\,b^{-1})] \times \mathfrak{w}\,(a\,b) \\ &= \mathfrak{c}\,\chi_a(\mathfrak{d})\,\mathfrak{a}^{-1}\,(a\,a^{-1})\,\chi_a[\mathfrak{a}^{-1}\,(b\,b^{-1})]\,\chi_a[\mathfrak{a}\,(a^{-1}\,c)\,\chi_b\{\mathfrak{a}\,(b^{-1}\,d)\}] \times \mathfrak{w}\,(a\,b) \\ &= \mathfrak{c}\,\chi_a(\mathfrak{d})\,\mathfrak{a}^{-1}\,(a\,b\,b^{-1}a^{-1})\,\chi_{a\,b}[\mathfrak{a}\,(b^{-1}\,a^{-1}\,c\,d)] \times \mathfrak{w}\,(a\,b) \qquad \text{wegen (1)} \\ &= \mathfrak{c}\,\chi_a(\mathfrak{d}) \times \mathfrak{w}\,(c\,d) \qquad \text{wegen der Gleichheitsdefinition} \\ &= [\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}\,(c)] \circ [\mathfrak{d} \times \mathfrak{w}\,(d)] \qquad \text{nach der Multiplikationsregel.}\end{aligned}$$

Die Multiplikation ist assoziativ, denn es ist:

$$[\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}(a)] \circ \{[\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}(b)] \circ [\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}(c)]\} = \mathfrak{a}\,\chi_a(\mathfrak{b})\,\chi_{ab}(\mathfrak{c}) \times \mathfrak{w}(abc)$$
$$= \{[\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}(a)] \circ [\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}(b)]\} \circ [\mathfrak{c} \times \mathfrak{w}(c)].$$

Die Division ist stets und eindeutig ausführbar, denn

$$[\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}(a)] \circ [\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}(b)] = \mathfrak{c} \times \mathfrak{w}(c)$$

ist mit $ab = c$ und

$$\mathfrak{a}\,\chi_a(\mathfrak{b})\,\mathfrak{a}(abb^{-1}a^{-1}) = \mathfrak{c}\,\chi_c[\mathfrak{a}(b^{-1}a^{-1}c)]$$

gleichwertig, und diese Gleichungen gestatten eindeutige Auflösungen nach a, $\mathfrak{a}$ bzw. b, $\mathfrak{b}$.

$\mathfrak{G}$ ist also eine Gruppe. Die Gruppeneins ist $1 \times \mathfrak{w}(1)$ und es ist

$$[\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}(1)] \circ [\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}(1)] = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \times \mathfrak{w}(1),$$

und $\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}(1) = \mathfrak{b} \times \mathfrak{w}(1)$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist. Schließlich ist

$$[\mathfrak{a} \times \mathfrak{w}(1)] \circ [1 \times \mathfrak{w}(a)] = \mathfrak{a} \times \mathfrak{w}(a).$$

Wir können also die Zeichen $\circ$ und $\times$ wieder fortlassen und die Gruppeneins aus $\mathfrak{A}$ wie auch $\mathfrak{w}(1)$ mit der Gruppeneins von $\mathfrak{G}$ identifizieren. Dann aber ist $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ als Normalteiler enthalten, und die $\mathfrak{w}(a)$ enthaltende Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ induziert in $\mathfrak{A}$ genau den Automorphismus χ_a.

Setzen wir schließlich $\mathfrak{w}(e_\nu) = \mathfrak{e}_\nu$, so wird

$$\mathfrak{w}\left(\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{e}_{\nu_i},$$

und aus $a = 1$ folgt wegen $1 \times \mathfrak{w}(a) = \mathfrak{a}(a) \times \mathfrak{w}(1)$ jetzt auch $\mathfrak{w}(a) = \mathfrak{a}(a)$, womit bewiesen ist, daß $\mathfrak{G}$ alle im Satz geforderten Eigenschaften hat.

ad b). Ist die Relationsfunktion $\mathfrak{a}(r)$ überdies normiert, so folgt aus (1), wenn man $c \equiv d \equiv e_\nu$ setzt,

$$\mathfrak{a}(e_\nu b e_\nu^{-1}) = \chi_{e_\nu}[\mathfrak{a}(b)]\,\mathfrak{a}(e_\nu e_\nu^{-1}) = \chi_{e_\nu}[\mathfrak{a}(b)],$$

d. h. (2).

Ist umgekehrt (2) erfüllt, so folgt aus der Eindeutigkeit und Multiplikativität von $\mathfrak{a}(r)$ zunächst $\mathfrak{a}(1) = 1$ und also, wenn man (2) wiederholt anwendet:

$$\mathfrak{a}(a a^{-1}) = \chi_a[\mathfrak{a}(1)] = 1,$$

d. h. die Normiertheit von $\mathfrak{a}(r)$. Weiter wird, falls $b = 1$, $c = d$ ist:

$$\mathfrak{a}(cbd^{-1}) = \mathfrak{a}(cbd^{-1})\,\mathfrak{a}(cc^{-1}) = \mathfrak{a}(cbd^{-1}cc^{-1}), \qquad \text{wegen (2)}$$
$$= \chi_c[\mathfrak{a}(bd^{-1}c)] = \chi_c[\mathfrak{a}(b)]\,\chi_c[\mathfrak{a}(d^{-1}c)], \qquad \text{wegen (2)}$$
$$= \chi_c[\mathfrak{a}(b)]\,\mathfrak{a}(cd^{-1}cc^{-1}) = \chi_c[\mathfrak{a}(b)]\,\mathfrak{a}(cd^{-1})\,\mathfrak{a}(cc^{-1})$$
$$= \chi_c[\mathfrak{a}(b)]\,\mathfrak{a}(cd^{-1}), \qquad \text{d. h. es gilt auch (1).}$$

Das von uns angewandte Verfahren hatte die Eigenart, daß die Repräsentanten von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ [die Wortfunktion $\mathfrak{w}(a)$] hinsichtlich der Multiplikation ein getreues Bild gaben, dafür wurden aber einer Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ im allgemeinen mehrere Repräsentanten zugeordnet. Man kann aber auch den umgekehrten Weg einschlagen, aus jeder Restklasse genau einen Repräsentanten zu wählen, muß aber dann die Multiplikativität opfern, und wird zu den sogenannten *Faktorensystemen* geführt[10]).

Ist etwa $\mathfrak{G}$ eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$, so wählen wir aus der g aus G zugeordneten Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ irgendwie einen Repräsentanten $\mathfrak{r}(g)$ aus, nur sei $\mathfrak{r}(1) = 1$. Dann wird

$$\mathfrak{r}(a)\,\mathfrak{r}(b) = (a, b)\,\mathfrak{r}(a\,b),$$

und da $\mathfrak{r}(a)\,\mathfrak{r}(b)$ und $\mathfrak{r}(a\,b)$ in derselben Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ liegen, so ist der Faktor (a, b) ein Element aus $\mathfrak{A}$. Es stellt sich nun die Frage, welchen Bedingungen die Funktion (a, b) genügen muß, damit es eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ gibt, in welcher (a, b) bei geeigneter Auswahl des Repräsentantensystems gerade das Faktorensystem ist.

Zusatz: *Dann und nur dann ist* (a, b) *Faktorensystem einer* χ_g-G-*Erweiterung von* $\mathfrak{A}$, *wenn* $(1, a) = (a, 1) = 1$ *und*

$$(a, b)\,(a\,b, c) = \chi_a[(b, c)]\,(a, b\,c) \tag{3}$$

gilt[11]).

Durch das Faktorensystem (a, b) *ist die* χ_g-G-*Erweiterung im wesentlichen eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei $\mathfrak{r}(a)$ Repräsentantensystem mit dem Faktorensystem (a, b). Dann wird:

$$\mathfrak{r}(a)\,\mathfrak{r}(b)\,\mathfrak{r}(c) = (a, b)\,\mathfrak{r}(a\,b)\,\mathfrak{r}(c) = (a, b)\,(a\,b, c)\,\mathfrak{r}(a\,b\,c)$$

und andererseits

$$= \mathfrak{r}(a)\,(b, c)\,\mathfrak{r}(b\,c) = \chi_a[(b, c)]\,\mathfrak{r}(a)\,\mathfrak{r}(b\,c)$$
$$= \chi_a[(b, c)]\,(a, b\,c)\,\mathfrak{r}(a\,b\,c),$$

woraus (3) folgt.

Sind umgekehrt die Bedingungen des Satzes erfüllt, so wählen wir, um Satz 1 a) anwenden zu können, als Erzeugende von G die sämtlichen

---

[10]) Diese finden z. B. in Schreiers Untersuchungen über Erweiterungen von Gruppen [vgl. Fußnote [1])] und in der Theorie der hyperkomplexen Systeme (vgl. etwa R. Brauer, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 677–696; 30 (1929), S. 79—107) Anwendung.

[11]) O. Schreier a. a. O.; vgl. auch J. Schur, Math. Zeitschr. 5 (1919), S. 9, Satz 1.

Elemente aus G[12]). Ist dann $\prod_{i=1}^{n} a_i$ irgendein Wort in diesen Erzeugenden, so definieren wir eine Relationsfunktion durch:

$$\mathfrak{a}\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) = \prod_{i=1}^{n-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} a_j, a_{i+1}\Big),$$

falls $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ ist.

Wir zeigen zunächst, daß die so definierte Relationsfunktion multiplikativ ist und der Bedingung (1) genügt:

Ist

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} b_i = 1,$$

so wird:

$$\mathfrak{a}\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big)\,\mathfrak{a}\Big(\prod_{i=1}^{m} b_i\Big) = \prod_{i=1}^{n-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} a_j, a_{i+1}\Big)\cdot\prod_{i=1}^{m-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} b_j, b_{i+1}\Big)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} a_j, a_{i+1}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{n} a_j, b_1\Big)\cdot\prod_{i=1}^{m-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} b_j, b_{i+1}\Big),$$

da $(1, x) = 1$,

$$= \mathfrak{a}\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{m} b_i\Big),$$

womit die Multiplikativität dargetan ist.

Ist weiter $c \equiv \prod_{i=1}^{l} c_i = \prod_{i=1}^{m} d_i \equiv d$ und $b \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i = 1$, so wird

$$\chi_c[\mathfrak{a}(b)]\,\mathfrak{a}(c\,d^{-1}) =$$

$$= \chi_c\Big[\prod_{i=1}^{n-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} b_j, b_{i+1}\Big)\Big]\prod_{i=1}^{l-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} c_j, c_{i+1}\Big)\prod_{i=0}^{m-1}\Big(c\prod_{j=0}^{i} d_{m-j+1}^{-1}, d_{m-i}^{-1}\Big)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}\Big\{\Big(c, \prod_{j=1}^{i} b_j\Big)\Big(c\prod_{j=1}^{i} b_j, b_{i+1}\Big)\Big(c, \prod_{j=1}^{i+1} b_j\Big)^{-1}\Big\}\cdot$$

$$\prod_{i=1}^{l-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} c_j, c_{i+1}\Big)\prod_{i=0}^{m-1}\Big(c\prod_{j=0}^{i} d_{m-j+1}^{-1}, d_{m-i}^{-1}\Big)$$

wegen (3),

$$= \prod_{i=1}^{l-1}\Big(\prod_{j=1}^{i} c_j, c_{i+1}\Big)(c, b_1)\,(c, b)^{-1}\prod_{i=1}^{n-1}\Big(c\prod_{j=1}^{i} b_j b_{i+1}\Big)\cdot$$

$$\prod_{i=0}^{m-1}\Big(c\prod_{j=0}^{i} d_{m-j+1}^{-1}, d_{m-i}^{-1}\Big)$$

$$= \mathfrak{a}(c\,b\,d^{-1}),$$

---

[12]) Da es, wenn $a^2 = 1$ ist, in der zugeordneten Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ kein Element der Ordnung 2 zu geben braucht, können wir hier Satz 1 b) nicht anwenden.

da $b = 1$, also $(c, b) = 1$ und $(c\,x, y) = (c\,b\,x, y)$ ist, womit (1) hergeleitet ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die durch $\mathfrak{a}(r)$ charakterisierte χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ gerade (a, b) zum Faktorensystem hat:

Ist $a\,b = c$, so wird $a\,b\,c^{-1} = 1$ und $\mathfrak{r}(a)\,\mathfrak{r}(b) = \mathfrak{x}\,\mathfrak{r}(c)$, und es ist $\mathfrak{x} = (a, b)$ zu zeigen. Nun ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{x} &= \mathfrak{r}(a)\,\mathfrak{r}(b)\,\mathfrak{r}(c)^{-1} = \mathfrak{r}(a)\,\mathfrak{r}(b)\,\mathfrak{r}(c^{-1})\,\mathfrak{r}(c^{-1})^{-1}\,\mathfrak{r}(c)^{-1}\\ &= \mathfrak{a}(a\,b\,c^{-1})\,\mathfrak{a}(c\,c^{-1})^{-1} = (a, b)\,(a\,b, c^{-1})\,(c, c^{-1})^{-1} = (a, b).\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeitsaussage schließlich folgt sofort aus Satz 1 c).

Es sei $\mathfrak{G}_i$ für $i = 1, 2$ eine $\chi_g^{(i)}$-G_i-Erweiterung der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}_i$ und α eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}_2$. Fragt man sich, wann es möglich ist, α zu einer isomorphen Abbildung von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}_2$ zu erweitern, so ergibt sich als triviale notwendige Bedingung die Isomorphie von G_1 und G_2. Es ist also vernünftig, die Frage folgendermaßen zu modifizieren: Vorgelegt eine isomorphe Abbildung α von $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{A}_2$ und eine isomorphe Abbildung β von G_1 auf G_2. Wann gibt es eine isomorphe Abbildung γ von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}_2$, die in $\mathfrak{A}_1$ mit α übereinstimmt und in G_1 gerade β induziert?

Hierbei wollen wir wieder annehmen, daß G_i durch Erzeugende $e_{\nu i}$ und Relationen gegeben ist, und daß stets $\beta(e_{\nu 1}) = e_{\nu 2}$ gilt, weshalb wir kurz e_ν für $e_{\nu 1}$ und $\beta(e_\nu)$ für $e_{\nu 2}$ schreiben.

Satz 2: *Es sei die $\chi_g^{(i)}$-G_i-Erweiterung $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{A}_i$ durch die Relationsfunktion $\mathfrak{a}_i(r)$ im Sinne von Satz 1 charakterisiert; dann und nur dann gibt es eine isomorphe Abbildung γ von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}_2$, die α und β umfaßt, wenn*

1. $\alpha\,\chi_g^{(1)}\,\alpha^{-1} = \chi_{\beta(g)}^{(2)}$,

2. *es möglich ist, den Erzeugenden e_ν von G_1 eindeutig Elemente $\mathfrak{b}_\nu$ aus $\mathfrak{A}_2$ so zuzuordnen, daß aus $\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i} = 1$ stets*

$$\prod_{i=1}^{n} \chi^{(2)}_{\prod_{k=1}^{i-1} \beta(e_{\nu_k})}(\mathfrak{b}_{\nu_i}) \cdot \mathfrak{a}_2\left[\prod_{i=1}^{n} \beta(e_{\nu_i})\right] = \alpha\left[\mathfrak{a}_1\left(\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}\right)\right]$$

folgt.

Beweis: Es sei ϱ_i die isomorphe Abbildung von G_i auf $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{A}_i$, die $\mathfrak{G}_i$ als $\chi_g^{(i)}$-G_i-Erweiterung von $\mathfrak{A}_i$ erweist. Dann ist $\varrho_2\,\beta\,\varrho_1^{-1}$ eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{A}_2$ und diese soll von der gesuchten Abbildung γ in $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{A}_1$ induziert werden.

A. Es gebe eine Abbildung γ, die in $\mathfrak{A}_1$ mit α und in $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{A}_1$ mit $\varrho_2\,\beta\,\varrho_1^{-1}$, d. h. in G_1 mit β übereinstimmt.

Da $\mathfrak{G}_i$ eine $\chi_g^{(i)}$-G_i-Erweiterung von $\mathfrak{A}_i$ ist, so ist

$$\chi_g^{(i)}(\mathfrak{x}) = \varrho_i(g)\,\mathfrak{x}\,\varrho_i(g)^{-1}.$$

Es wird also für $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{A}_1$:

$$\begin{aligned}\alpha[\chi_g^{(1)}(\mathfrak{x})] &= \gamma[\chi_g^{(1)}(\mathfrak{x})] = \gamma[\varrho_1(g)\,\mathfrak{x}\,\varrho_1(g)^{-1}] = \gamma[\varrho_1(g)]\,\gamma(\mathfrak{x})\,\gamma[\varrho_1(g)]^{-1}\\ &= \varrho_2\beta\,\varrho_1^{-1}\,\varrho_1(g)\,\alpha(\mathfrak{x})\,[\varrho_2\beta\,\varrho_1^{-1}\,\varrho_1(g)]^{-1}\\ &= \chi^{(2)}_{\beta(g)}[\alpha(\mathfrak{x})],\end{aligned}$$

woraus 1. folgt.

Es sei $\mathfrak{w}_i(a)$ die zu $\mathfrak{a}_i(r)$ gehörige multiplikative Wortfunktion. Dann ist $\gamma[\mathfrak{w}_1(e_\nu)] = \mathfrak{b}_\nu\,\mathfrak{w}_2[\beta(e_\nu)]$ mit $\mathfrak{b}_\nu$ aus $\mathfrak{A}_2$, da ja $\gamma[\mathfrak{w}_1(a)]$ und $\mathfrak{w}_2[\beta(a)]$ stets in derselben Restklasse von $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{A}_2$ liegen müssen. Ist dann $\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i} = 1$, so wird

$$\begin{aligned}\alpha\Big[\mathfrak{a}_1\Big(\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}\Big)\Big] &= \prod_{i=1}^{n}\gamma[\mathfrak{w}_1(e_{\nu_i})] = \prod_{i=1}^{n}\mathfrak{b}_{\nu_i}\,\mathfrak{w}_2[\beta(e_{\nu_i})]\\ &= \prod_{i=1}^{n}\chi^{(2)}_{\prod_{k=1}^{i-1}\beta(e_{\nu_k})}(\mathfrak{b}_{\nu_i})\cdot\mathfrak{a}_2\Big[\prod_{i=1}^{n}\beta(e_{\nu_i})\Big],\end{aligned}$$

wie behauptet.

B. Sei umgekehrt 1. und 2. erfüllt und wieder $\mathfrak{w}_i(a)$ die zu $\mathfrak{a}_i(r)$ gehörige multiplikative Wortfunktion. Dann setzen wir

$$\gamma\Big[\mathfrak{a}\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{w}_1(e_{\nu_i})\Big] = \alpha(\mathfrak{a})\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{b}_{\nu_i}\,\mathfrak{w}_2[\beta(e_{\nu_i})]$$

und behaupten, daß γ der gesuchte Isomorphismus ist.

Zunächst sieht man sofort, daß γ jedem Element aus $\mathfrak{G}_1$ Elemente aus $\mathfrak{G}_2$ zuordnet, und daß umgekehrt jedes Element aus $\mathfrak{G}_2$ Elementen aus $\mathfrak{G}_1$ zugeordnet ist.

In $\mathfrak{G}_2$ führen wir eine neue multiplikative Wortfunktion ein, indem wir

$$\mathfrak{v}_2\Big[\prod_{i=1}^{n}\beta(e_{\nu_i})\Big] = \prod_{i=1}^{n}\mathfrak{b}_{\nu_i}\,\mathfrak{w}_2[\beta(e_{\nu_i})]$$

setzen. Dann wird die zugehörige Relationsfunktion

$$\mathfrak{b}_2\Big[\prod_{i=1}^{n}\beta(e_{\nu_i})\Big] = \prod_{i=1}^{n}\chi^{(2)}_{\prod_{k=1}^{i-1}\beta(e_{\nu_k})}(\mathfrak{b}_{\nu_i})\cdot\mathfrak{a}_2\Big[\prod_{i=1}^{n}\beta(e_{\nu_i})\Big],$$

also wegen Bedingung 2

$$= \alpha\Big[\mathfrak{a}_1\Big(\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}\Big)\Big],$$

falls nur $\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i} = 1$ ist. Weiter wird

$$\gamma[\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}_1(a)] = \alpha(\mathfrak{a})\,\mathfrak{v}_2[\beta(a)],$$

wo $\beta(a) \equiv \prod_{i=1}^{n}\beta(e_{\nu_i})$, falls $a \equiv \prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}$ ist.

Ist $\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}_1(a) = \mathfrak{b}\,\mathfrak{w}_1(b)$, so wird:

$$\gamma[\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}_1(a)] = \alpha(\mathfrak{a})\,\mathfrak{v}_2[\beta(a)] = \alpha\{\mathfrak{b}\,\chi_a^{(1)}[\mathfrak{a}_1(a^{-1}b)]\,\mathfrak{a}_1^{-1}(a\,a^{-1})\}\,\mathfrak{v}_2[\beta(a)]$$

wegen (G), S. 386,

$$= \alpha(\mathfrak{b})\,\chi_{\beta(a)}^{(2)}\{\alpha[\mathfrak{a}_1(a^{-1}b)]\}\,\alpha[\mathfrak{a}_1^{-1}(a\,a^{-1})]\,\mathfrak{v}_2[\beta(a)]$$

wegen Bedingung 1,

$$= \alpha(\mathfrak{b})\,\chi_{\beta(a)}^{(2)}\{\mathfrak{b}_2[\beta(a^{-1})\,\beta(b)]\}\,\mathfrak{b}_2^{-1}[\beta(a)\,\beta(a^{-1})]\,\mathfrak{v}_2[\beta(a)]$$

wegen der eben aus Bedingung 2 gezogenen Folgerung,

$$= \alpha(\mathfrak{b})\,\mathfrak{v}_2[\beta(b)]$$

wegen (G),

$$= \gamma[\mathfrak{b}\,\mathfrak{w}_1(b)],$$

womit die Eindeutigkeit von γ gezeigt ist. Entsprechend sieht man ein, daß γ umkehrbar eindeutig ist.

Schließlich ist:

$$\gamma[\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}_1(a)]\,\gamma[\mathfrak{b}\,\mathfrak{w}_1(b)] = \alpha(\mathfrak{a})\,\mathfrak{v}_2[\beta(a)]\,\alpha(\mathfrak{b})\,\mathfrak{v}_2[\beta(b)]$$

$$= \alpha(\mathfrak{a})\,\chi_{\beta(a)}^{(2)}[\alpha(\mathfrak{b})]\,\mathfrak{v}_2[\beta(a)\,\beta(b)] = \alpha[\mathfrak{a}\,\chi_a^{(1)}(\mathfrak{b})]\,\mathfrak{v}_2[\beta(a)\,\beta(b)]$$

wegen Bedingung 1,

$$= \gamma[\mathfrak{a}\,\chi_a^{(1)}(\mathfrak{b})\,\mathfrak{w}_1(a\,b)] = \gamma[\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}_1(a)\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{w}_1(b)],$$

d. h. γ ist ein Isomorphismus.

Daß schließlich γ die Isomorphismen α und β umfaßt, folgt sofort aus der Definition von γ.

Setzt man in Satz 2 speziell

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G},\ \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A},\ G_1 = G_2 = G,\ \chi^{(1)} = \chi^{(2)} = \chi,$$

so werden α, β, γ Automorphismen und es ergibt sich die

Folgerung 1: *Dann und nur dann gibt es einen α und β umfassenden Automorphismus γ von $\mathfrak{G}$, wenn*

1. $\alpha\,\chi_g\,\alpha^{-1} = \chi_{\beta(g)}$ *und es*
2. *möglich ist, den Erzeugenden e_ν von G eindeutig Elemente $\mathfrak{b}_\nu$ aus $\mathfrak{A}$ so zuzuordnen, daß aus* $\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i} = 1$ *stets*

$$\alpha\left[\mathfrak{a}_1\left(\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}\right)\right] = \prod_{i=1}^{n} \chi_{\prod_{k=1}^{i-1}\beta(e_{\nu_k})}(\mathfrak{b}_{\nu_i})\,\mathfrak{a}_2\left[\prod_{i=1}^{n}\beta(e_{\nu_i})\right]$$

folgt.

Spezialisiert man dahin, daß

$$\alpha = \beta = 1,\ \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A},\ G_1 = G_2 = G,\ \chi^{(1)} = \chi^{(2)} = \chi$$

ist, fragt man also, wann $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zum gleichen Typ von χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ gehören, so ergibt der Satz 2 die

Folgerung 2: *Ist die χ_g-G-Erweiterung $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{A}$ durch die Relationsfunktion $\mathfrak{a}_i(r)$ charakterisiert, so gehören $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ dann und nur dann zum gleichen Typus, wenn es möglich ist, den Erzeugenden e_ν von G eindeutig Elemente $\mathfrak{b}_\nu$ aus $\mathfrak{A}$ so zuzuordnen, daß aus $\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i} = 1$ stets*

$$\mathfrak{a}_1\left(\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{\prod_{k=1}^{i-1} e_{\nu_k}}(\mathfrak{b}_{\nu_i}) \cdot \mathfrak{a}_2\left(\prod_{i=1}^{n} e_{\nu_i}\right)$$

folgt.

Charakterisiert man die χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ durch die Faktorensysteme, wie beim Zusatz zu Satz 1 geschehen, so kann man Analoga zu den Folgerungen 1 und 2 aufstellen. Wir wollen nur das Analogon zu der Folgerung 2 angeben, das man ohne weiteres aus dieser Folgerung herleiten kann.

Zusatz: *Ist die χ_g-G-Erweiterung $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{A}$ durch das Faktorensystem $(a, b)_i$ charakterisiert, so gehören $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ dann und nur dann zum gleichen Typus, wenn es möglich ist, den Elementen g von G eindeutig Elemente $\mathfrak{b}(g)$ aus $\mathfrak{A}$ so zuzuordnen, daß*

$$\mathfrak{b}(a\,b)\,(a, b)_2 = \mathfrak{b}(a)\,\chi_a[\mathfrak{b}(b)]\,(a, b)_1$$

erfüllt ist[13]).

§ 3.

Die Gruppe der Erweiterungen.

Es sei χ_g ein Charakter der Gruppe G in der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$. Wir wollen in diesem Paragraphen die Gesamtheit der möglichen Typen von χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ betrachten. Hierbei genügt es nicht, sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ dem Typus nach gegeben zu denken, da Isomorphismen von G und $\mathfrak{A}$ zu anderen Typen von χ_g-G-Erweiterungen führen können, wie Satz 2 des § 2 zeigt.

Wir wollen in der Gesamtheit $\mathsf{T} \equiv \mathsf{T}(\chi_g - G - \mathfrak{A})$ der Typen von χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ eine Multiplikation erklären; da jeder Typus durch jedes seiner Individuen bestimmt ist, so wird man diese Multiplikation zunächst für die Erweiterungen selbst erklären.

Definition: *Es seien $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zwei χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ und ϱ_i für $i = 1, 2$ die zugehörige isomorphe Abbildung von G auf $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{A}$.*

---

[13]) Man pflegt derartige Paare von Faktorensystemen als assoziiert zu bezeichnen. Vgl. R. Brauer, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 677—696.

Dann ist das Produkt $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ *die Gesamtheit der Paare* $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, *die* $\mathfrak{g}_i$ *aus* $\mathfrak{G}_i$ *und* $\varrho_1^{-1}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_1) = \varrho_2^{-1}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}_2)$ *erfüllen, mit der Gleichheitsdefinition:*

a) $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_1 \times \mathfrak{h}_2$ *dann und nur dann, wenn* $\mathfrak{h}_1 \mathfrak{g}_1^{-1} = \mathfrak{g}_2 \mathfrak{h}_2^{-1}$ *ist,*

b) $\mathfrak{a} \times 1 = 1 \times \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ *für* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{A}$

und der Multiplikationsregel:

$$(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{h}_1) \circ (\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{h}_2) = (\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2) \times (\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2)\,^{14}).$$

Satz 1: T *ist eine kommutative Gruppe. Die Zuordnungen:*

Relationsfunktion $\mathfrak{a}(r) \to$ *durch* $\mathfrak{a}(r)$ *charakterisierter Erweiterungstyp bzw.*

Faktorensystem $(a, b) \to$ *durch* (a, b) *charakterisierter Erweiterungstyp*

liefern eine homomorphe Abbildung der multiplikativen Gruppe aller Relationsfunktionen[14a]) *bzw. der multiplikativen Gruppe aller Faktorensysteme auf* T.

Der Beweis beruht wesentlich auf dem folgenden

Hilfssatz: *Ist* $\mathfrak{G}_i$ *für* $i = 1, 2$ *eine* χ_g*-G-Erweiterung von* $\mathfrak{A}$, *die durch die Relationsfunktion* $\mathfrak{a}_i(r)$ *bzw. das Faktorensystem* $(a, b)_i$ *charakterisiert ist, so ist* $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ *eine* χ_g*-G-Erweiterung von* $\mathfrak{A}$, *die durch* $\mathfrak{a}_1(r)\,\mathfrak{a}_2(r)$ *bzw.* $(a, b)_1\,(a, b)_2$ *charakterisierbar ist.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{w}_i(a)$ die zu $\mathfrak{a}_i(r)$ gehörige multiplikative Wortfunktion. Dann läßt sich jedes Element aus $\mathfrak{G}_i$ auf die Form $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{w}_i(a)$ mit $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ bringen. Also kann man jedes Element aus $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ auf die Form

$$\mathfrak{b}_1 \mathfrak{w}_1(a) \times \mathfrak{b}_2 \mathfrak{w}_2(a)$$

mit $\mathfrak{b}_i$ aus $\mathfrak{A}$ bringen. Dies ist nach der Gleichheitsdefinition *a)* gleich

$$\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{w}_1(a) \times \mathfrak{w}_2(a),$$

und nach der Multiplikationsregel und Gleichheitsdefinition *b)* wird dies gleich

$$\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1 \circ [\mathfrak{w}_1(a) \times \mathfrak{w}_2(a)].$$

Mithin ist die $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ charakterisierende Wortfunktion

$$\mathfrak{w}_1(a) \times \mathfrak{w}_2(a) \equiv \mathfrak{w}(a)$$

und es gilt:

---

[14]) Es liegt hier eine Verallgemeinerung der Begriffe: Gruppenpaarung [vgl. etwa W. Threlfall und H. Seifert, Math. Annalen **104** (1930), S. 15], meromorphes Produkt [Remak, Journ. f. reine u. angew. Math. **163** (1930), S. 6] auf nicht teilerfremde Gruppen vor [vgl. auch J. Schur, ebenda **139** (1911), S. 207]. Ähnlich ist auch das direkte Produkt hyperkomplexer Systeme [vgl. R. Brauer, a. a. O. Anm. [4])], jedoch müssen dort Klassen nicht-isomorpher Systeme (die nur dasselbe Zentrum haben) gebildet werden.

[14a]) Für dasselbe feste Erzeugendensystem von G.

Jedes Element aus $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ hat die Form $\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}(a)$; dann und nur dann ist $\mathfrak{a}\,\mathfrak{w}(a) = \mathfrak{b}\,\mathfrak{w}(b)$, wenn $a = b$ und

$$\mathfrak{b}\,\mathfrak{w}_1(b)\,\mathfrak{w}_1(a)^{-1}\,\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{w}_2(a)\,\mathfrak{w}_2(b)^{-1}$$

gilt, d. h. wenn

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{b}\,\mathfrak{w}_1(a^{-1})^{-1}\,\mathfrak{w}_1(a^{-1})\,\mathfrak{w}_1(b)\,\mathfrak{w}_1(a)^{-1}\,\mathfrak{a}^{-1} = \\
&\quad = \mathfrak{b}\,\mathfrak{w}_1(a^{-1})^{-1}\,\mathfrak{w}_1(a)^{-1}\,\mathfrak{w}_1(a)\,\mathfrak{a}_1(a^{-1}b)\,\mathfrak{w}_1(a)^{-1}\,\mathfrak{a}^{-1} \\
&\quad = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_1(a\,a^{-1})^{-1}\,\chi_a[\mathfrak{a}_1(a^{-1}b)]\,\mathfrak{a}^{-1} \\
&\quad = \mathfrak{w}_2(a)\,\mathfrak{w}_2(a^{-1})\,\mathfrak{w}_2(a^{-1})^{-1}\,\mathfrak{w}_2(b)^{-1}\,\mathfrak{w}_2(a^{-1})^{-1}\,\mathfrak{w}_2(a^{-1}) \\
&\quad = \mathfrak{a}_2(a\,a^{-1})\,\chi_a[\mathfrak{a}_2(a^{-1}b)]^{-1},
\end{aligned}$$

d. h. wenn

$$\mathfrak{b}\,\chi_a[\mathfrak{a}_1(a^{-1}b)\,\mathfrak{a}_2(a^{-1}b)] = \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1(a\,a^{-1})\,\mathfrak{a}_2(a\,a^{-1})$$

gilt. Da aber $\mathfrak{a}_1(r)\,\mathfrak{a}_2(r)$ die zu $\mathfrak{w}_1(a) \times \mathfrak{w}_2(a)$ gehörige Relationsfunktion ist, so ist (G) des § 2, S. 386 in $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ erfüllt. Analog rechnet man das Erfülltsein von (M) des § 2, S. 386 in $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ nach, so daß zum Beweise unseres Hilfssatzes nur noch nötig ist, nachzuweisen, daß $\mathfrak{a}_1(r)\,\mathfrak{a}_2(r)$ die Bedingung (1) von Satz 1, § 2 erfüllt. Dies folgt aber sofort daraus, daß $\mathfrak{a}_1(r)$ und $\mathfrak{a}_2(r)$ diese Bedingung erfüllen. Ähnlich verifiziert man die entsprechende Aussage für die Faktorensysteme.

Beweis des Satzes: Hierfür genügt es im wesentlichen, nachdem der Hilfssatz bewiesen ist, zu zeigen, daß

1. die Relationsfunktionen und entsprechend die Faktorensysteme eine kommutative Gruppe bilden, und daß

2. die Klasseneinteilung, die sich ergibt, wenn man gleichtypige Erweiterungen charakterisierende Relationsfunktionen bzw. Faktorensysteme in eine Klasse tut, eine Restklassenbildung nach einer Untergruppe ist.

Die Bemerkung 1 folgt im wesentlichen daraus, daß mit $\mathfrak{a}_1(r)$ und $\mathfrak{a}_2(r)$ auch $\mathfrak{a}_1(r)\,\mathfrak{a}_2(r)^{-1}$ eine multiplikative Relationsfunktion ist, die Bedingung (1) des Satzes 1, § 2 erfüllt.

Bemerkung 2 folgt aus Folgerung 2 aus Satz 2, § 2 bzw. dem Zusatz dazu, indem man bedenkt:

Dann und nur dann charakterisieren $\mathfrak{a}_1(r)$ und $\mathfrak{a}_2(r)$ denselben Erweiterungstypus, wenn $\mathfrak{a}_2(r)\,\mathfrak{a}_1(r)^{-1}$ denselben Typus wie $\mathfrak{a}(r) \equiv 1$, d. h. den Einheitstypus, charakterisiert.

Aus der Schlußbemerkung, angewandt auf die Faktorensysteme, folgt noch der

Zusatz: *Eine χ_σ-G-Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ gehört dann und nur dann zum Einheitstypus* [*Gruppeneins in* $\mathfrak{T}$], *wenn es ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ mit Gruppeneigenschaft gibt.*

Daraus folgt insbesondere, daß $\mathfrak{G}$ isomorph dem *direkten Produkt* $\mathfrak{A} \times G$ ist, wenn χ der Hauptcharakter und $\mathfrak{G}$ eine χ-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ vom Einheitstyp ist.

Es sei noch bemerkt, daß dieser Satz insbesondere auch zeigt, daß es stets χ_g-G-Erweiterungen der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$ gibt, z. B. den Einheitstypus.

Weiter folgert man aus Satz 1, *daß* T *stets allein aus der Gruppeneins besteht, wenn* G *eine freie Gruppe ist.* Wählt man nämlich als Erzeugende von G ein System freier Erzeugender nebst ihren Inversen, so gibt es an Relationen nur solche der Form $a\,a^{-1} = 1$, woraus folgt, daß es an normierten Relationsfunktionen [und auf solche kann man sich stets beschränken] nur $\mathfrak{a}(r) \equiv 1$ gibt.

Einfachste Beispiele zeigen, daß T im allgemeinen nicht nur aus der Identität besteht; vgl. hierzu § 4.

Hat $\mathfrak{A}$ insbesondere die Eigenschaft, daß es eine Zahl A gibt, welche Vielfaches der Ordnung eines jeden Elementes aus $\mathfrak{A}$ ist, so gilt $\tau^A = 1$ für jeden Typus τ aus T.

Denn dann ist $\mathfrak{a}(r)^A = 1$.

Es soll noch untersucht werden, was aus T wird, wenn man $\mathfrak{A}$ durch $\alpha(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^*$ und G durch $\beta(G) = G^*$ ersetzt, wo α und β isomorphe Abbildungen sind. Satz 2 des § 2 zeigt, daß als Charakter von G^* in $\mathfrak{A}^*$ nur $\chi_g^* = \alpha\,\chi_{\beta^{-1}(g)}\,\alpha^{-1}$ in Frage kommt. Dann gilt der

Satz 2: *Ordnet man den Elementen von* T $(\chi_g - G - \mathfrak{A})$ *die Elemente von* T $(\chi_g^* - G^* - \mathfrak{A}^*) \equiv \mathsf{T}^*$ *zu, die durch* α *und* β *umfassende isomorphe Abbildungen aufeinander beziehbar sind* [*gemäß Satz* 2, § 2], *so erhält man eine isomorphe Abbildung von* T *auf* T^*.

Beweis: Es sei G durch ein Erzeugendensystem $\{e_\nu\}$ und G^* entsprechend durch $\{\beta(e_\nu)\}$ dargestellt. Dann werden die Elemente aus T durch Relationsfunktionen $\mathfrak{a}(r)$ in $\mathfrak{A}$, die aus T^* durch Relationsfunktionen $\mathfrak{a}^*(r)$ in $\mathfrak{A}^*$ charakterisiert. Zwischen diesen besteht folgender Zusammenhang:

Ist $\mathfrak{a}(r)$ *eine* χ_g-G-*Relationsfunktion in* $\mathfrak{A}$ [d. h. eine solche, die χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ charakterisiert], *so ist* $\mathfrak{a}^*(r) \equiv \alpha[\mathfrak{a}(\beta^{-1}(r))]$ *eine* χ_g^*-G^*-*Relationsfunktion in* $\mathfrak{A}^*$. Da nämlich α und β isomorphe Abbildungen sind, so erfüllt mit $\mathfrak{a}(r)$ auch $\mathfrak{a}^*(r)$ die Bedingung (1), Satz 1, § 2, und das gleiche gilt für die Multiplikativität.

Jetzt folgt sofort aus Satz 2 des § 2, daß jedem Element aus T wenigstens ein Element aus T^* zugeordnet ist. Sind einem Element aus T zwei Elemente aus T^* zugeordnet, so läßt sich hieraus zwischen

diesen beiden Elementen aus T^* eine isomorphe Beziehung herleiten, die $\mathfrak{A}^*$ und G^* elementweise in Ruhe läßt. Diese beiden Elemente aus T^* sind also identisch.

Da sich dieselbe Betrachtung auch in Richtung von T^* auf T durchführen läßt, so ist damit die Eineindeutigkeit unserer Abbildung von T auf T^* erwiesen.

Die Isomorphie dieser Abbildung folgt nach dem Hilfssatz § 3, S. 395 aus

$$\begin{aligned}\alpha\,[\mathfrak{a}_1(\beta^{-1}(r))\,\mathfrak{a}_2(\beta^{-1}(r))] &= \alpha\,[\mathfrak{a}_1(\beta^{-1}(r))]\,\alpha\,[\mathfrak{a}_2(\beta^{-1}(r))]\\ &= \mathfrak{a}_1^*(r)\,\mathfrak{a}_2^*(r).\end{aligned}$$

Setzen wir speziell $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$, $G = G^*$, so ergibt die Folgerung 1 aus Satz 2, § 2 zusammen mit Satz 2, § 3 den

Zusatz: *Dann und nur dann induzieren die Automorphismen α von $\mathfrak{A}$, β von G in der in Satz 2 angegebenen Weise einen Automorphismus von* T, *wenn* $\chi_{\beta(g)} = \alpha\chi_g\alpha^{-1}$ *ist.*

Es seien noch die folgenden Bemerkungen angeschlossen:

1. Die Paare erweiterbarer Automorphismen α, β bilden eine Gruppe; diese ist isomorph zur Gruppe der dem Zusatz gemäß induzierten Automorphismen von T.

2. Die Vielfachheit der Menge der Eweiterungen von α und β zu isomorphen Abbildungen einer χ_g-G-Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ auf eine $\alpha\chi_{\beta^{-1}(g)}\alpha^{-1}$-$\beta(G)$-Erweiterung $\mathfrak{G}^*$ von $\alpha(\mathfrak{A})$ wird gegeben durch die *Gruppe der χ_g-G-Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$*:

Diese besteht aus allen und nur den Automorphismen von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{A}$ und G elementweise in Ruhe lassen.

3. Hieraus erhellt auch, warum es unzweckmäßig gewesen wäre, zwei χ-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ zum gleichen Typus zu rechnen, wenn sie so isomorph aufeinander bezogen werden können, daß $\mathfrak{A}$ und G je einen Automorphismus erfahren [der nicht notwendig der identische sein muß]; denn dann wären die Elemente aus unserer Typengruppe T identifiziert worden, die durch die gemäß dem Zusatz entstandenen Automorphismen von T ineinander übergeführt werden, und das neue Gebilde wäre im allgemeinen keine Gruppe mehr.

§ 4.

Erweiterung durch zyklische Gruppen.

Es sei Z eine zyklische Gruppe der Ordnung $n > 0$, z ein erzeugendes Element von Z und $\chi_{z^i}(\mathfrak{a})$ ein Charakter von Z in der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$. Dann bilden die Elemente von $\mathfrak{A}$, die bei χ_z invariant

bleiben, kurz die *invarianten Elemente*, eine Untergruppe $\mathfrak{I}$ von $\mathfrak{A}$. Weiter bilden die Elemente der Form $\prod_{i=0}^{n-1} \chi_{z^i}(\mathfrak{a})$, die *Normen* von Elementen aus $\mathfrak{A}$, eine Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{I}$. Man bestätigt sofort, daß die Definition von $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{N}$ von der speziellen Auswahl des erzeugenden Elements z von Z unabhängig ist.

Über die Struktur der Typengruppe T der χ-Z-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ gilt dann der folgende

Satz: T *ist isomorph* $\mathfrak{I}/\mathfrak{N}$.

Beweis: Um den Satz 1 b) des § 2 anwenden zu können, wählen wir als Erzeugende von Z die Elemente z und z^{-1}. Die Relationen haben dann die Form: $z^{l\,n} = 1$, wo l eine beliebige ganze Zahl $\gtrless 0$ ist, da wir nur die normierten Relationsfunktionen betrachten wollen und infolgedessen von Relationen der Form $z^i z^{-i} = 1$ absehen können.

Ist dann $\mathfrak{a}(r)$ irgendeine normierte Relationsfunktion, die χ-Z-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ definiert, so gibt es ein Element $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{a}(z^{l\,n}) = \mathfrak{c}^l$, und durch dieses Element $\mathfrak{c}$ ist $\mathfrak{a}(r)$ und damit auch die χ-Z-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ charakterisiert. Es gilt:

(1) *Dann und nur dann charakterisiert* $\mathfrak{c}$ *aus* $\mathfrak{A}$ *eine* χ-Z-*Erweiterung von* $\mathfrak{A}$, *wenn* $\mathfrak{c}$ *Element aus* $\mathfrak{I}$, *d. h. wenn* $\chi_z(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$ *ist.*

Einerseits muß nämlich wegen Bedingung (2) von Satz 1 b), § 2 gelten: $\mathfrak{a}(z\,z^n\,z^{-1}) = \chi_z[\mathfrak{a}(z^n)]$, was wegen $\mathfrak{a}(z\,z^n\,z^{-1}) = \mathfrak{a}(z^n)\,\mathfrak{a}(z\,z^{-1}) = \mathfrak{a}(z^n)$ unsere Bedingung nach sich zieht. — Ist umgekehrt unsere Bedingung erfüllt, so folgert man hieraus entsprechend, daß Bedingung (2) des Satzes 1 b), § 2 erfüllt ist.

(2) *Dann und nur dann charakterisieren die Elemente* $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{c}$ *aus* $\mathfrak{I}$ *dieselbe* χ-Z-*Erweiterung von* $\mathfrak{A}$, *wenn es ein Element* $\mathfrak{d}$ *in* $\mathfrak{A}$ *gibt, so daß* $\mathfrak{b} = \prod_{i=0}^{n-1} \chi_{z^i}(\mathfrak{d}) \cdot \mathfrak{c}$ *gilt, d. h. wenn* $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^{-1}$ *in* $\mathfrak{N}$ *liegt.*

Dies folgert man sofort aus Folgerung 2 aus Satz 2, § 2.

Ordnet man jetzt einem Element τ aus T die Restklasse von $\mathfrak{I}/\mathfrak{N}$ zu, in der die τ charakterisierenden invarianten Elemente liegen, so ergibt (1) und (2) zusammen mit dem Hilfssatz S. 395 unseren Satz.

Zusatz 1: *Die Ordnung eines jeden Elementes aus* T *ist ein Teiler von* n.

Ist nämlich der Typus τ aus T durch das invariante Element $\mathfrak{c}$ charakterisierbar, so τ^n durch $\mathfrak{c}^n$. Da aber $\mathfrak{c}$ invariant ist, so ist $\prod_{i=0}^{n-1} \chi_{z^i}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}^n$, d. h. $\mathfrak{c}^n$ ist Norm, d. h. τ^n vom Einheitstypus, d. h. $\tau^n = 1$, womit der Zusatz 1 bewiesen.

Zusatz 2: *Die Gruppe einer jeden χ-Z-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist isomorph der Untergruppe*[14b]) *der Elemente der Norm* 1 *aus* $\mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{c}$ ein invariantes Element, das eine χ-Z-Erweiterung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{A}$ charakterisiert, so gibt es in der z entsprechenden Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ein Element $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{z}^n = \mathfrak{c}$. Die $\mathfrak{A}$ und Z elementweise invariant lassenden Automorphismen von $\mathfrak{A}$ sind dann durch das Bild von $\mathfrak{z}$ charakterisierbar. Geht bei einem solchen Automorphismus $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{z}'$ über, so ist $\mathfrak{z}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{z}'^n = \mathfrak{c}$, d. h. $\prod_{i=0}^{n-1} \chi_{z^i}(\mathfrak{a}) = 1$, und umgekehrt kann $\mathfrak{z}$ durch derartige Automorphismen auf jedes $\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}$ abgebildet werden, wo $\mathfrak{a}$ die Norm 1 hat, womit Zusatz 2 bewiesen ist, wenn man noch bedenkt, daß verschiedenen $\mathfrak{z}'$, also verschiedenen $\mathfrak{a}$ verschiedene Automorphismen entsprechen.

Es sei noch die folgende Bemerkung angeschlossen:

Eine zyklische Erweiterung $\mathfrak{G}$ einer kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann kommutativ, wenn sie den Hauptcharakter von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ induziert.

Ist nämlich $\mathfrak{G}$ kommutativ, so ist jedes Element von $\mathfrak{G}$ mit jedem von $\mathfrak{A}$ vertauschbar; $\mathfrak{G}$ induziert den Hauptcharakter. — Induziert umgekehrt $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{A}$ den Hauptcharakter, so sei $\mathfrak{z}$ ein Element aus einer erzeugenden Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$. Dann läßt sich jedes Element von $\mathfrak{G}$ auf die Form $\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}^i$ mit $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ bringen, und es wird $\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}^i \cdot \mathfrak{b}\,\mathfrak{z}^k = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{z}^{i+k} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{z}^k\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{z}^i$, d. h. $\mathfrak{G}$ ist kommutativ.

Aus (1) und (2) folgt dann sofort:

Versteht man unter $\mathfrak{A}_n$ die Gruppe der n-ten Potenzen von Elementen aus $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_n$ isomorph der Gruppe der Typen von Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ mit Zyklen der Ordnung n, die in $\mathfrak{A}$ den Hauptcharakter induzieren.

Die obige Bemerkung ist besonders dadurch von Interesse, daß aus ihr folgt:

Es kann keine Gruppen geben, deren Faktorgruppe nach dem Zentrum zyklisch ist[15]).

§ 5.

Erweiterungen durch direkte Produkte.

Es sei $G = F_1 \times \ldots \times F_n$ direktes Produkt der Faktoren $F_1, \ldots, F_n$ und $\chi_g^{(i)}(\mathfrak{a})$ für $i = 1, \ldots, n$ ein Charakter von F_i in der Gruppe $\mathfrak{A}$. Dann und nur dann gibt es einen mit $\chi^{(i)}$ in F_i übereinstimmenden Charakter von G in $\mathfrak{A}$, wenn für $i \neq k$ stets $\chi_g^{(i)} \chi_h^{(k)} = \chi_h^{(k)} \chi_g^{(i)}$ gilt.

14b) Man bemerke, daß $\mathfrak{N}$ isomorph der Faktorgruppe von $\mathfrak{A}$ nach dieser Gruppe ist.

15) Vgl. N. Tschebotarëv, Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers, Journ. f. d. r. u. a. Math. **161** (1929), S. 191, Satz 14. — Siehe auch hier den Satz des § 6.

Gibt es nämlich einen gesuchten Charakter χ von G in $\mathfrak{A}$, so gilt für g aus F_i, h aus F_k, $i \neq k$:

$$\chi_g^{(i)} \chi_h^{(k)} = \chi_g \chi_h = \chi_{gh} = \chi_{hg} = \chi_h \chi_g = \chi_h^{(k)} \chi_g^{(i)}.$$

Ist umgekehrt die Bedingung erfüllt und g irgendein Element aus G, so ist $g = f_1 \cdots f_n$, wo f_i aus F_i durch g eindeutig bestimmt ist, und wir setzen:

$$\chi_g = \chi_{f_1}^{(1)} \cdots \chi_{f_n}^{(n)}.$$

Dann wird

$$\chi_{\prod_{i=1}^{n} f_i} \chi_{\prod_{i=1}^{n} g_i} = \prod_{i=1}^{n} \chi_{f_i}^{(i)} \prod_{i=1}^{n} \chi_{g_i}^{(i)} = \prod_{i=1}^{n} \chi_{f_i}^{(i)} \chi_{g_i}^{(i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \chi_{f_i g_i}^{(i)} = \chi_{\prod_{i=1}^{n} f_i g_i} = \chi_{\prod_{i=1}^{n} f_i \prod_{i=1}^{n} g_i}$$

und entsprechend verifiziert man, daß $\chi_{g^{-1}} = \chi_g^{-1}$ ist.

Sei jetzt F_i durch die Erzeugenden $e_{i\nu}$ und die zwischen ihnen bestehenden Relationen in der zu Beginn des § 2 auseinandergesetzten Weise gegeben.

Die Gesamtheit der $e_{i\nu}$ für $i = 1, \ldots, n$ bildet dann ein Erzeugendensystem von G, und es läßt sich jedes Element aus G auf mannigfaltige Art auf die Form

$$a = \prod_{i=1}^{\alpha} \prod_{k=1}^{n} e_{k\alpha(k,i)}$$

bringen, wobei wir von der Festsetzung $e_{k0} \equiv 1$ Gebrauch machen. Weiter setzen wir:

$$a_{ki} \equiv \prod_{j=1}^{i} e_{k\alpha(k,j)},$$

und es wird $a = \prod_{k=1}^{n} a_{k\alpha}$. Also gilt:

Dann und nur dann ist $a = 1$, wenn $a_{1\alpha} = \ldots = a_{n\alpha} = 1$ ist.

Es sei jetzt $\chi_g(\mathfrak{a})$ ein Charakter von G in der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$. Ist dann G irgendeine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$, so ist die F_i entsprechende Untergruppe $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{G}$ [das ist die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{G}$, die in Elementen aus F_i entsprechenden Restklassen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ vorkommen] eine χ_g-F_i-Erweiterung von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{a}(r)$ eine normierte Relationsfunktion, die $\mathfrak{G}$ charakterisiert, so ist $\mathfrak{a}(r_i) \equiv \mathfrak{a}_i(r_i)$, wo $r_i = 1$ eine Relation zwischen den Erzeugenden von F_i allein ist, eine normierte Relationsfunktion, die die χ_g-F_i-Erweiterung $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{A}$ charakterisiert. Ist weiter $i \neq k$, so ist

$$\mathfrak{e}_{i\nu}\, \mathfrak{e}_{k\mu} = \mathfrak{a}(e_{i\nu} e_{k\mu} e_{i\nu}^{-1} e_{k\mu}^{-1})\, \mathfrak{e}_{k\mu}\, \mathfrak{e}_{i\nu},$$

wenn wir unter $\mathfrak{e}_{iv}$ ein solches Element aus der e_{iv} entsprechenden Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ verstehen, daß

$$\mathfrak{w}\left(\prod_{i=1}^{\alpha}\prod_{k=1}^{n} e_{k\alpha(k,i)}\right) = \prod_{i=1}^{\alpha}\prod_{k=1}^{n} \mathfrak{e}_{k\alpha(k,i)}$$

die zu $\mathfrak{a}(r)$ gehörige Wortfunktion ist. Wir nennen deshalb $\mathfrak{a}(e_{iv}\, e_{k\mu}\, e_{iv}^{-1}\, e_{k\mu}^{-1})$ den *Kommutator* $[e_{iv}, e_{k\mu}]$, und es wird dann, falls $\prod_{i=1}^{\alpha}\prod_{k=1}^{n} e_{k\alpha(k,i)} = 1$ ist

$$(1)\qquad \mathfrak{a}\left(\prod_{i=1}^{\alpha}\prod_{k=1}^{n} e_{k\alpha(k,i)}\right) =$$

$$= \prod_{i=2}^{\alpha}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k+1}^{n}\prod_{j=1}^{i-1} \chi_{\prod_{h=1}^{k-1} a_{hi}\prod_{h=k}^{l-1} a_{hi-1}\, a_{lj-1}}\{[e_{l\alpha(l,j)}, e_{k\alpha(k,i)}]\} \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathfrak{a}_k(a_{k\alpha}),$$

aus welcher Identität insbesondere folgt, daß $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{a}_k(r_k)$ und die Kommutatoren $[e_{iv}, e_{k\mu}]$ für $i \neq k$ im wesentlichen eindeutig bestimmt ist. Es fragt sich, welchen Bedingungen die normierten Relationsfunktionen der χ_g-F_i-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ und die Kommutatoren genügen müssen, um zusammen eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ zu charakterisieren, kurz, wann sie *verträglich* sind.

Satz: *Dann und nur dann sind die χ_g-F_i-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ definierenden normierten Relationsfunktionen $\mathfrak{a}_i(r)$ und die Kommutatoren $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]$ für $r \neq s$ miteinander verträglich, wenn*

1. $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}] = [e_{s\sigma}, e_{r\varrho}]^{-1}$ *und* $[e_{r\varrho}, 1] = [1, e_{r\varrho}] = 1$,
2. $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}] = \chi_{e_{r\varrho}}\{[e_{s\sigma}, e_{r\varrho}^{-1}]\}$ *für* $r \neq s$,
3. $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]\,\chi_{e_{tr}}\{[e_{s\sigma}, e_{r\varrho}]\}\,[e_{s\sigma}, e_{tr}]\,\chi_{e_{r\varrho}}\{[e_{tr}, e_{s\sigma}]\}\,[e_{tr}, e_{r\varrho}]\,\chi_{e_{s\sigma}}\{[e_{r\varrho}, e_{tr}]\} = 1$ *für* $r < s < t$,
4. $\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})\,\chi_{e_{r\varrho}}[\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})^{-1}] = \prod_{i=1}^{\alpha} \chi_{a_{ki-1}}\{[e_{k\alpha(k,i)}, e_{r\varrho}]\}$ *für* $a_{k\alpha} = 1$

und $k \neq r$ gilt.

Beweis: A. Die Notwendigkeit der Bedingung 1. folgt sofort aus der Definition der Kommutatoren. Weiter ist

$$\chi_{e_{r\varrho}}\{[e_{s\sigma}, e_{r\varrho}^{-1}]\} = \mathfrak{e}_{r\varrho}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}\,\mathfrak{e}_{r\varrho}^{-1}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}^{-1}\,\mathfrak{e}_{r\varrho}\,\mathfrak{e}_{r\varrho}^{-1}$$

wegen der Normiertheit,

$$= \mathfrak{e}_{r\varrho}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}\,\mathfrak{e}_{r\varrho}^{-1}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}^{-1} = [e_{r\varrho}, e_{s\sigma}],$$

womit 2. hergeleitet ist. Um 3. herzuleiten, bedenken wir, daß einerseits:

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_{r\varrho}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}\,\mathfrak{e}_{tr} &= [e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]\,\mathfrak{e}_{s\sigma}\,[e_{r\varrho}, e_{tr}]\,\mathfrak{e}_{tr}\,\mathfrak{e}_{r\varrho}\\ &= [e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]\,\chi_{e_{s\sigma}}\{[e_{r\varrho}, e_{tr}]\}\,[e_{s\sigma}, e_{tr}]\;\;\mathfrak{e}_{tr}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}\,\mathfrak{e}_{r\varrho},\end{aligned}$$

und andererseits:

$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_{r\varrho}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}\,\mathfrak{e}_{tr} &= \mathfrak{e}_{r\varrho}\,[e_{s\sigma}, e_{tr}]\,\mathfrak{e}_{tr}\,\mathfrak{e}_{s\sigma} = \chi_{e_{r\varrho}}\{[e_{s\sigma}, e_{tr}]\}\,[e_{r\varrho}, e_{tr}]\,\mathfrak{e}_{tr}\,\mathfrak{e}_{r\varrho}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}\\ &= \chi_{e_{r\varrho}}\{[e_{s\sigma}, e_{tr}]\}\,[e_{r\varrho}, e_{tr}]\,\chi_{e_{tr}}\{[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]\}\,\mathfrak{e}_{tr}\,\mathfrak{e}_{s\sigma}\,\mathfrak{e}_{r\varrho}\end{aligned}$$

ist. Schließlich ist:

$$\chi_{e_{r\varrho}}[\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})] = \mathfrak{a}(e_{r\varrho}\, a_{k\alpha}\, e_{r\varrho}^{-1})$$

wegen Bedingung (2) des Satzes 1, § 2 und

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}(e_{r\varrho}\, a_{k\alpha}\, e_{r\varrho}^{-1}) &= \mathfrak{e}_{r\varrho}\, \mathfrak{e}_{k\alpha(k,1)} \dots \mathfrak{e}_{k\alpha(k,\alpha)}\, \mathfrak{e}_{r\varrho}^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^{\alpha} \chi_{a_{ki-1}}\{[e_{k\alpha(k,i)}, e_{r\varrho}]^{-1}\}\, \mathfrak{e}_{k\alpha(k,1)} \dots \mathfrak{e}_{k\alpha(k,\alpha)}\, \mathfrak{e}_{r\varrho}\, \mathfrak{e}_{r\varrho}^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^{\alpha} \chi_{a_{ki-1}}\{[e_{k\alpha(k,i)}, e_{r\varrho}]^{-1}\}\, \mathfrak{a}_k(a_{k\alpha}),\end{aligned}$$

womit 4. hergeleitet ist.

B. Es seien die Bedingungen 1. bis 4. erfüllt. Wir definieren $\mathfrak{a}(r)$ durch (1), § 5, S. 402 und haben zu zeigen, daß die so definierte Relationsfunktion eindeutig, multiplikativ ist und der Bedingung (2) des Satzes 1, § 2 genügt.

Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Definition. Weiter seien $a = 1$ und $b = 1$ zwei Relationen in G. Dann wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}(a\,b) = &\prod_{i=2}^{\alpha}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k+1}^{n}\prod_{i=1}^{i-1}\chi_{\prod_{h=1}^{k-1} a_{hi}\prod_{h=k}^{l-1} a_{hi-1}\, a_{lj-1}}\{[e_{l\alpha(l,j)}, e_{k\alpha(k,i)}]\} \\ &\cdot \prod_{i=1}^{\beta}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k+1}^{n}\prod_{j=1}^{\alpha}\chi_{\prod_{h=1}^{k-1} b_{hi}\prod_{h=k}^{l-1} b_{hi-1}\, a_{lj-1}}\{[e_{l\alpha(l,j)}, e_{k\beta(k,i)}]\} \\ &\cdot \prod_{i=2}^{\beta}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k+1}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}\chi_{\prod_{h=1}^{k-1} b_{hi}\prod_{h=k}^{l-1} b_{hi-1}\, b_{lj-1}}\{[e_{l\beta(l,j)}, e_{k\beta(k,i)}]\} \\ &\cdot \prod_{k=1}^{n}\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha}\, b_{k\beta}) \\ = &\prod_{i=1}^{\beta}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k+1}^{n}\chi_{\prod_{h=1}^{k-1} b_{hi}\prod_{h=k}^{l-1} b_{hi-1}}\left\{\prod_{j=1}^{\alpha}\chi_{a_{lj-1}}([e_{l\alpha(l,j)}, e_{k\beta(k,i)}])\right\} \\ &\cdot \mathfrak{a}(a)\,\mathfrak{a}(b),\end{aligned}$$

da $\mathfrak{a}_k(r)$ multiplikativ ist. Wegen Bedingung 4. ist der erste Faktor gleich

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{\beta}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k+1}^{n}\chi_{\prod_{h=1}^{k-1} b_{hi}\prod_{h=k}^{l-1} b_{hi-1}}\{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})\,\chi_{e_{k\beta(k,i)}}[\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})^{-1}]\} = \\ &= \prod_{i=1}^{\beta}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k+1}^{n}\chi_{\prod_{h=1}^{k-1} b_{hi}\prod_{h=k}^{l-1} b_{hi-1}}\{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})\}\,\chi_{\prod_{h=1}^{k} b_{hi}\prod_{h=k+1}^{l-1} b_{hi-1}}\{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})^{-1}\} \\ &= \prod_{i=1}^{\beta}\prod_{l=2}^{n}\prod_{k=1}^{l-1}\chi_{\prod_{h=1}^{k-1} b_{hi}\prod_{h=k}^{l-1} b_{hi-1}}\{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})\}\,\chi_{\prod_{h=1}^{k} b_{hi}\prod_{h=k+1}^{l-1} b_{hi-1}}\{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})^{-1}\}\end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{\beta} \prod_{l=2}^{n} \prod_{k=0}^{l-2} \chi \prod_{h=1}^{k} b_{hi} \prod_{h=k+1}^{l-1} b_{hi-1} \{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})\}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{l-1} \chi \prod_{h=1}^{k} b_{hi} \prod_{h=k+1}^{l-1} b_{hi-1} \{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})^{-1}\}$$

$$= \prod_{i=1}^{\beta} \prod_{l=2}^{n} \chi_{l-1} \prod_{h=1} b_{hi-1} \{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})\} \cdot \chi_{l-1} \prod_{h=1} b_{hi} \{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})^{-1}\}$$

$$= \prod_{l=2}^{n} \prod_{i=0}^{\beta-1} \chi_{l-1} \prod_{h=1} b_{hi} \{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})\} \cdot \prod_{i=1}^{\beta} \chi_{l-1} \prod_{h=1} b_{hi} \{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})^{-1}\}$$

$$= \prod_{l=2}^{n} \chi_1 \{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})\} \cdot \chi_{l-1} \prod_{h=1} b_{h\beta} \{\mathfrak{a}_l(a_{l\alpha})^{-1}\} = 1 \text{ wegen } b_{h\beta} = 1,$$

womit die Multiplikativität von $\mathfrak{a}(r)$ nachgewiesen ist.

Den Nachweis, daß $\mathfrak{a}(r)$ die Bedingung (2), Satz 1, § 2 erfüllt, führen wir in mehreren Schritten:

(a) Ist $a_1 a_2 = 1$, so ist $\mathfrak{a}(a_1 a_2) = \mathfrak{a}(a_1 b b^{-1} a_2)$ für beliebiges b.

Es genügt, dies für $b \equiv e_{r\varrho}$ zu zeigen. — Sei etwa

$$a_1 \equiv \prod_{i=1}^{\beta} \prod_{k=1}^{n} e_{k\alpha(k,i)}$$

und

$$a_2 \equiv \prod_{i=\beta+1}^{\alpha} \prod_{k=1}^{n} e_{k\alpha(k,i)}.$$

Dann wird

$$\mathfrak{a}(a_1 e_{r\varrho} e_{r\varrho}^{-1} a_2) = \prod_{i=2}^{\beta} \prod_{k=1}^{n} \prod_{l=k+1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} \chi_{k-1} \prod_{h=1} a_{hi} \prod_{h=k}^{l-1} a_{hi-1} a_{lj-1} \{[e_{l\alpha(l,j)}, e_{k\alpha(k,i)}]\}$$

$$\cdot \prod_{l=r+1}^{n} \prod_{j=1}^{\beta} \chi_{l-1} \prod_{h=1} a_{h\beta} a_{lj-1} \{[e_{l\alpha(l,j)}, e_{r\varrho}]\}$$

$$\cdot \prod_{l=r+1}^{n} \prod_{j=1}^{\beta} \chi_{l-1} \prod_{h=1} a_{h\beta} e_{r\varrho} a_{lj-1} \{[e_{l\alpha(l,j)}, e_{r\varrho}^{-1}]\}$$

$$\cdot \prod_{i=\beta+1}^{\alpha} \prod_{k=1}^{n} \prod_{l=k+1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} \chi_{k-1} \prod_{h=1} a_{hi} \prod_{h=k}^{l-1} a_{hi-1} a_{lj-1} \{[e_{l\alpha(l,j)}, e_{k\alpha(k,i)}]\}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n} \mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})$$

$$= \mathfrak{a}(a_1 a_2),$$

da wegen Bedingung 1. und 2. der zweite und dritte Faktor sich gegenseitig aufheben.

(b) $\mathfrak{a}(b e_{r\varrho} e_{s\sigma} e_{r\varrho}^{-1} e_{s\sigma}^{-1} b^{-1}) = \chi_b \{[e_{r\varrho}, e_{s\sigma})\}$ für $r > s$ und beliebiges b.

Es ist nämlich:

$$\mathfrak{a}\,(b\,e_{r\varrho}\,e_{s\sigma}\,e_{r\varrho}^{-1}\,e_{s\sigma}^{-1}\,b^{-1}) =$$

$$= \prod_{i=2}^{\beta}\prod_{k=1}^{n}\prod_{l=k+1}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}\chi_{k-1\atop\prod_{h=1}} {}^{b_{hi}}{}_{\prod_{h=k}^{l-1}}{}^{b_{hi-1}\,b_{lj-1}}\{[e_{l\beta(l,j)},\,e_{k\beta(k,i)}]\}$$

$$\cdot \prod_{l=r+1}^{n}\prod_{j=1}^{\beta}\chi_{\prod_{h=1}^{l-1} b_{h\beta}\,b_{lj-1}}\{[e_{l\beta(l,j)},\,e_{r\varrho}]\}$$

$$\cdot \prod_{l=s+1}^{r}\prod_{j=1}^{\beta}\chi_{\prod_{h=1}^{l-1} b_{h\beta}\,b_{lj-1}}\{[e_{l\beta(l,j)},\,e_{s\sigma}]\}$$

$$\cdot \chi_{\prod_{h=1}^{r} b_{h\beta}}\{[e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}]\}$$

$$\cdot \prod_{l=r+1}^{n}\prod_{j=1}^{\beta}\chi_{\prod_{h=1}^{l-1} b_{h\beta}\,e_{r\varrho}\,b_{lj-1}}\{[e_{l\beta(l,j)},\,e_{s\sigma}]\}$$

$$\cdot \prod_{l=r+1}^{n}\prod_{j=1}^{\beta}\chi_{\prod_{h=1}^{l-1} b_{h\beta}\,e_{s\sigma}\,b_{lj-1}\,e_{r\varrho}}\{[e_{l\beta(l,j)},\,e_{r\varrho}^{-1}]\}$$

$$\cdot \prod_{l=s+1}^{n}\prod_{j=1}^{\beta}\chi_{\prod_{h=1}^{l-1} b_{h\beta}\,b_{lj-1}\,e_{s\sigma}}\{[e_{l\beta(l,j)},\,e_{s\sigma}^{-1}]\}$$

$$\cdot \prod_{i=\beta}^{1}\prod_{k=n}^{1}\prod_{l=k+1}^{n}\prod_{j=1}^{i-1}\chi_{\prod_{h=1}^{k} b_{hi}\,{}_{\prod_{h=k+1}^{l-1}}{}^{b_{hi-1}\,b_{lj-1}}}\{[e_{l\beta(l,j)},\,e_{k\beta(k,i)}^{-1}]\},$$

da ja (a) angewandt werden kann. Wendet man hierauf noch die Bedingungen 1. und 2. an, so wird dies gleich

$$\chi_{\prod_{h=1}^{r} b_{h\beta}}\left\{[e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}]\prod_{l=r+1}^{n}\prod_{j=1}^{\beta}\chi_{\prod_{h=r+1}^{l-1} b_{h\beta}\,b_{lj-1}}\left[\begin{matrix}[e_{l\beta(l,j)},\,e_{r\varrho}]\,\chi_{e_{s\sigma}}([e_{r\varrho},\,e_{l\beta(l,j)}])\\ [e_{s\sigma},\,e_{l\beta(l,j)}]\,\chi_{e_{r\varrho}}([e_{l\beta(l,j)},\,e_{s\sigma}])\end{matrix}\right]\right\}$$

$$= \chi_{\prod_{h=1}^{r} b_{h\beta}}\left\{[e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}]\prod_{l=r+1}^{n}\prod_{j=1}^{\beta}\chi_{\prod_{h=r+1}^{l-1} b_{h\beta}\,b_{lj-1}}\left[[e_{s\sigma},\,e_{r\varrho}]\,\chi_{e_{l\beta(l,j)}}([e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}])\right]\right\}$$

wegen Bedingung 3.,

$$= \chi_{\prod_{h=1}^{r} b_{h\beta}}\left\{[e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}]\prod_{l=r+1}^{n}\prod_{j=0}^{\beta-1}\chi_{\prod_{h=r+1}^{l-1} b_{h\beta}\,b_{lj}}([e_{s\sigma},\,e_{r\varrho}])\prod_{j=1}^{\beta}\chi_{\prod_{h=r+1}^{l-1} b_{h\beta}\,b_{lj}}([e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}])\right\}$$

$$= \chi_{\prod_{h=1}^{r} b_{h\beta}}\left\{[e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}]\prod_{l=r+1}^{n}\chi_{\prod_{h=r+1}^{l-1} b_{h\beta}}([e_{s\sigma},\,e_{r\varrho}])\,\chi_{\prod_{h=r+1}^{l} b_{h\beta}}([e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}])\right\}$$

$$= \chi_{\prod_{h=1}^{r} b_{h\beta}}\left\{[e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}]\,\chi_1([e_{s\sigma},\,e_{r\varrho}])\,\chi_{\prod_{h=r+1}^{n} b_{h\beta}}([e_{r\varrho},\,e_{r\sigma}])\right\} = \chi_{\prod_{h=1}^{n} b_{h\beta}}\{[e_{r\varrho},\,e_{s\sigma}]\},$$

womit (b) bewiesen ist.

(c) Ist $a_{k\alpha} = 1$ eine Relation aus F_k, so ist: $\chi_{e_{r\varrho}}(\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})) = \mathfrak{a}(e_{r\varrho} a_{k\alpha} e_{r\varrho}^{-1})$.

Für $r = k$ folgt dies daraus, daß $\mathfrak{a}_k$ eine normierte Relationsfunktion ist, die eine χ-F_k-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ definiert, also (2) von Satz 1, § 2 erfüllt. Ist $k < r$, so wird

$$\mathfrak{a}(e_{r\varrho} a_{k\alpha} e_{r\varrho}^{-1}) = \prod_{i=1}^{\alpha} \chi_{a_{k\,i-1}}\{[e_{r\varrho}, e_{k\,\alpha(k,i)}]\} \cdot \mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})$$

$$= \chi_{e_{r\varrho}}[\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})] \text{ wegen Bedingung 4.}$$

Ist aber $k > r$, so wird

$$\mathfrak{a}(e_{r\varrho} a_{k\alpha} e_{r\varrho}^{-1}) = \prod_{i=1}^{\alpha} \chi_{a_{k\,i}}\{[e_{k\,\alpha(k,i)}, e_{r\varrho}^{-1}]\} \cdot \mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})$$

$$= \prod_{i=1}^{\alpha} \chi_{a_{k\,i-1}}\{[e_{r\varrho}, e_{k\,\alpha(k,i)}]\}\, \mathfrak{a}_k(a_{k\alpha}) \text{ wegen Bedingung 1. und 2.}$$

$$= \chi_{e_{r\varrho}}[\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})] \text{ wegen Bedingung 4.}$$

Ist schließlich $a = 1$ irgendeine Relation von G, so wird

$$\chi_{e_{r\varrho}}[\mathfrak{a}(a)] =$$

$$\prod_{i=2}^{\alpha} \prod_{k=1}^{n} \prod_{l=k+1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} \chi_{e_{r\varrho}} \prod_{h=1}^{k-1} {}^{a_{hi}} \prod_{h=k}^{l-1} {}^{a_{h\,i-1} a_{l\,j-1}}\{[e_{l\,\alpha(l,j)}, e_{k\,\alpha(k,i)}]\} \prod_{k=1}^{n} \chi_{e_{r\varrho}}[\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})]$$

wegen (1), und dies wird wegen (b) und (c) gleich

$$\prod_{i=2}^{\alpha} \prod_{k=1}^{n} \prod_{l=k+1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} \mathfrak{a}\Big[e_{r\varrho} \prod_{h=1}^{k-1} a_{hi} \prod_{h=k}^{l-1} a_{h\,i-1}\, a_{l\,j-1}\, e_{l\,\alpha(l,j)}\, e_{k\,\alpha(k,i)}\, e_{l\,\alpha(l,j)}^{-1}\, e_{k\,\alpha(k,i)}^{-1}$$

$$\Big(e_{r\varrho} \prod_{h=1}^{k-1} a_{hi} \prod_{h=k}^{l-1} a_{h\,i-1}\, a_{l\,j-1}\Big)^{-1}\Big] \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathfrak{a}(e_{r\varrho} a_{k\alpha} e_{r\varrho}^{-1}),$$

und dies wird wegen (a) und der Multiplikativität von $\mathfrak{a}(r)$ gleich $\mathfrak{a}(e_{r\varrho}\, a\, e_{r\varrho}^{-1})$, womit Bedingung (2), Satz 1, § 2 und damit unser Satz hergeleitet ist.

Sind insbesondere die Faktoren $F_1, \ldots, F_m$ endliche Zyklen der Ordnungen $n_1, \ldots, n_m$ und die Faktoren $F_{m+1}, \ldots, F_n$ unendliche Zyklen, d. h. G eine kommutative Gruppe mit endlicher Basis, so kann man wegen § 4 die Relationsfunktionen $\mathfrak{a}_i(r)$ für $i = 1, \ldots, m$ im wesentlichen durch eine Konstante $\mathfrak{c}_i$ ersetzen, während $\mathfrak{a}_i(r) \equiv 1$ für $i = m+1, \ldots, n$ wird, wie § 3, S. 397 bemerkt. Aus unserem Satz folgt dann der

Zusatz: *Dann und nur dann sind die charakteristischen Konstanten* $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m$ *und die Kommutatoren* $[z_i, z_k]$ *für* $i \neq k$ *miteinander verträglich, wenn*

1. $[z_i, z_k] = [z_k, z_i]^{-1}$ *und* $[z_k, 1] = [1, z_k] = 1$,

2. $[z_i, z_k]\,\chi_{z_l}\{[z_k, z_i]\}\,[z_k, z_l]\,\chi_{z_l}\{[z_l, z_k]\}\,[z_l, z_i]\,\chi_{z_k}\{[z_i, z_l]\} = 1$ *für* $i < k < l$,

3. $$\mathfrak{c}_k\,\chi_{z_l}(\mathfrak{c}_k^{-1}) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n_k} \chi_{z_k}^{i-1}\{[z_k, z_l]\} & \text{für } l \neq k = 1, \ldots, m \\ 1 & \text{für } l = k \end{cases}$$

gilt [16]).

Die Bedingung 2. des Satzes wird dadurch überflüssig, daß sie gestattet, $[z_i, z_k^{-1}]$ und $[z_i^{-1}, z_k^{-1}]$ durch $[z_i, z_k]$ auszudrücken und wir infolgedessen die Kommutatoren inverser Erzeugender gar nicht mehr in die Formulierung des Zusatzes aufzunehmen brauchten.

Satz und Zusatz lassen sich entsprechend auch für direkte Produkte aus unendlich vielen Faktoren herleiten.

Folgerung 2 aus Satz 2, § 2 ergibt:

(A) Die Relationsfunktionen $\mathfrak{a}_1(r), \ldots, \mathfrak{a}_n(r)$ und die Kommutatoren $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]$ einerseits und die Relationsfunktionen $\mathfrak{a}_1^*(r), \ldots, \mathfrak{a}_n^*(r)$ mit den Kommutatoren $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]^*$ andererseits charakterisieren dann und nur dann denselben χ_g-G-Erweiterungstyp von $\mathfrak{A}$, wenn es möglich ist, den Erzeugenden e_{kz} Elemente $\mathfrak{b}_{kz}$ aus $\mathfrak{A}$ so zuzuordnen, daß

1. $$\mathfrak{a}_k^*(a_{k\alpha}) = \prod_{i=1}^{\alpha} \chi_{a_{ki-1}}(\mathfrak{b}_{k\alpha(k,i)}) \cdot \mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})$$

und

2. $$[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]^* = \mathfrak{b}_{r\varrho}\,\chi_{e_{s\sigma}}[\mathfrak{b}_{r\varrho}^{-1}] \cdot \mathfrak{b}_{s\sigma}^{-1} \cdot \chi_{e_{r\varrho}}[\mathfrak{b}_{s\sigma}] \cdot [e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]$$

ist.

Aus dem Hilfssatz § 3, S. 396 folgert man:

(P) Wird die χ_g-G-Erweiterung $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{A}$ für $i = 1, 2$ durch die Relationsfunktionen $\mathfrak{a}_{1i}(r), \ldots, \mathfrak{a}_{ni}(r)$ gemeinsam mit den Kommutatoren $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]_i$ charakterisiert, so ist $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2$ durch die Relationsfunktionen $\mathfrak{a}_{11}(r) \cdot \mathfrak{a}_{12}(r), \ldots, \mathfrak{a}_{n1}(r) \cdot \mathfrak{a}_{n2}(r)$ gemeinsam mit den Kommutatoren $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]_1$ $[e_{r\varrho}, e_{s\sigma}]_2$ charakterisierbar.

Ist E die Gesamtheit der Typen von χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$, bei denen die den Faktoren $F_1, \ldots, F_n$ entsprechenden Untergruppen vom Einheitstypus sind, so folgt aus (P), daß E eine Untergruppe der Typengruppe T von χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ ist. Die Restklassen von T/E

---

[16]) Vgl. O. Schreier: a. a. O. Satz III.

stellen dann immer die Typen dar, bei denen die $F_1, \ldots, F_n$ entsprechenden Untergruppen vorgegebene Struktur haben. T/E selbst ist isomorph einer Untergruppe des direkten Produktes $\mathsf{T}_1 \times \ldots \times \mathsf{T}_n$, wo T_i die Gruppe der χ_g-F_i-Erweiterungstypen ist.

Es seien $\mathfrak{a}_{1i}(r), \ldots, \mathfrak{a}_{ni}(r)$ für $i = 1, 2$ Relationsfunktionen, zu denen es mit ihnen verträgliche Kommutatoren gibt. Aus dem Satz, insbesondere der Bedingung 4. folgt dann:

Dann und nur dann gibt es Kommutatoren, die sowohl mit $\mathfrak{a}_{11}(r), \ldots, \mathfrak{a}_{n1}(r)$ als auch mit $\mathfrak{a}_{12}(r), \ldots, \mathfrak{a}_{n2}(r)$ verträglich sind, wenn

$$\mathfrak{a}_{k1}(r) \cdot \mathfrak{a}_{k2}(r)^{-1} = \chi_{e_{s\varrho}}[\mathfrak{a}_{k1}(r) \cdot \mathfrak{a}_{k2}(r)^{-1}] \quad \text{für } k = 1, \ldots, n,\ k \neq s$$

gilt. Also gibt es entweder keine Kommutatoren, die mit $\{\mathfrak{a}_{k1}(r)\}$ und $\{\mathfrak{a}_{k2}(r)\}$ zugleich verträglich sind, oder alle Kommutatoren, die mit $\{\mathfrak{a}_{k1}(r)\}$ verträglich sind, sind auch mit $\{\mathfrak{a}_{k2}(r)\}$ verträglich.

Mit $\{\mathfrak{a}_k(r) \equiv 1\}$ sind also alle und nur die Kommutatoren verträglich, die die Bedingungen 1. bis 3. des Satzes und überdies

$$\prod_{i=1}^{\alpha} \chi_{a_{ki-1}}\{[e_{k\alpha(k,i)}, e_{s\varrho}]\} = 1 \quad \text{für} \quad k \neq s \quad \text{und} \quad a_{k\alpha} = 1$$

erfüllen. Diese Kommutatoren bilden eine Gruppe [die Restklassen der multiplikativen Gruppe aller 1. bis 3. erfüllenden, mit irgendwelchen $\{\mathfrak{a}_k(r)\}$ verträglichen Kommutatoren nach dieser Gruppe sind gerade die Klassen der mit einem vorgegebenen System $\{\mathfrak{a}_k(r)\}$ verträglichen Kommutatoren], die mit allen und nur den $\{\mathfrak{a}_k(r)\}$ verträglich ist, die

$$\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha}) = \chi_{e_{s\varrho}}[\mathfrak{a}_k(a_{k\alpha})] \quad \text{für } k \neq s$$

erfüllen.

§ 6.

Realisierung des Hauptcharakters.

Es sei G das direkte Produkt von endlich vielen zyklischen Gruppen: $G = Z_1 \times \ldots \times Z_n$. Wir können dann stets annehmen, daß $Z_1, \ldots, Z_u$ unendliche Zyklen sind, während die Zyklen $Z_{u+1}, \ldots, Z_n$ Ordnungen $n_{u+1}, \ldots, n_n$ derart haben, daß n_{i-1} Vielfaches von n_i ist.

Satz: *Dann und nur dann gibt es Gruppen, deren Faktorgruppe nach dem Zentrum isomorph G ist, wenn entweder $u \geqq 2$ oder $u = 0$ und $n \geqq 2$, $n_1 = n_2$ ist.*

Beweis A: Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe, deren Faktorgruppe nach dem Zentrum $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ mit G isomorph ist, so ist $\mathfrak{G}$ eine Erweiterung der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$ durch G, die in $\mathfrak{A}$ den Hauptcharakter induziert.

Solche Erweiterungen werden charakterisiert durch die Kommutatoren $[z_i, z_k]$, wo $i \neq k$ und z_e erzeugendes Element von Z_e ist, und die charakteristischen Elemente $\mathfrak{c}_{u+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ aus $\mathfrak{A}$, die $\mathfrak{z}_i^{n_i} = \mathfrak{c}_i$ erfüllen, wo $\mathfrak{z}_i$ ein geeigneter Repräsentant der z_i entsprechenden Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ ist. Aus dem Zusatz des § 5 folgt dann:

Die charakteristischen Elemente $\mathfrak{c}_{u+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ und die Kommutatoren $[z_i, z_k]$ sind dann und nur dann miteinander verträglich, wenn

$$[z_i, z_k] = [z_k, z_i]^{-1} \quad \text{und} \quad [z_i, z_k]^{n_k} = 1 \quad \text{für} \quad k = u+1, \ldots, n$$

ist.

Setzt man $n_1 = \ldots = n_u = 0$ und versteht unter (n_i, n_k) den größten gemeinsamen Teiler von n_i und n_k [dieser ist n_k, wenn $n_i = 0$ ist], so ist diese Aussage gleichwertig mit:

(1) Die charakteristischen Elemente $\mathfrak{c}_{u+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ und die Kommutatoren $[z_i, z_k]$ sind dann und nur dann miteinander verträglich, wenn

$$[z_i, z_k] = [z_k, z_i]^{-1} \quad \text{und} \quad [z_i, z_k]^{(n_i, n_k)} = 1 \tag{1*}$$

ist.

Ist $\mathfrak{G}$ irgendeine in $\mathfrak{A}$ den Hauptcharakter induzierende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch G, so ist $\mathfrak{A}$ im Zentrum $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten. Eine Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ hat also entweder kein oder jedes Element mit $\mathfrak{Z}$ gemein. Infolgedessen genügt es, einen beliebigen Repräsentanten einer Restklasse auf seine Zugehörigkeit zu $\mathfrak{Z}$ hin zu untersuchen. Jedes Element aus G läßt sich auf eine und nur eine Weise auf die Form $\prod_{i=1}^{n} z_i^{a_i}$ mit $0 \leqq a_i < n_i$ für $i = u+1, \ldots, n$ bringen. Ist $\mathfrak{z}_i$ ein Element der z_i entsprechenden Restklasse, so ist $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{z}_i^{a_i}$ ein Repräsentant der $\prod_{i=1}^{n} z_i^{a_i}$ entsprechenden Restklasse. Diese gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{Z}$, wenn $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{z}_i^{a_i}$ mit $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_n$ vertauschbar ist. Die Vertauschbarkeit mit $\mathfrak{z}_k$ ist aber gleichwertig mit dem Bestehen von

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} [z_i, z_k]^{a_i} = 1. \tag{2}$$

B. Sei jetzt insbesondere $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}$. Dann kann G nicht zyklisch sein, wie für die endlichen Zyklen aus § 4 (Ende), für die unendlichen Zyklen [= freie Gruppe mit einer Erzeugenden] aus § 3 (Ende) folgt.

Angenommen, es wäre $n_1 \neq n_2$. Dann ist sicher $n_2 \neq 0$ und alle n_{i+1} sind Teiler von n_2. Wegen (1*) ist also $[z_1, z_i]^{n_2} = 1$, also wegen (2) die $z_1^{n_2}$ entsprechende Restklasse im Zentrum $\mathfrak{Z}$ enthalten. Da aber

$z_1^{n_2} \neq 1$ ist, so ist damit aus $n_1 \neq n_2$ ein Widerspruch mit $\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}$ hergeleitet.

C. Sei schließlich $n_1 = n_2$. Dann sei $\mathfrak{Z}_{i,k}$ für $1 \leqq i < k \leqq n$ ein Zyklus der Ordnung (n_i, n_k) und zwei solche Zyklen mögen nur die Gruppeneins gemeinsam haben. Unter $\mathfrak{A}$ werde dann das direkte Produkt dieser Zyklen verstanden: $\mathfrak{A} = \prod_{i<k} \mathfrak{Z}_{i,k}$.

Setzen wir $\mathfrak{c}_l = 1$ und $[z_i, z_k]$ für $i < k$ gleich einem beliebigen erzeugenden Element von $\mathfrak{Z}_{i,k}$, so wird wegen (1) hierdurch eine in $\mathfrak{A}$ den Hauptcharakter induzierende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch G charakterisiert. *Diese hat $\mathfrak{A}$ zum Zentrum.* Gehört nämlich die $\prod_{i=1}^{n} z_i^{a_i}$ entsprechende Restklasse zum Zentrum, so wird wegen (2)

$$\prod_{i=2}^{n} [z_i, z_1]^{a_i} = 1, \quad \text{also} \quad z_2^{a_2} = \ldots = z_n^{a_n} = 1.$$

Hieraus folgt ebenfalls wegen (2), daß $[z_1, z_2]^{a_1} = 1$ wird, d. h. $z_1^{a_1} = 1$, denn die $[z_i, z_k]$ bilden eine Basis von $\mathfrak{A}$.

Zusatz 1: *Ist $G = Z_1 \times Z_2$ das direkte Produkt zweier Zyklen der gleichen Ordnung c, so gibt es dann und nur dann eine Erweiterung der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$ durch G, die $\mathfrak{A}$ zum Zentrum hat, wenn es in $\mathfrak{A}$ ein Element der Ordnung c gibt.*

Aus (2) folgt jetzt nämlich, daß eine durch $[z_1, z_2]$ charakterisierte, in $\mathfrak{A}$ den Hauptcharakter induzierende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch G dann und nur dann $\mathfrak{A}$ zum Zentrum hat, wenn aus $[z_1, z_2]^d = 1$ stets $z_i^d = 1$ folgt, d. h. wenn c ein Teiler von d ist. Da aber andererseits wegen (1) stets $[z_1, z_2]^c = 1$ ist, so ist d auch ein Teiler von c und $\mathfrak{A}$ also dann und nur dann Zentrum, wenn c die Ordnung von $[z_1, z_2]$ ist.

Zusatz 2: *Unter den Voraussetzungen des Zusatz 1 sei τ ein Erweiterungstyp von $\mathfrak{A}$ durch G, der in $\mathfrak{A}$ den Hauptcharakter induziert. Dann und nur dann ist $\mathfrak{A}$ Zentrum von τ, wenn τ^c die niederste Potenz von τ ist, die eine kommutative Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ist; τ^c ist der Einheitstyp.*

Aus (A), § 5 folgt:

(3) Dann und nur dann charakterisieren $\mathfrak{c}_{u+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n, [z_i, z_k]$ einerseits und $\mathfrak{c}_{u+1}^*, \ldots, \mathfrak{c}_n^*, [z_i, z_k]^*$ andererseits denselben Erweiterungstyp, wenn es Elemente $\mathfrak{b}_i$ in $\mathfrak{A}$ gibt, so daß $\mathfrak{b}_i^{n_i} \mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}_i^*$ $(i = u+1, \ldots, n)$ und $[z_i, z_k] = [z_i, z_k]^*$ ist.

Aus (3) und (1) folgt stets $\tau^c = 1$. Weiter folgt aus (3), daß eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch $Z_1 \times Z_2$ dann und nur dann kommutativ ist, wenn $[z_1, z_2] = 1$ ist. Hieraus und aus der Schlußbemerkung beim Beweis des Zusatz 1 folgt der Zusatz 2.

Es seien noch einige Bemerkungen angeschlossen:

1. Die Gruppe T aller in $\mathfrak{A}$ den Hauptcharakter induzierenden Erweiterungstypen von $\mathfrak{A}$ durch G ist direktes Produkt der Gruppen T_i der kommutativen Erweiterungstypen von $\mathfrak{A}$ durch Z_i und der multiplikativen Gruppe Γ der Lösungssysteme von (1*):

$$\mathsf{T} = \mathsf{T}_1 \times \ldots \mathsf{T}_n \times \Gamma.$$

Folgt aus § 4 und (1), (3) des § 6.

2. Dann und nur dann ist jede den Hauptcharakter in $\mathfrak{A}$ induzierende Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch G kommutativ, d. h.

$$\mathsf{T} = \mathsf{T}_1 \times \ldots \times \mathsf{T}_n, \Gamma = \{1\},$$

wenn es kein Element in $\mathfrak{A}$ gibt, dessen Ordnung eine der Zahlen (n_i, n_k) für $i \neq k$ teilt.

Folgt aus der Bemerkung 1 und (1), (3) des § 6.

Bedenkt man, daß es kommutative Gruppen mit Elementen vorgegebener Ordnung gibt, so folgt aus der Bemerkung 2:

3. Dann und nur dann ist jede den Hauptcharakter realisierende Erweiterung einer jeden kommutativen Gruppe durch G selbst kommutativ, wenn G zyklisch ist.

§ 7.

Erweiterungen mit vorgegebener Zwischengruppe.

Es sei $\chi_g(\mathfrak{a})$ ein Charakter der Gruppe G in der kommutativen Gruppe $\mathfrak{A}$. Ist dann $\mathfrak{G}$ eine χ_g-G-Erweiterung von $\mathfrak{A}$, so ist die einer Untergruppe U von G entsprechende Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ eine χ_g-U-Erweiterung von $\mathfrak{A}$. In der Typengruppe T aller χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ bilden die Typen, bei denen die U entsprechende Untergruppe eine vorgegebene Struktur hat [wenn es überhaupt solche gibt], eine Restklasse nach der Untergruppe Y derjenigen Typen aus T, bei denen die U entsprechende Untergruppe eine χ_g-U-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ vom Einheitstypus ist. Sind nämlich $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zwei χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{U}_i$ die U entsprechende Untergruppe von $\mathfrak{G}_i$, so ist die U entsprechende Untergruppe von $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2^{-1}$ gerade $\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2^{-1}$; haben also $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ als χ_g-U-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ denselben Typ, so hat $\mathfrak{U}_1 \otimes \mathfrak{U}_2^{-1}$ den Einheitstyp, d. h. der Typ von $\mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2^{-1}$ gehört zu Y. — Damit ist auch gezeigt, daß T/Y isomorph einer Untergruppe der χ_g-U-Erweiterungstypengruppe ist, und zwar im allgemeinen einer echten Untergruppe, wie unten S. 415 durch ein Beispiel gezeigt werden wird.

Bekanntlich ist die U entsprechende Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ dann und nur dann Normalteiler, wenn U Normalteiler von G ist. Also induzieren dann und nur dann die Elemente von $\mathfrak{G}$ Automorphismen in $\mathfrak{U}$, wenn U Normalteiler von G ist[17]). Elemente, die zur gleichen Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ gehören, induzieren dann Automorphismen von $\mathfrak{U}$, die derselben Automorphismenklasse angehören; jedoch braucht nicht die ganze Automorphismenklasse durch die Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ erschöpft zu werden, so daß also im allgemeinen kein Kollektivcharakter vorliegen wird. Dies tritt insbesondere in dem uns vorwiegend interessierenden Fall ein, daß eine jede Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ genau einen Automorphismus von $\mathfrak{U}$ induziert, daß also $\mathfrak{G}$ einen Charakter von $\mathfrak{G}, \mathfrak{A}$, also auch von G in $\mathfrak{U}$ induziert. Dann und nur dann induzieren die sämtlichen Elemente einer Restklasse ein und denselben Automorphismus von $\mathfrak{U}$, wenn die Elemente von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{U}$ den identischen Automorphismus induzieren, d. h. wenn $\mathfrak{A}$ im Zentrum von $\mathfrak{U}$ gelegen ist, d. h. wenn $\chi_g(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{a}$ für g aus U gilt.

Satz 1: *Es sei U Normalteiler von G und $\chi_g(\mathfrak{a}) \equiv \mathfrak{a}$ für g aus U. Weiter sei* P *eine Restklasse von* T/Y *und ν der von den χ_g-G-Erweiterungstypen aus* P *realisierte χ_g-U-Erweiterungstyp von $\mathfrak{A}$.*

Die durch die Typen aus P *in ν induzierten Charaktere bilden gegenüber der Multiplikation eine Schar*[18]), *auf die* P *hierdurch homomorph bezogen ist.*

Beweis: Es seien $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ Erweiterungen, deren Typus zu P gehört. Dann gehört auch der Typus von $\mathfrak{G}_4 = \mathfrak{G}_1 \otimes \mathfrak{G}_2^{-1} \otimes \mathfrak{G}_3$ zu P und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die U entsprechende Untergruppe die allen $\mathfrak{G}_i$ gemeinsame Gruppe $\mathfrak{U}$ ist. Nach den gemachten Voraussetzungen induzieren die Elemente von $\mathfrak{G}_i$ einen Charakter $\chi_g^{(i)}(x)$ von G [bzw. $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{A}$] in $\mathfrak{U}$, und es ist zu zeigen, daß

$$\chi_g^{(4)} = \chi_g^{(1)} \chi_g^{(2)^{-1}} \chi_g^{(3)}$$

ist.

Zunächst sei bemerkt, daß $\chi_g^{(i)}(\mathfrak{a}) = \chi_g(\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ ist. Dann stellen wir uns die Erweiterungen $\mathfrak{G}_i$ durch ein vollständiges Repräsentanten-

---

[17]) Erweiterungen, die in der erweiterten Gruppe nur Isomorphismen, nicht notwendig Automorphismen induzieren, sind bisher wenig untersucht worden; einen Spezialfall behandelt z. B. A. Scholz: Ein Beitrag zur Theorie der Zusammensetzung endlicher Gruppen, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 187—189.

[18]) Im Sinne von H. Prüfer; vgl. auch R. Baer: Zur Einführung des Scharbegriffs, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 160 (1929), S. 199—207.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß, von dem Fall abgesehen, daß in der Charakterschar der Hauptcharakter auftritt, es nicht möglich ist, diese Schar in natürlicher Weise zu einer Gruppe zu machen, ja noch nicht einmal sie als Restklasse nach einer Untergruppe aufzufassen.

system $\mathfrak{r}_i(g)$ der Restklassen von $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{A}$ mit dem zugehörigen Faktorensystem $(a, b)_i$ derart dar, daß

1. $$\mathfrak{r}_1(g) = \mathfrak{r}_2(g) = \mathfrak{r}_3(g) = \mathfrak{r}_4(g) \equiv \mathfrak{r}(g)$$

für g aus U, und also

$$(a, b)_1 = (a, b)_2 = (a, b)_3 = (a, b)_4 \equiv (a, b)$$

für a und b aus U,

2. $$(a, b)_4 = (a, b)_1 (a, b)_2^{-1} (a\, b)_3$$

gilt, was gemäß der Auswahl der $\mathfrak{G}_i$ stets möglich ist.

Jedes Element aus $\mathfrak{U}$ läßt sich eindeutig in der Form $\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}(u)$ mit $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{A}$ und u aus U darstellen. Dann wird

$$\begin{aligned}\chi_g^{(i)}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}(u)] &= \mathfrak{r}_i(g)\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}(u)\,\mathfrak{r}_i(g)^{-1}\\ &= \chi_g(\mathfrak{a})\,\mathfrak{r}_i(g)\,\mathfrak{r}(u)\,\mathfrak{r}_i(g)^{-1}\,\mathfrak{r}_i(g^{-1})^{-1}\,\mathfrak{r}_i(g^{-1})\\ &= \chi_g(\mathfrak{a})\,(g, u)_i\,\chi_{gu}[(g^{-1}, g)_i^{-1}]\,(gu, g^{-1})_i\,\mathfrak{r}_i(gug^{-1})\\ &= \chi_g(\mathfrak{a})\,(g, u)_i\,(g, g^{-1})_i^{-1}\,(gu, g^{-1})_i\,\mathfrak{r}(gug^{-1}),\end{aligned}$$

da mit u auch gug^{-1} in U liegt, also $\mathfrak{r}_i(gug^{-1}) = \mathfrak{r}(gug^{-1})$ wird, da weiter $\chi_{gu}[(g^{-1}, g)_i^{-1}] = \chi_g[(g^{-1}, g)_i^{-1}]$ nach der über U gemachten Bedingung des Satzes ist, und da schließlich $\chi_g[(g^{-1}, g)_i^{-1}] = (g, g^{-1})_i^{-1}$ nach Zusatz zu Satz 1, § 2 ist.

Dann wird

$$\begin{aligned}&\chi_g^{(1)}\,\chi_g^{(2)-1}\,\chi_g^{(3)}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}(u)] =\\ &= \chi_g^{(1)}\,\chi_{g^{-1}}^{(2)}\,\{\chi_g(\mathfrak{a})\,(g, u)_3\,(g, g^{-1})_3^{-1}\,(gu, g^{-1})_3\,\mathfrak{r}(gug^{-1})\}\\ &= \chi_g^{(1)}\,\{\mathfrak{a}\,\chi_{g^{-1}}[(g, u)_3\,(g, g^{-1})_3^{-1}\,(gu, g^{-1})_3]\\ &\qquad\cdot (g^{-1}, gug^{-1})_2\,(g^{-1}, g)_2^{-1}\,(ug^{-1}, g)_2\,\mathfrak{r}(u)\}\\ &= \chi_g(\mathfrak{a})\,(g, u)_3\,(g, g^{-1})_3^{-1}\,(gu, g^{-1})_3\,\chi_g[(g^{-1}, gug^{-1})_2\,(g^{-1}, g)_2^{-1}\,(ug^{-1}, g)_2]\\ &\quad\cdot (g, u)_1\,(g, g^{-1})_1^{-1}\,(gu, g^{-1})_1\,\mathfrak{r}(gug^{-1})\\ &= \chi_g(\mathfrak{a})\,(g, u)_3\,(g, g^{-1})_3^{-1}\,(gu, g^{-1})_3\,(g, g^{-1})_2\,(g, ug^{-1})_2^{-1}\,(g, g^{-1})_2^{-1}\\ &\quad\cdot (g, ug^{-1})_2\,(gug^{-1}, g)_2\,(g, u)_2^{-1}\,(g, u)_1\,(g, g^{-1})_1^{-1}\,(gu, g^{-1})_1\,\mathfrak{r}(gug^{-1})\\ &= \chi_g(\mathfrak{a})\,(g, u)_1\,(g, u)_2^{-1}\,(g, u)_3\,(g, g^{-1})_1^{-1}\,(g, g^{-1})_2\,(g, g^{-1})_3^{-1}\,(gu, g^{-1})_1\,(gu, g^{-1})_2^{-1}\\ &\quad\cdot (gu, g^{-1})_3\,(g, g^{-1})_2^{-1}\,(gug^{-1}, g)_2\,(gu, g^{-1})_2\,\mathfrak{r}(gug^{-1})\\ &= \chi_g^{(4)}[\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}(u)],\end{aligned}$$

da

$$(gu, g^{-1})_2\,(gug^{-1}, g)_2 = \chi_{gu}[(g^{-1}, g)_2]\,(gu, 1)_2 = \chi_g[(g^{-1}, g)_2] = (g, g^{-1})_2$$

ist, womit unsere Behauptung bewiesen.

Die Herstellung der homomorphen Abbildung von P auf die Schar der in $\mathfrak{U}$ induzierten Charaktere erfolgt etwa so:

Ist ε der Einheitstypus aus T, so induziert ε in der U entsprechenden Untergruppe (dem Einheitstypus der χ_g-U-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$) einen

bestimmten Charakter φ_g. Ist dann E die Gesamtheit der Typen aus T, in denen

1. die U entsprechende Untergruppe eine χ_g-U-Erweiterung vom Einheitstypus ist, und die

2. in der U entsprechenden Untergruppe genau φ_g induzieren, so ist E eine Untergruppe von Y; die Restklassen von T/E stellen gerade die Typen dar, bei denen die U entsprechende Untergruppe vorgegebene Struktur hat und einen vorgegebenen Charakter erfährt. Es ist also die Schar der in P enthaltenen Restklassen von T/E isomorph der Schar der in $\mathfrak{U}$ induzierten Charaktere.

Es seien hier noch einige Bemerkungen über die Multiplikation der Charaktere angeschlossen. Naturgemäß wird man als das *Produkt der beiden Charaktere* φ und ψ der Gruppe G in der Gruppe $\mathfrak{N}$ die Funktion $\varphi\,\psi = \varphi_g[\psi_g(\mathfrak{n})]$ ansehen. Bei dieser Multiplikation spielt der Hauptcharakter die Rolle der Eins und als inverse Funktion zu dem Charakter φ_g ist $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ anzusehen. Dann gilt der

Satz 2: a) *Das Produkt der Charaktere* φ *und* ψ *ist dann und nur dann ein Charakter, wenn stets gilt:*

$$\varphi_g[\psi_u(\mathfrak{n})] = \psi_u[\varphi_g(\mathfrak{n})].$$

b) *Ist* χ *irgendein Charakter, so sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

1. χ *ist ein Element wenigstens einer Gruppe aus Charakteren.*
2. *Die inverse Funktion von* χ *ist auch ein Charakter.*
3. *Stets gilt* $\chi_g[\chi_u(\mathfrak{n})] = \chi_u[\chi_g(\mathfrak{n})]$.

Beweis: ad a). Setzen wir nämlich $\chi = \varphi\,\psi$, so ist mit φ_g und ψ_g sicher auch χ_g ein Automorphismus von $\mathfrak{N}$. — Ist χ ein Charakter, so ist $\chi_g\chi_h = \chi_{gh}$, d. h. aber: $\varphi_g\,\psi_g\,\varphi_h\,\psi_h = \varphi_{gh}\,\psi_{gh} = \varphi_g\,\varphi_h\,\psi_g\,\psi_h$, woraus unsere Bedingung folgt. — Ebenso folgt aus unserer Bedingung, daß $\chi_g\chi_h = \chi_{gh}$ ist und hieraus wieder wegen $\chi_{g^{-1}}\chi_g = \chi_1 = \varphi_1\,\psi_1$, daß $\chi_{g^{-1}} = \chi_g^{-1}$ ist.

ad b). Aus 1. folgt 2. nach der Gruppendefinition. — Ist 2. erfüllt, so ist χ_g^{-1} der inverse Charakter und es gilt: $\chi_g^{-1}\chi_h^{-1} = \chi_{gh}^{-1}$, also auch $\chi_{g^{-1}}\chi_{h^{-1}} = \chi_{(gh)^{-1}} = \chi_{h^{-1}g^{-1}} = \chi_{h^{-1}}\chi_{g^{-1}}$, d. h. $\chi_g^{-1}\chi_h^{-1} = \chi_h^{-1}\chi_g^{-1}$, also auch 3. — Schließlich folgt aus 3. und der eben angestellten Rechnung die Existenz des inversen Charakters, während aus a) und 3. folgt, daß die Potenzen von χ und χ^{-1} wieder Charaktere sind, womit 1. gezeigt ist.

Ist G kommutativ, so ist b) 3. stets erfüllt; ist sogar die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{N}$ kommutativ[19]), so folgt aus a) und b), daß die Gesamtheit der Charaktere von G in $\mathfrak{N}$ für beliebiges G eine Gruppe bildet. Aus a) folgt noch, daß jede Gruppe von Charakteren kommutativ ist.

Analoge Betrachtungen lassen sich auch über die Multiplikation der Kollektivcharaktere anstellen.

Ist jetzt $\mathsf{X}(c)$ ein Kollektivcharakter der Gruppe C in der Gruppe $\mathfrak{N}$ vom Zentrum $\mathfrak{Z}$, so gibt es nach dem in § 1 Gesagten im wesentlichen eine Gruppe G und einen Charakter χ_g von G in $\mathfrak{N}$, der aus $\mathsf{X}(c)$ durch Auflösung entsteht. Sucht man also die $\mathsf{X}(c)$-C-Erweiterungen von $\mathfrak{N}$, so hat man nur die χ_g-G-Erweiterungen von $\mathfrak{Z}$ ausfindig zu machen, bei denen die N entsprechende Untergruppe vom Erweiterungstyp von $\mathfrak{N}$ ist, und bei denen in der N entsprechenden Untergruppe gerade der Charakter χ_g induziert wird. Diese bilden, wenn es überhaupt solche gibt, wie oben gezeigt, eine Restklasse von T/E, aber es braucht nicht immer solche zu geben, wie das folgende

Beispiel eines nicht realisierbaren Kollektivcharakters

zeigt: Die Gruppe $\mathfrak{N}$ sei durch die Erzeugenden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit den Relationen

$$\mathfrak{a}^{n^2} = \mathfrak{b}^{n^2} = \mathfrak{c}^{n^2} = 1, \qquad (n > 1, \text{ beliebig})$$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^n\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

gegeben. Es ist dies eine Erweiterung der Gruppe $\mathfrak{Z} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}^n, \mathfrak{c}^n\}$ durch das direkte Produkt zweier Zyklen der Ordnung n, das in $\mathfrak{Z}$ den Hauptcharakter induziert, wie aus (1), § 6, S. 409 folgt. $\mathfrak{Z}$ ist das Zentrum von $\mathfrak{N}$, wie aus (2), § 6, S. 409 folgt[20]).

Die Gruppe N der inneren Automorphismen von $\mathfrak{N}$ ist das direkte Produkt zweier Zyklen der Ordnung n, die durch

$$\beta \text{ mit } \beta(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}, \quad \beta(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}, \quad \beta(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}^{-n}\mathfrak{c}$$

bzw.

$$\gamma \text{ mit } \gamma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}, \quad \gamma(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \quad \gamma(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$$

erzeugt werden.

Schließlich wird durch $\alpha(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, $\alpha(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\alpha(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$ ein Automorphismus α von $\mathfrak{N}$ definiert, da

$$\alpha(\mathfrak{c})\,\alpha(\mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{n+1}\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^n\alpha(\mathfrak{b})\,\alpha(\mathfrak{c}) = \alpha(\mathfrak{a})^n\alpha(\mathfrak{b})\,\alpha(\mathfrak{c})$$

---

[19]) Die Frage, ob es nichtkommutative Gruppen mit kommutativer Automorphismengruppe gibt, scheint noch unentschieden zu sein.

[20]) Unsere Betrachtungen bleiben auch gültig, wenn wir $\mathfrak{Z}$ durch irgendeine kommutative Gruppe ersetzen, die nur ein Element $\mathfrak{a}$ der Ordnung n^2 und zwei davon und untereinander unabhängige der Ordnung n enthalten muß.

ist. α ist kein innerer Automorphismus, es ist $\alpha^n = \gamma$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, und die von α und β erzeugte Gruppe G von Automorphismen ist das direkte Produkt des von α erzeugten Zyklus der Ordnung n^2 mit dem von β erzeugten Zyklus der Ordnung n. Schließlich umfaßt G die Gruppe N der inneren Automorphismen, und G/N ist ein Zyklus der Ordnung n.

G/N liefert einen bestimmten Kollektivcharakter X von G/N in $\mathfrak{N}$, aus dem (nach den Sätzen des § 1) durch Auflösung der von G gelieferte Charakter χ von G in $\mathfrak{N}$ hervorgeht. χ stimmt in $\mathfrak{Z}$ mit dem Hauptcharakter von G in $\mathfrak{Z}$ überein.

Um zu zeigen, daß es keine X-G/N-Erweiterung von $\mathfrak{N}$ geben kann, genügt es zu zeigen, daß es keine χ-G-Erweiterung von $\mathfrak{Z}$ geben kann, bei der die N entprechende Untergruppe vom Typus von $\mathfrak{N}$ ist. Wir werden sogar zeigen, daß in allen χ-G-Erweiterungen von $\mathfrak{Z}$ die N entsprechende Untergruppe *kommutativ* ist.

Sei nämlich $\mathfrak{G}$ eine χ-G-Erweiterung von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{r}(\alpha)$ bzw. $\mathfrak{r}(\beta)$ irgendein Element aus der α bzw. β aus G entsprechenden Restklasse von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$. Dann ist

$$\mathfrak{r}(\alpha)\,\mathfrak{r}(\beta) = \mathfrak{a}^c\,\mathfrak{b}^{d\,n}\,\mathfrak{c}^{e\,n}\,\mathfrak{r}(\beta)\,\mathfrak{r}(\alpha),$$

da $\alpha\beta = \beta\alpha$ ist. Wegen (1) des § 6, S. 409 und $\beta^n = 1$ muß $\mathfrak{a}^{c\,n} = 1$ sein, also c ein Vielfaches von n.

N wird durch α^n und β erzeugt. Es ist $\mathfrak{r}(\alpha)^n$ Element aus der α^n entsprechenden Restklasse, und da in $\mathfrak{Z}$ der Hauptcharakter induziert wird, so gilt $\mathfrak{r}(\alpha)^n\,\mathfrak{r}(\beta) = (\mathfrak{a}^c\,\mathfrak{b}^{d\,n}\,\mathfrak{c}^{e\,n})^n\,\mathfrak{r}(\beta)\,\mathfrak{r}(\alpha)^n = \mathfrak{r}(\beta)\,\mathfrak{r}(\alpha)^n$. Also ist die N entsprechende Untergruppe kommutativ, da sie von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}(\alpha)^n$, $\mathfrak{r}(\beta)$ erzeugt wird und $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{Z}$ den Hauptcharakter induziert, d. h. $\mathfrak{a}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{g}$ aus $\mathfrak{G}$ gilt.

(Eingegangen am 13. Januar 1933.)

Periodische Minimalflächen.

Von

Berthold Steßmann in Frankfurt a. M.

Einleitung.

Für ein Minimalflächenstück M, das von einem geradlinigen Polygon begrenzt ist, gilt unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen der Symmetriesatz von Schwarz. Dieser Satz lehrt, daß man die analytische Fortsetzung von M durch Spiegelung an den Seiten des Flächenstückes erhält. Durch Fortsetzen dieses Verfahrens an den durch Spiegeln jeweils neu entstandenen Seiten erhält man die volle Minimalfläche, die dann aus lauter zu M kongruenten Stücken zusammengesetzt ist. Eine solche Minimalfläche heiße periodisch, wenn von diesen Stücken in einem endlichen Teil des Raumes immer nur endlich viele vorhanden sind. Ist speziell M von einem Vierseit begrenzt, so zeigte Schoenflies mit Hilfe eines Satzes über Bewegungsgruppen, daß es sechs verschiedene solche Flächen gibt. Sie gehören zu den folgenden Vierseiten, die aus Kanten und Seitendiagonalen eines Würfels gebildet sind (s. Fig. 1).

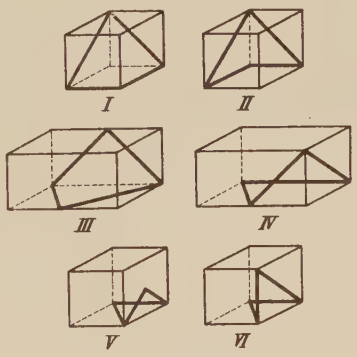


Fig. 1.

Diese sechs verschiedenen periodischen Minimalflächen sind Gegenstand der vorliegenden Arbeit. In den §§ 1, 2 werden als Grundlage für das Folgende die Schwarzschen Sätze über Minimalflächen und der Satz von Schoenflies entwickelt. In § 3 wird dann gezeigt, daß die Koordinaten der genannten periodischen Minimalflächen (in der Darstellung nach Weierstraß) Realteile Abelscher Integrale erster Gattung sind, die sich durch algebraische Substitutionen in elliptische überführen lassen. Der Beweis hierfür benutzt zwei Tatsachen:

1. Daß zu jedem solchen Integral eine Untergruppe der Gruppe der Oktaedersubstitutionen gehört, der gegenüber das Integral invariant bleibt. Bei dem zur z-Koordinate gehörigen Integrale ist es die durch $s' = \frac{1}{s}$, $s' = is$ erzeugte Untergruppe.

2. Daß es möglich ist, eine einfache Übersicht über die Gesamtheit der geschlossenen Wege auf der zum Integral gehörigen Riemannschen Fläche zu gewinnen.

In § 4 werden die algebraischen Funktionen, die die erwähnten Riemannschen Flächen definieren, näher untersucht, und in § 5 für den Fall des Vierseits IV, wo die zugehörige Riemannsche Fläche das Geschlecht $p = 8$ hat, die Transformation in das elliptische Integral für die z-Koordinate durchgeführt. Die zu IV gehörige algebraische Funktion ist (bei passender Normierung) durch die Gleichung

$$u^3 - 729 \frac{s^4 (s^4 - 1)^4}{(s^8 + 14 s^4 + 1)^3} (u + 1) = 0$$

definiert. Die Durchführung der Transformation ist dadurch erleichtert, daß man bei passender Normierung die Untersuchung in dem Unterkörper $\Re(u, v)$ des Körpers $\Re(u, s)$ vornehmen kann, wo $\frac{48}{v} = s^4 + \frac{1}{s^4} + 14$ ist. Der Körper $\Re(u, v)$ hat das Geschlecht $p = 1$. Geschieht seine Normaldarstellung durch ϱ, ϱ', wo

$$\varrho = \frac{12 u v - 25 u + \frac{39}{4} v - \frac{117}{4}}{4 u - 3 v + 9}, \quad \varrho' = \sqrt{4 \varrho^3 - \frac{219}{4} \varrho + \frac{827}{8}},$$

so wird die Transformation durch die Funktion

$$\tau = -2 \frac{10 \varrho^2 - 27 \varrho + \frac{373}{8} - 4 \varrho'}{4 \varrho^2 - 18 \varrho + \frac{173}{4} - 4 \varrho'}$$

geleistet. Die z-Koordinate ist dann der Realteil des elliptischen Integrales:

$$J = 8 \int \frac{d \tau}{\sqrt{\tau^3 - 51 \tau - 142}};$$

die beiden anderen Koordinaten werden durch dasselbe Integral mit anderen Grenzen dargestellt. Zwischen den zu x, y, z gehörigen oberen Grenzen besteht eine algebraische Beziehung. Es sei noch bemerkt, daß die Fälle der Vierseite I, II, III von H. A. Schwarz, Bestimmung einer speziellen Minimalfläche usw., Werke Bd. 1, S. 8—91; R. Neovius, Bestimmung zweier spezieller Minimalflächen usw., Helsingfors 1883, ausführlich behandelt worden sind. In diesen Fällen wurde die Untersuchung durch besondere Symmetrieeigenschaften des Vierseits erleichtert. Bei den drei anderen Fällen sind verschiedene algebraische Schwierigkeiten zu überwinden. Der im folgenden benutzte Weg führt in allen Fällen zum Ziel, doch wird die Untersuchung nur für den Fall des Vierseits IV vollständig bis zum Schluß durchgeführt.

§ 1.

Die Sätze von Schwarz.

Sei $x(p, q)$, $y(p, q)$, $z(p, q)$ eine Parameterdarstellung eines (nicht ebenen) ganz im Endlichen gelegenen Minimalflächenstückes M, das keine Singularität in seinem Innern enthalte. Im folgenden werde vorausgesetzt, daß für diejenigen p, q-Werte, die dem Innern von M entsprechen, die partiellen Ableitungen von $x(p, q)$, $y(p, q)$, $z(p, q)$ bis einschließlich der zweiten Ordnung existieren und stetig sind. Unter diesen Voraussetzungen hat Weierstraß gezeigt, daß für M auch eine Parameterdarstellung der folgenden Form existiert:

$$x = \Re\,\xi, \quad y = \Re\,\eta, \quad z = \Re\,\zeta, \tag{1}$$

wo

$$\xi = \int_{s_0} i(1 - s^2) F(s)\, ds, \quad \eta = \int_{s_0} -(1 + s^2) F(s)\, ds, \quad \zeta = \int_{s_0} 2 i s F(s)\, ds.$$

s ist eine komplexe Variable, die in einem Gebiet G variiert, das nicht notwendigerweise schlicht zu sein braucht und das durch die Formeln (1) eineindeutig auf M bezogen ist. $F(s)$ ist innerhalb G regulär und von Null verschieden. Umgekehrt wird durch (1) immer eine Minimalfläche dargestellt, die überall dort singularitätenfrei ist, wo $F(s)$ regulär und von Null verschieden ist. Die Beweise hierfür findet man in Weierstraß' Werken, Bd. III, S. 39—52, Schwarz' Werken, Bd. I und in den Darstellungen der Differentialgeometrie von Bianchi und Darboux. Für $s = \infty$ müssen die obigen Voraussetzungen passend abgeändert werden.

Sei die s-Ebene vermittels der Formeln

$$X = \frac{s + \bar{s}}{s\bar{s} + 1}, \quad Y = -i\frac{s - \bar{s}}{s\bar{s} + 1}, \quad Z = \frac{s\bar{s} - 1}{s\bar{s} + 1} \tag{2}$$

auf die Einheitskugel stereographisch abgebildet, so erkennt man, daß die Minimalfläche M und die Kugel vermittels (1) und (2) so aufeinander bezogen sind, daß sie in entsprechenden Punkten gleiche Normalenrichtungen haben. Man errechnet nämlich sofort

$$\begin{aligned} &X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \\ &= \frac{1}{2(s\bar{s}+1)} \{(s + \bar{s})[i(1 - s^2) F(s)\, ds - i(1 - \bar{s}^2)\overline{F}(\bar{s})\, d\bar{s}] \\ &\quad + i(s - \bar{s})[(1 + s^2) F(s)\, ds + (1 + \bar{s}^2)\overline{F}(\bar{s})\, d\bar{s}] \\ &\quad + (s\bar{s} - 1)[2 i s F(s)\, ds - 2 i \bar{s}\overline{F}(\bar{s})\, d\bar{s}]\} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Normalenrichtungen auf einer Geraden liegen alle in einer Ebene, die senkrecht zu der Geraden verläuft. Daraus folgt: Einer Geraden auf

einer Minimalfläche entspricht auf der Kugel ein größter Kugelkreis und in der s-Ebene ein Kreis (bzw. eine Gerade). Sind α, β, γ die Richtungskosinus dieser Geraden, so erhält man aus (3) als Gleichung des Kreises

$$(4) \qquad (s+\bar{s})\alpha - i(s-\bar{s})\beta + (s\bar{s}-1)\gamma = 0.$$

Der Ausgangspunkt für die später folgenden Sätze von Schwarz ist das Verhalten der Weierstraßschen Formeln gegenüber orthogonalen Substitutionen des Koordinatensystems x, y, z. Dieses Verhalten ergibt sich aus der Formel:

$$(5) \qquad \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = 0,$$

die übrigens bei Weierstraß der Darstellung (1) vorausgeht, und die man nachträglich leicht verifiziert. Führt man ein neues Koordinatensystem vermittels der Formeln:

$$(6) \qquad \begin{aligned} x_1 &= A_1 x + B_1 y + C_1 z, \\ y_1 &= A_2 x + B_2 y + C_2 z, \\ z_1 &= A_3 x + B_3 y + C_3 z, \end{aligned}$$

wo die A, B, C eine orthogonale Substitution bilden, ein, so erhält man für die Minimalfläche folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 &= \Re\,\xi_1 = \Re\,\{A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta\}, \\ y_1 &= \Re\,\eta_1 = \Re\,\{A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta\}, \\ z_1 &= \Re\,\zeta_1 = \Re\,\{A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta\}. \end{aligned}$$

Setzt man ferner:

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= \;\; i(1-s_1^2)F_1(s_1)\,ds_1, \\ d\eta_1 &= -(1+s_1^2)F_1(s_1)\,ds_1, \end{aligned}$$

so folgt auf Grund von Formel (5), die bei orthogonaler Substitution erhalten bleibt, $d\zeta_1 = 2is_1F_1(s_1)\,ds_1$, also die Weierstraßsche Darstellung in den neuen Koordinaten. Dabei geht, wie nach dem Obigen klar ist, s_1 aus s durch lineare Substitution hervor, $s_1 = \frac{\alpha s+\beta}{\gamma s+\delta}$, nämlich durch die Kugeldrehung, die der orthogonalen Substitution (6) entspricht. Dabei gilt die wichtige Formel

$$F\,ds^2 = F_1\,ds_1^2.$$

Diese Formel erhält man durch folgenden Schluß: Die Ausdrücke $\frac{d\xi}{F\,ds}$, $\frac{d\eta}{F\,ds}$, $\frac{d\zeta}{F\,ds}$ sind quadratische Funktionen von s, ebenso $\frac{d\xi_1}{F_1 ds_1}$, $\frac{d\eta_1}{F_1 ds_1}$, $\frac{d\zeta_1}{F_1 ds_1}$ quadratische Funktionen von s_1, also $\frac{ds}{ds_1}\frac{d\xi_1}{F_1 ds_1}$, $\frac{ds}{ds_1}\frac{d\eta_1}{F_1 ds_1}$, $\frac{ds}{ds_1}\frac{d\zeta_1}{F_1 ds_1}$

quadratische Funktionen von s. Andererseits drücken sich $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ homogen linear durch $d\xi_1$, $d\eta_1$, $d\zeta_1$ aus. Also ist $\frac{F\,ds^2}{F_1\,ds_1^2}$ auf drei Arten als Quotient quadratischer Polynome in s darstellbar; wegen der Teilerfremdheit der Nenner folgt die Konstanz von $\frac{F\,ds^2}{F_1\,ds_1^2}$. Wegen

$$\frac{F\,ds^2}{F_1\,ds_1^2}\cdot\frac{F_1\,ds_1^2}{F_2\,ds_2^2}=\frac{F\,ds^2}{F_2\,ds_2^2}$$

ist $\frac{F\,ds^2}{F_1\,ds_1^2}$ eine Potenz der Determinante der Substitution, da aber nur die Verhältnisse der Koeffizienten wirklich auftreten, so folgt $\frac{F\,ds^2}{F_1\,ds_1^2}=1$. Diese Formel enthält einen der später ausgesprochenen Schwarzschen Sätze. Im folgenden werde vorausgesetzt, daß M einfach zusammenhängend und von einem geradlinigen Polygon begrenzt sei. Es werde ferner vorausgesetzt, daß die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen $x(p,q)$, $y(p,q)$, $z(p,q)$ stetig mit Einschluß des Randes und etwaiger Ausnahme der Ecken sind. Dann ändern sich also auch die Normalenrichtungen bei Annäherung an den Rand und auf dem Rand stetig, und infolgedessen wird das M entsprechende Gebiet G in der s-Ebene von einem Kreisbogen-Polygon begrenzt. $F(s)$ ist im Inneren von G regulär, ändert sich bei Annäherung an den Rand und auf dem Rand stetig, und da der Rand von G aus Stücken analytischer Kurven besteht, so kann man $F(s)$ über jedes Randstück von G hinaus analytisch fortsetzen. Durch diese analytische Fortsetzung erhält man die „analytische Fortsetzung" des Minimalflächenstückes M, d. h. die volle Minimalfläche $\mathfrak{M}$.

Es folgen jetzt die Beweise der Schwarzschen Sätze.

I. Der Symmetriesatz: Jedes Geradenstück (im Inneren oder auf dem Rande) vom M ist Symmetrieachse der Minimalfläche.

Beweis: Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß das Geradenstück auf der y-Achse liege. Wegen $dx=dz=0$ folgt dann auf dem Geradenstück aus (4) $s=\bar{s}$, d. h. dem Geradenstück entspricht ein Stück der reellen s-Achse. Ferner folgt, daß die Funktionen ξ, ζ auf diesem Stück der reellen Achse rein imaginär, $F(s)$ daher rein reell und daher auch das Differential $d\eta$ rein reell ist. Bei Fortsetzung über das Geradenstück kommt man daher bei spiegelbildlich gelegenen s-Werten zu ξ,ζ-Werten mit entgegengesetzt gleichen Realteilen und η-Werten mit denselben Realteilen, also zu Punkten auf der Minimalfläche $\mathfrak{M}$, die bezüglich des Geradenstückes spiegelbildlich liegen.

II. Man bilde G vermittels der Funktion $u(s)$ konform auf die obere u-Halbebene ab (was wegen des einfachen Zusammenhanges von G möglich ist) und setze

$$F(s)\,ds^2 = \Phi(u)\,du^2.$$

Dann gilt: Für reelle u ist $\Phi(u)$ reell. An denjenigen Stellen der reellen u-Achse, die den Ecken der Berandung von M entsprechen, ist $\Phi(u)$ regulär oder hat einen Pol von erster Ordnung. $\Phi(u)$ läßt sich nach dem Spiegelungsprinzip von Schwarz eindeutig über die ganze Ebene fortsetzen und ist daher eine rationale Funktion.

Beweis: Sei g ein Stück des Randes von M, und sei das Koordinatensystem so gewählt, daß g auf der y-Achse liegt, dann sind wieder $F(s)$ und ds für dieses Geradenstück reell, also der Ausdruck $F(s)\,ds^2$ reell. Bei Wechsel des Koordinatensystems ist aber $F(s)\,ds^2$ nach dem Obigen invariant. Da u reell ist, so ist also auf dem Rande auch $\Phi(u)$ reell. Zwecks Untersuchung des Verhaltens von $\Phi(u)$ an denjenigen Stellen, die den Ecken des Randes von M entsprechen, werde das Koordinatensystem so vorausgesetzt, daß die beiden Geraden an derjenigen Ecke P_0, an der die Untersuchung vorgenommen werde, in der x, y-Ebene liegen. (Man kann auch voraussetzen, daß P_0 der Ursprung des Koordinatensystems sei; denn eine Verschiebung entspricht in den Integralen der Weierstraßschen Formeln (1) nur einer Änderung der unteren Grenzen.) Dann gilt an P_0: $s = 0$ oder $s = \infty$. Man kann das Koordinatensystem noch so wählen, daß $s = 0$ gilt. Der kürzeren Schreibweise wegen werde für $s = 0$ auch $u = 0$ vorausgesetzt. Den beiden Geradenstücken an P_0 entsprechen Stücke größter Kugelkreise, die durch $s = 0$, folglich auch durch $s = \infty$ gehen, also Geraden durch $s = 0$. Sie mögen innerhalb G den Winkel $\delta\pi$ miteinander bilden. Dann lautet die Entwicklung von u an $u = 0$: $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s^{k/\delta}$, wo die a_k reelle Zahlen sind, folglich

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{\infty} b_k s^{k/\delta}, \quad 2is\left(\frac{du}{ds}\right)^2 = \frac{2i}{s}\sum_{k=2}^{\infty} b_k' s^{k/\delta}$$

$\Phi(u)$ ist in der Umgebung von $u = 0$ eindeutig, läßt sich also in eine Laurent-Reihe entwickeln:

$$\Phi(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k u^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k' s^{k/\delta}.$$

Folglich gilt:

$$\zeta = \int 2is\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \Phi(u)\,ds = 2i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k' s^{k/\delta} + A_0 \log s,$$

wo A_0 rein imaginär ist. Zunächst folgt $A_0 = 0$. Setzt man nämlich $s = r e^{i\varphi}$ und läßt φ bei festem r über alle Grenzen wachsen, so wüchse für $A_0 \neq 0$ der Realteil von $A_0 \log s$ über alle Grenzen, während die Summe aller übrigen Teile der Entwicklung von ζ beschränkt bleibt. Die Fortsetzung um den Punkt $u = 0$ erhält man aber andererseits durch sukzessives Spiegeln an Geradenstücken durch P_0; das führt aber immer zu beschränkten z-Werten. Ferner setze man $v = s^{1/\delta}$; dann erhält man für ζ eine Laurent-Entwicklung in v. Diese kann aber nur endlich viele negative Potenzen enthalten. Denn sonst müßte ζ nach dem Riemann-Weierstraßschen Satz von der hebbaren Singularität in der Umgebung von $v = 0$ jedem beliebigen Wert beliebig nahe kommen, insbesondere also Werte mit sehr großen Realteilen annehmen, was wieder der Beschränktheit von z widerspricht. $\Phi(u)$ hat daher einen Pol an der Stelle $u = 0$; denn nach dem Obigen ist bei Wechsel des Koordinatensystems der Ausdruck $F(s)\left(\frac{ds}{du}\right)^2$ invariant. Aus der Entwicklung von ζ nach Potenzen von u sieht man sofort durch eine leichte Umrechnung, daß dieser Pol höchstens von der ersten Ordnung sein kann. Zur Untersuchung an der Stelle $u = \infty$ werde vorausgesetzt, daß $u = \infty$ einem endlichen Werte von s, aber keiner Ecke des Polygons entspreche, was man immer durch lineare Transformation erreichen kann. Dann gilt in der Umgebung von $u = \infty$: $s = a_0 + \frac{a_1}{u} + \ldots$ Es muß $\Phi(u)\frac{du}{ds}du$ endlich bleiben. Man setze $u = \frac{1}{v}$ und erhält

$$\Phi(u)\frac{du}{ds}du = \Phi\left(\frac{1}{v}\right)\frac{du}{ds}d\frac{1}{v} = \Phi\left(\frac{1}{v}\right)\left\{\frac{a_1^{-1}}{v^4} + \ldots\right\}dv,$$

für $v = 0$ muß daher $\Phi\left(\frac{1}{v}\right)$ von der mindestens vierten Ordnung verschwinden. Hieraus folgt speziell: Wird M von einem Vierseit begrenzt, so ist $\Phi(u)$ genau von der vierten Ordnung, da $\Phi(u)$ mindestens vier Nullstellen und höchstens vier Pole hat, und $\Phi(u) \equiv 0$ natürlich nicht in Frage kommt, also $\Phi(u) = \frac{C}{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)}$. Aus der Entwicklung von ξ, η an der Stelle $s = 0$, $u = 0$ und der Bedingung, daß sie endlich bleiben sollen, schließt man eine Abschätzung für δ. Beginnt nämlich wie oben s mit einem Glied u^δ, Φ mit einem Glied u^m, wo $m \geqq -1$, $\delta > 0$, so beginnen $\frac{d\xi}{du}$, $\frac{d\eta}{du}$ mit einem Glied $u^{-\delta+m+1}$; damit also ξ, η endlich bleiben, muß gelten:

$$-\delta + m + 1 > -1, \quad \delta < m + 2.$$

(Ein logarithmisches Glied kommt wieder wie oben nicht in Frage.) Ist M von einem Vierseit begrenzt, so gilt an den Ecken $m = -1$, also $\delta < 1$.

Für den Fall des Vierseits hat das Kreisbogenviereck in der s-Ebene daher nur Winkel, die kleiner als 180^0 sind.

Der Fall, daß eine Ecke bei $u = \infty$ liegt, geht aus dem bisher behandelten durch lineare Transformationen in u hervor und liefert nach einer einfachen Umrechnung $\Phi(u) = \frac{C}{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)}$. Die Konstante C wird im folgenden gleich 1 gesetzt, wodurch die Maßeinheit im Koordinatensystem festgelegt ist.

§ 2.

Der Satz von Schoenflies.

Nach dem Symmetriesatz I erhält man die volle Minimalfläche, indem man an den Seiten von M spiegelt und dieses Verfahren an den Seiten der neu erhaltenen Stücke fortsetzt. Die volle Fläche setzt sich daher aus lauter zu M kongruenten Stücken zusammen. Sie heiße periodisch, wenn von diesen Stücken in ein endliches Raumstück immer nur endlich viele eindringen. Die sukzessiven Spiegelungen bilden eine Bewegungsgruppe des Raumes. Die Fläche ist offenbar dann und nur dann periodisch, wenn diese Gruppe keine infinitesimalen Bewegungen enthält.

Jede Bewegung des Raumes kann als Produkt aus einer Translation und einer Rotation aufgefaßt werden. Die Gesamtheit der Rotationen, die in den Elementen einer Bewegungsgruppe enthalten sind, heißt nach Schoenflies die „Hilfsgruppe". Nach C. Jordan[1]) gilt dann folgender Satz: Eine Transformationsgruppe des Raumes enthält höchstens dann keine infinitesimalen Transformationen, wenn die „Hilfsgruppe" Drehungsgruppe eines regulären Körpers (oder eine Untergruppe davon) ist. Ferner gehören bis auf Ausnahmefälle, die hier nicht interessieren, unendliche Gruppen nur zur Oktaedergruppe. Die Seiten eines „periodischen" Polygons sind daher den Drehachsen eines Würfels, und da die Rotationen an ihnen Spiegelungen, also von gerader Ordnung sind, den Achsen gerader Ordnung eines Würfels parallel, und diese sind den Kanten und Seitendiagonalen eines Würfels parallel. Das ergibt neun mögliche Richtungen für die Seiten eines periodischen Polygons mit den Richtungskosinus (bei passender Lage des Würfels)

$$(1,0,0)\quad (0,1,0)\quad (0,0,1)\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

[1]) Annali di mat. (Serie II) 2 (1868), S. 167 ff.

Aus (4) findet man die ihnen entsprechenden Kreise in der s-Ebene. Sie bilden bei geeigneter Normierung die bekannte „Oktaederfigur".

Die Punkte

$$A \text{ sind: } 0, \infty, \quad \pm 1, \pm i,$$

$$B \quad „ \quad \pm\sqrt{2} \pm 1, \quad \pm i(\sqrt{2} \pm 1), \quad (\pm 1 \pm i)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$C \quad „ \quad \pm\frac{1 \pm i}{2}(\sqrt{3} \pm 1).$$

Den „periodischen" Polygonen entsprechen Kreisbogenpolygone dieser Figur, und nach dem Symmetriesatz gehören zwei Polygone zur selben Minimalfläche, wenn sie durch sukzessives Spiegeln an ihren Seiten auseinander

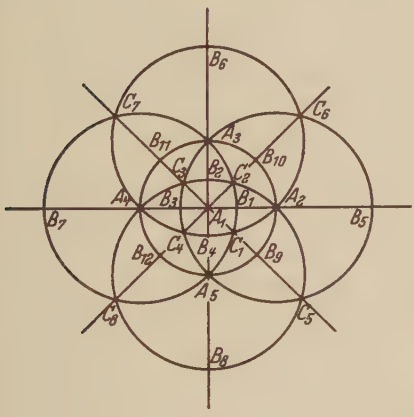


Fig. 2.

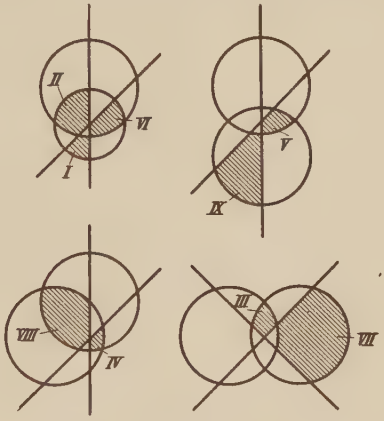


Fig. 3.

hervorgehen. Umgekehrt ist jedes windschiefe Polygon, das einem Polygon der Fig. 2 entspricht, periodisch. Diese letztere Tatsache folgt daraus, daß man den Raum lückenlos mit Würfeln erfüllen kann, und daß bei den Spiegelungen an Kanten und Flächendiagonalen die Würfeleinteilung des Raumes in sich übergeht. Den periodischen Vierseiten speziell entsprechen nach dem früheren diejenigen Vierecke der Fig. 2, deren Winkel $\varphi < 180^0$ sind. Bei ihrer Aufzählung ist zu bemerken, daß vier Kreise nur dann Vierecke bilden, wenn nicht drei unter ihnen durch einen Punkt gehen. Man erhält so (bis auf Spiegelungen) vier Kombinationen von Kreisen mit neun Vierecken (s. Fig. 3).

Das Viereck VII läßt sich aus den vier Vierecken der Fig. 2

$$B_{10} C_2 B_1 A_2, \quad A_2 B_1 C_1 B_9, \quad A_2 B_9 C_5 B_5, \quad B_5 C_6 B_{10} A_2$$

zusammensetzen, das Viereck IX aus den beiden Vierecken $B_{12} C_4 B_4 A_5$, $A_5 B_8 C_8 B_{12}$, das Viereck VIII aus $B_2 A_1 C_4 A_4$, $A_4 C_7 A_3 B_2$, die beziehungsweise

aus I und V durch Spiegelung hervorgehen und daher mit den durch I bzw. V definierten Minimalflächen identisch sind. Man erhält so den Satz von Schoenflies[2]): Es gibt genau sechs periodische Minimalflächen, auf denen ein einfach zusammenhängendes Stück M von einem Vierseit begrenzt ist.

Unter periodischen Minimalflächen schlechthin seien fortan diese sechs periodischen Vierseitsminimalflächen verstanden. Mit Hilfe der Gleichung (4) sieht man, daß sie den sechs in der Einleitung angegebenen Typen von Vierseiten entsprechen.

§ 3.

Die Perioden der Koordinatenintegrale.

Im Falle der periodischen Minimalflächen sind die Integrale

$$\xi = i\int (1-s^2)\,\Phi(u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds, \quad \eta = -\int (1+s^2)\,\Phi(u)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds,$$

$$\zeta = \int 2\,i\,s\left(\frac{du}{ds}\right)^2 \Phi(u)\,ds$$

Abelsche Integrale erster Gattung. Zum Beweise soll zunächst gezeigt werden, daß die Abbildungsfunktionen $u(s)$ algebraisch sind. Die Spiegelungen an den Kreisen und Geraden der Fig. 2 führen, wie man leicht sieht, die Fig. 2 in sich über. Sie bilden eine Gruppe der Ordnung 48, die „erweiterte Oktaedergruppe". In bezug auf die Transformationen dieser Gruppe zerfallen die Elemente der Fig. 2 in Klassen äquivalenter Elemente, wobei alle Elemente zur selben Klasse gehören, die bei den Spiegelungen der Figur ineinander übergeführt werden können. Man erhält: drei Klassen von 6, 8, 12 äquivalenten (Schnitt)-Punkten, die den Seitenmitten, Ecken und Kantenmitten des Würfels entsprechen und mit A, C, B bezeichnet sind, zwei Klassen äquivalenter Kreise (bzw. Geraden), die den drei Quadrupeln paralleler Würfelseiten und sechs Paaren paralleler Seitendiagonalen entsprechen, neun Klassen von Vierecken (mit Winkeln $\varphi < 180^0$), von denen die Klassen I—VI je 48 Vierecke enthalten, weil nämlich die Spiegelungen an den zugehörigen Seiten in diesen Fällen die volle erweiterte Oktaedergruppe erzeugen. Innerhalb einer Klasse gelten zwei Vierecke auch dann als verschieden, wenn die Transformation, die sie ineinander überführt, zwar ihre Punkte als Gesamtheit in sich, jeden Punkt aber, bis auf endlich viele Ausnahmen, in einen andern überführt. Z. B. wird das Viereck $C_1 C_2 C_3 C_4$ durch eine Drehung in das davon verschiedene Viereck $C_3 C_4 C_1 C_2$ übergeführt, wobei der Punkt A_1 erhalten bleibt. Die Funktionen $u(s)$ sind so definiert, daß sie ein Viereck auf

[2]) Compt. rend. 112 (1891), S. 478—480.

die obere Halbebene konform abbilden. Nach dem Spiegelungsprinzip für analytische Funktionen bilden sie jeweils dann die Vierecke der Klasse abwechselnd auf die obere und untere Halbebene ab. In den Fällen I—VI werden daher 24 Vierecke auf die untere Halbebene abgebildet. Die Funktion $s(u)$ ist daher dann 24-wertig, und die Vieldeutigkeit der Funktion $u(s)$ ergibt sich daraus, wie oft die Vierecke der betreffenden Klasse, die je in ihrer Gesamtheit die Riemannsche Fläche der Funktion $u(s)$ bilden, die s-Ebene bedecken. Man sieht jedenfalls, daß $u(s)$ algebraisch ist. Da ferner ξ, η, ζ überall endlich sind, so sind es Abelsche Integrale erster Gattung.

Die Untersuchung der Perioden der Abelschen Integrale möge an dem Beispiel des Vierecks $A_1 B_4 C_1 C_2$ durchgeführt werden. In den übrigen Fällen läßt sich die Untersuchung in ähnlicher Weise führen. Die Transformationen der erweiterten Oktaedergruppe führen die 48 Vierecke ineinander, also die Riemannsche Fläche der Funktion $u(s)$ in sich über. Es werde die Äquivalenz von zwei Punkten auf der Riemannschen Fläche dadurch definiert, daß zwei Punkte dann äquivalent heißen, wenn sie durch eine Transformation, bei der die Riemannsche Fläche in sich übergeht, ineinander übergeführt werden können. Punkte auf der Riemannschen Fläche sollen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden. Für äquivalente Punkte wird derselbe griechische Buchstabe gesetzt. Die Eckpunkte des Ausgangspolygons sind auf der Riemannschen Fläche nicht paarweise äquivalent. Das Polygon werde daher auf der Riemannschen Fläche mit $\alpha_1 \beta_4 \gamma_1 \delta_2$ bezeichnet. Insbesondere liegen also über den Punkten C der Fig. 2 immer zwei Punkte der Riemannschen Fläche, die mit γ, δ, über den Punken B je drei Punkte, deren einer (und zwar der Eckpunkt) immer mit β bezeichnet ist. Die mit lateinischen Buchstaben bezeichneten Punkte sind gewissermaßen die Projektionen der mit griechischen Buchstaben bezeichneten Punkte in die s-Ebene, über welcher die Riemannsche Fläche ausgebreitet ist. Ein Punkt auf der Riemannschen Fläche soll immer mit demselben Index versehen sein wie sein Projektionspunkt. Wird eine auf der Riemannschen Fläche geschlossene Kurve in die s-Ebene projiziert, so kann die Projektion die volle Begrenzung eines Flächenstückes in der s-Ebene bilden, ohne daß darum auch auf der Riemannschen Fläche von der geschlossenen Kurve ein Flächenstück begrenzt werden muß. Zum Beispiel bildet die geschlossene Kurve $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \beta_2 \alpha_1)$ nicht die Begrenzung eines Flächenstückes auf der Riemannschen Fläche.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Gesamtheit der Kurven, die zu $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \beta_2 \alpha_1)$ äquivalent sind, eine Basis für alle geschlossenen Kurven auf der Riemannschen Fläche bilden. Die Vierecke der Riemannschen Fläche bestehen aus achtmal sechs Vierecken, die sich je einfach zusammen-

hängend um die Punkte δ schließen. Die Riemannsche Fläche setzt sich daher aus diesen acht einfach zusammenhängenden Stücken zusammen. Eine geschlossene Kurve auf der Riemannschen Fläche läßt sich daher stetig in eine solche überführen, die nur aus Randteilen der genannten Stücke besteht. In deren Berandung kommt der Punkt δ nicht mehr vor, und daher ist jede geschlossene Kurve einer solchen homolog, die nur aus Teilen $(\alpha\,\beta)$, $(\beta\,\gamma)$ besteht. Die Projektionen der Teile $(\alpha\,\beta)$, $(\beta\,\gamma)$ in die s-Ebene bilden die Fig. 4. Da über den Punkten A immer nur ein Punkt α, über den Punkten B nur ein Punkt β, und über den Punkten C nur ein Punkt γ liegt, so stellt Fig. 4 ein umkehrbar eindeutiges Abbild der Stücke $(\alpha\,\beta)$, $(\beta\,\gamma)$ dar. Aus Fig. 4 ist nun ersichtlich, daß man jede aus Stücken $(\alpha\,\beta)$, $(\beta\,\gamma)$ bestehende geschlossene Kurve aus Stücken $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\beta\,\alpha)$ zusammensetzen kann. Ist auf der Riemannschen Fläche ein Abelsches Integral gegeben, so lassen sich seine Perioden also aus den Werten des Integrals, erstreckt über die Stücke $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\beta\,\alpha)$, zusammensetzen.

Fig. 4.

Das Integral

$$\zeta = \int 2\,i\,s\left(\frac{d\,u}{d\,s}\right)^2 \Phi(u)\,d\,s$$

bleibt gegenüber den Substitutionen $s' = i\,s$, $s' = \frac{1}{s}$ bis auf einen eventuellen Vorzeichenwechsel invariant. Die Substitutionen der s sollen dabei als Transformationen der Riemannschen Fläche in sich aufgefaßt werden. In bezug auf diese Substitutionen zerfallen die $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\beta\,\alpha)$ der Fig. 4 in drei Klassen, die mit $V_1\,V_2\,V_3$ bezeichnet sind. (In Fig. 4 sind die Bezeichnungen V immer in das Viereck geschrieben, das in der s-Ebene von den Projektionen des zugehörigen Stückes $(\alpha\,\beta\,\gamma\,\beta\,\alpha)$ begrenzt ist.) Die Werte des Integrals ζ, erstreckt über V-Kurven mit demselben unteren Index, sind also gleich. Man erhält also den drei Klassen $V_1\,V_2\,V_3$ entsprechend drei ζ-Werte $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$, die eine dreigliedrige Basis der Perioden von ζ bilden. Nun kann man die Zahl dieser Basiselemente noch um eins verringern, und zwar durch eine lineare Relation zwischen $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$, die man auf folgende Weise erhält. Die Kurve $(\alpha_1\beta_4\gamma_1\beta_9\alpha_2\beta_5\gamma_6\beta_6\alpha_3\beta_{11}\gamma_3\beta_3\alpha_1)$ ist sicher homolog Null, denn sie begrenzt ein aus sechs Vierecken bestehendes einfach zusammenhängendes Flächenstück um δ_3. Die Kurve läßt sich andererseits, wie aus Fig. 4

ersichtlich ist, aus den geschlossenen Kurven $\overset{1}{V}_1 \overset{2}{V}_1 \overset{3}{V}_1 \overset{2}{V}_2 \overset{6}{V}_2 \overset{3}{V}_2 \overset{1}{V}_3 \overset{6}{V}_3 \overset{2}{V}_3$ zusammensetzen. Die Summe der Integrale, erstreckt über diese neun Kurven, ist daher Null. Das liefert die lineare Beziehung: $3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Man hat also in $\omega_1 \omega_2$ eine zweigliedrige Basis für die Perioden von ζ gefunden.

Man schließt nun in bekannter Weise folgendermaßen weiter. Sei $t = \wp\{\zeta, \omega_1 \omega_2\}$ die zu den Perioden $\omega_1 \omega_2$ gehörige Weierstraßsche $\wp$-Funktion, dann ist $t = \wp\{\zeta, \omega_1 \omega_2\}$ auf der Riemannschen Fläche von $u(s)$ eindeutig und bis auf Pole regulär, also eine algebraische Funktion des Körpers $\mathfrak{R}(u, s)$. Andererseits folgt aus der Differentialgleichung für $\wp$: $d\zeta = \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$, wo $g_2 g_3$ die zu $\omega_1 \omega_2$ gehörigen Invarianten sind. Also

$$\zeta = \int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}.$$

Dieselbe Untersuchung kann man an den Integralen ξ, η vornehmen und sie als elliptische Integrale mit denselben Perioden darstellen. An die Stelle der Substitutionen $s' = is$, $s' = \frac{1}{s}$ treten dabei diejenigen Substitutionen, die die Punkte ± 1 für ξ, $\pm i$ für η in sich überführen.

Nach ähnlichen Methoden erhält man für alle sechs Typen von Vierecken entsprechende Resultate, und es gilt also der Satz:

Die Integrale, deren Realteile die Koordinaten periodischer Minimalflächen darstellen, lassen sich durch algebraische Substitutionen in elliptische Integrale erster Gattung überführen.

§ 4.

Konstruktion der algebraischen Funktionen $u(s)$.

Nach den Ausführungen des § 2 gibt es genau sechs verschiedene periodische Minimalflächen, die zu den Vierecken der Fig. 2:

1. $A_1 B_4 C_1 B_1$ 2. $A_1 A_5 C_5 A_2$ 3. $A_1 C_1 A_2 C_2$
4. $A_1 B_4 C_1 C_2$ 5. $A_1 B_4 A_2 C_2$ 6. $A_1 B_4 A_2 B_{10}$

gehören. Die Fälle 1., 2., 3., die sich durch besondere Symmetrien auszeichnen, sind von Schwarz und Neovius behandelt worden. Im folgenden sollen die zu den Fällen 4. bis 6. gehörigen Funktionen $u(s)$, (die nach § 3 algebraisch sind), untersucht werden.

Zur Bestimmung der Vieldeutigkeit hat man nach § 3 immer nur zu überlegen, wie oft die 48 äquivalenten Vierecke die s-Ebene überdecken. Diese Anzahl kann auf der durch die Formel (2) des § 1 der s-Ebene zugeordneten Einheitskugel folgendermaßen bestimmt werden. Bedeckt

die Riemannsche Fläche die Einheitskugel n-fach, so ist der Inhalt der Riemannschen Fläche gleich $4n\pi$. Andererseits ist dieser Inhalt gleich 48 mal dem Inhalt eines sphärischen Vierecks, das wegen der konformen Abbildung dieselben Winkel hat wie das entsprechende Viereck in der s-Ebene. Der Inhalt eines sphärischen Vierecks ist gleich dem Überschuß seiner Winkelsumme über 2π. Man bestimmt daher die Zahl n aus der Formel $48E = 4n\pi$, wo E den sphärischen Exzeß des zugehörigen Vierecks bedeutet. Man errechnet für die sechs Fälle

1. $A_1 B_4 C_1 B_1$ $n = 2$,
2. $A_1 A_5 C_5 A_2$ $n = 8$,
3. $A_1 C_1 A_2 C_2$ $n = 4$,
4. $A_1 B_4 C_1 C_2$ $n = 3$,
5. $A_1 B_4 A_2 C_2$ $n = 5$,
6. $A_1 B_4 A_2 B_{10}$ $n = 6$.

In den Fällen 4. bis 6. genügen die Funktionen $u(s)$ daher Gleichungen

4. $u^3 + R_1(s)\,u^2 + R_2(s)\,u + R_3(s) = 0$,
5. $u^5 + R_1(s)\,u^4 + R_2(s)\,u^3 + R_3(s)\,u^2 + R_4(s)\,u + R_5(s) = 0$,
6. $u^6 + R_1(s)\,u^5 + R_2(s)\,u^4 + R_3(s)\,u^3 + R_4(s)\,u^2 + R_5(s)\,u + R_6(s) = 0$.

Die Funktionen R sind rationale Funktionen von s und haben, wenn sie nicht konstant sind, nach § 3, da $s(u)$ 24-wertig ist, die Ordnung 24. Da die Funktion $u(s)$ bei den Substitutionen der Oktaedergruppe invariant bleibt, so sind die $R(s)$ rationale Invarianten der Oktaedergruppe und sind daher lineare Funktionen der Fundamentalinvariante

$$H(s) = \frac{s^4(s^4-1)^4}{(s^8+14s^4+1)^3}.$$

Es werde noch bemerkt, daß die Polynome

$$A(s) = s(s^4-1), \quad B(s) = s^{12} - 33s^8 - 33s^4 + 1, \quad C(s) = s^8 + 14s^4 + 1,$$

zwischen denen die Identität $108A^4 + B^3 - C^3 = 0$ besteht, bzw. die Punkte A, B, C zu Nullstellen haben. Kann von einer der Funktionen R nachgewiesen werden, daß sie weniger als 24 Pole oder Nullstellen hat, so ist sie nach dem obigen eine Konstante. Bleibt bei der Transformation eines Vierecks der s-Ebene in ein davon (auf der Riemannschen Fläche) verschiedenes Viereck ein Punkt der s-Ebene erhalten, so nimmt die Funktion $u(s)$ in beiden Vierecken an dieser Stelle entweder denselben, oder konjugiert komplexen Wert an. Denn nach dem Spiegelungsprinzip für analytische Funktionen entsprechen Punkten der s-Ebene, die durch Spiegelung an den Polygonseiten der Fig. 2 auseinander hervorgehen,

solche u-Werte, die durch Spiegelung an der reellen u-Achse ineinander übergeführt werden können. Diese Bemerkung liefert ein Verfahren, um Doppelpunkte der Funktion $u(s)$ aufzufinden. Im folgenden wird diese Tatsache als das Doppelpunktverfahren zur Bestimmung der Konstanten angewendet werden.

4. Man kann bei der Abbildung von $A_1 B_4 C_1 C_2$ drei u-Werte willkürlich vorgeben (da die Transformation der u-Halbebene in sich durch drei Konstanten bestimmt ist). Man setze fest: $A_1 \to 0$, $C_2 \to -1$, $C_1 \to \infty$. In der Umgebung von A_1 wird der Winkel $\frac{3}{4}\pi$ in π übergeführt. An dieser Stelle ist daher u eine Potenzreihe von $s^{1/3}$, die mit $s^{4/3}$ beginnt. Die Gerade $A_1 B_4$ geht in ein Stück der positiven reellen u-Achse und die Gerade $A_1 C_2$ in ein Stück der negativen reellen Achse über. Es können daher nur ganzzahlige Potenzen von $s^{4/3}$ auftreten. Die Entwicklungen an A_1 sind also

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 s^{4/3} + a_1 s^{8/3} + \ldots, \\ u_2 &= \varepsilon a_0 s^{4/3} + \varepsilon^2 a_1 s^{8/3} + \ldots, \\ u_3 &= \varepsilon^2 a_0 s^{4/3} + \varepsilon a_1 s^{8/3} + \ldots, \qquad a_0 \neq 0,\ \varepsilon^3 = 1,\ \varepsilon \neq 1. \end{aligned}$$

Über den Punkten C liegt C_2 entsprechend ein regulärer Punkt, für den $u = -1$, und C_1 entsprechend ein einfacher Verzweigungspunkt, für den $u = \infty$. Die Entwicklungen über $c = \frac{1 \pm i}{2}(\sqrt{3} - 1)$ lauten also

$$\begin{aligned} u_1 &= -1 + b_1 (s-c) + \ldots, \\ u_2 &= c_1 (s-c)^{-3/2} + c_2 (s-c)^{-1} + \ldots, \\ u_3 &= -c_1 (s-c)^{-3/2} + c_2 (s-c)^{-1} + \ldots \end{aligned}$$

Man erhält daher für die rationalen Funktionen R folgendes: $R_1 = -(u_1 + u_2 + u_3)$ hat über C höchstens einen einfachen Pol, im ganzen also höchstens 8 Pole, ist also konstant, und zwar wegen der Entwicklung an A identisch Null.

$$R_2 = u_1 u_3 + u_1 u_2 + u_2 u_3$$

hat an C höchstens dreifache Pole und an A mindestens vierfache Nullstellen. Dasselbe gilt für $R_3 = -u_1 u_2 u_3$, und man erhält

$$R_2 = k_2 \cdot H(s), \qquad R_3 = k_3 \cdot H(s),$$

und die Gleichung für u lautet

$$F(u, s) = u^3 + (k_2 u + k_3) H(s) = 0,$$

wo die Konstanten k_2, k_3 zu bestimmen sind. Das geschieht nach dem Doppelpunktverfahren. Bei der Transformation des Vierecks $A_1 B_4 C_1 C_2$ in das Viereck $A_1 B_2 C_2 C_1$ geht der auf $(C_1 C_2)$ liegende Punkt B_1 in sich über. Da er dem Rande eines Vierecks angehört, so nimmt $u(s)$ an den

beiden zugehörigen Stellen der Riemannschen Fläche denselben Wert an, und es gilt hier daher simultan

$$F(u,s) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u}(u,s) = 0$$

und durch Elimination

$$u^2\left(2u + 3\frac{k_3}{k_2}\right) = 0.$$

Aus $u(c) = -1$ schließt man

$$-C^3(c) + A^4(c)\{-k_2 + k_3\} = 0$$

und hieraus, wegen

$$C(c) = 0, \quad A(c) \neq 0, \quad k_2 = k_3;$$

daher hat u in B_1 den Wert $-\frac{3}{2}$. In B_1 verschwindet nun $B(s)$, folglich wegen der Identität $108A^4 + B^2 - C^3 = 0$

$$H(s) = \tfrac{1}{108}.$$

Also

$$-\tfrac{27}{8} + k_3\tfrac{1}{108}(-\tfrac{1}{2}) = 0 \;\therefore\; k_3 = k_2 = -729.$$

Die Gleichung für u lautet also

$$u^3 - 729\frac{s^4(s^4-1)^4}{(s^8+14s^4+1)^3}(u+1) = 0.$$

Um auch $\Phi(u)$ zu bestimmen, beachte man, daß in B_4 die Gleichung

$$u^3 - \tfrac{729}{108}(u+1) = 0$$

mit $u \neq -\frac{3}{2}$ erfüllt ist, woraus $B_4 \to 3$ folgt. Es ist also

$$\Phi(u) = \frac{1}{u(u+1)(u-3)}.$$

5. $A_1 B_4 A_2 C_2$. Man setze fest: $A_1 \to 0$, $B_4 \to 1$, $A_2 \to \infty$. Entsprechend wie in 4. folgt an A_1

$$\begin{aligned} u_1 &= a_0 s^{4/3} + a_1 s^{8/3} \ldots, \\ u_2 &= \varepsilon a_0 s^{4/3} + \varepsilon^2 a_1 s^{8/3} + \ldots, \\ u_3 &= \varepsilon^2 a_0 s^{4/3} + \varepsilon a_1 s^{8/3} + \ldots, \\ u_4 &= b_0 s^{-2} + b_1 + \ldots, \\ u_5 &= -b_0 s^{-2} + b_1 + \ldots \end{aligned}$$

Man rechnet wieder wie oben, daß R_1, R_3, R_4, R_5 Konstanten sind, während $R_2 = \lambda + \frac{l'}{H(s)}$ angesetzt werden kann. Nach dem Doppelpunktverfahren findet man für die Funktionswerte über

$$\begin{aligned} B &: u, \bar{u}, 1, u, \bar{u}; \\ C &: -\mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{w}, \mathfrak{w}, -\mathfrak{v}, \end{aligned}$$

wo $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ positive reelle Zahlen sind.

Man berechne aus diesen Werten die Konstanten R_1, R_3, R_4, R_5 an B und C und setze entsprechende Funktionen einander gleich. Man erhält so die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-R_1 &= 2(u+\bar{u})+1 && = 3\mathfrak{w}-2\mathfrak{v},\\
-R_3 &= 4u\bar{u}+u^2+\bar{u}^2+2u\bar{u}(u+\bar{u}) && = 3\mathfrak{v}^2\mathfrak{w}-6\mathfrak{v}\mathfrak{w}^2+\mathfrak{w}^3,\\
R_4 &= u^2\bar{u}^2+2u\bar{u}(u+\bar{u}) && = 3\mathfrak{v}^2\mathfrak{w}^2-2\mathfrak{v}\mathfrak{w}^3,\\
-R_5 &= u^2\bar{u}^2 && = \mathfrak{v}^2\mathfrak{w}^3.
\end{aligned}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems setze man:

$$u+\bar{u}=q, \qquad u\bar{u}=p, \qquad \mathfrak{w}=t^2.$$

Man berechnet aus der ersten, dritten, vierten Gleichung die Werte $p, \mathfrak{v}, q$ in Abhängigkeit von t. Geht man damit in die zweite Gleichung, so erhält man eine Gleichung sechsten Grades in t:

$$4t^6+8t^5-5t^4-20t^3-10t^2+4t+3=0.$$

Sie hat die vierfache Lösung $t=-1$ und die Lösungen $t=\frac{1}{2}$, $t=\frac{3}{2}$. Von diesen ist nur die Lösung $t=\frac{3}{2}$ zu gebrauchen, damit $\mathfrak{v}$ von Null verschieden ist. Daraus erhält man

$$R_1=\tfrac{5}{4}, \qquad R_3=\tfrac{135}{64}, \qquad R_4=\tfrac{1215}{8}, \qquad R_5=-\tfrac{729}{4}.$$

λ, μ errechnet man, indem man in die Gleichung spezielle Werte einsetzt.

Es werde noch $\Phi(u)$ angeschrieben:

$$\Phi(u)=\frac{1}{u(u-1)(u+4)}.$$

6. $A_1 B_4 A_2 B_{10}$. Man setze fest $A_1 \to 0$, $B_4 \to 1$, $A_2 \to \infty$ und setze unbestimmt an $B_{10} \to \mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}$ eine reelle negative Zahl ist. Man erhält an A_1 die Entwicklung

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_0 s^{4/3}+\ldots,\\
u_2 &= \varepsilon a_0 s^{4/3}+\ldots,\\
u_3 &= \varepsilon^2 a_0 s^{4/3}+\ldots,\\
u_4 &= b_0 s^{-4/3}+\ldots,\\
u_5 &= \varepsilon b_0 s^{-4/3}+\ldots,\\
u_6 &= \varepsilon^2 b_0 s^{-4/3}+\ldots, \qquad a_0\neq 0, \quad b_0\neq 0, \quad \varepsilon^3=1, \quad \varepsilon\neq 1
\end{aligned}$$

und folgert hieraus weiter: R_1, R_2, R_4, R_5, R_6 sind konstant. Nach dem Doppelpunktverfahren findet man für die Funktionswerte über B: $x, \bar{x}, 1, x, \bar{x}, \mathfrak{a}$; C: y, z, y, z, y, z. Die Bedingung dafür, daß R_1, R_2, R_4, R_5, R_6 Konstante sind, liefert

$$\begin{aligned}
2(x+\bar{x})+\mathfrak{a}+1 &= 3(y+z),\\
2(x+\bar{x})+\mathfrak{a}+4x\bar{x}+2\mathfrak{a}(x+\bar{x})+x^2+\bar{x}^2 &= 9yz+3(y^2+z^2),\\
x^2\bar{x}^2+2(\mathfrak{a}+1)x\bar{x}(x+\bar{x})+\mathfrak{a}(x^2+\bar{x}^2+4x\bar{x}) &= 3yz(y^2+z^2)+9y^2z^2,\\
x^2\bar{x}^2(\mathfrak{a}+1)+2x\bar{x}\mathfrak{a}(x+\bar{x}) &= 3y^2z^2(y+z),\\
\mathfrak{a}x^2\bar{x}^2 &= y^3z^3.
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann man durch folgende Bemerkung auflösen. Diejenige Transformation, die $A_1 B_4 A_2 B_{10}$ in sich überführt, führt über $A_1 \leftrightarrow A_2$, $B_4 \leftrightarrow B_{10}$, entspricht daher in der u-Ebene einer linearen Transformation, bei der $0 \leftrightarrow \infty$, $\mathfrak{a} \leftrightarrow 1$ gilt.

Die Transformation der u-Ebene heißt daher $u' = \mathfrak{a}/u$. Die Fixpunkte $\pm i\sqrt{|\mathfrak{a}|}$ sind die Doppelwerte von u über B. Also

$$x = i\sqrt{|\mathfrak{a}|}, \qquad \bar{x} = -i\sqrt{|\mathfrak{a}|}.$$

Dieselbe Transformation führt auch y in z über. Es gilt daher $y = \mathfrak{a}/z$, das obige Gleichungssystem reduziert sich also auf:

$$\mathfrak{a} + 1 = 3\left(y + \frac{\mathfrak{a}}{y}\right)$$

$$-\mathfrak{a} = 9\,\mathfrak{a} + 3\left(y^2 + \frac{\mathfrak{a}^2}{y^2}\right).$$

Man rechnet weiter:

$$\mathfrak{a}^2 + 5\,\mathfrak{a} + 1 = -9\,\mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{a}^2 + 14\,\mathfrak{a} + 1 = 0, \qquad \mathfrak{a} = -7 \pm 4\sqrt{3},$$

$$y^2 + \frac{\mathfrak{a}^2}{y^2} = -\frac{10}{3}\,\mathfrak{a},$$

folglich:

$$y^2 = -\frac{5}{3}\,\mathfrak{a} \pm \frac{4}{3}\,\mathfrak{a},$$

$$y_1^2 = -\frac{1}{3}\,\mathfrak{a}, \qquad y_2^2 = -3\,\mathfrak{a}.$$

Aus dem Viereck $A_1 B_4 A_2 B_{10}$ sieht man, daß, falls $C_1 \to y$, $y > 1$. Daher kommt nur $\mathfrak{a} = -7 - 4\sqrt{3}$ in Frage und für y die beiden Werte $y_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$, $y_2 = 3 + 2\sqrt{3}$. Von diesen befindet sich nur $y = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ mit der Gleichung $\mathfrak{a} + 1 = 3\left(y + \frac{\mathfrak{a}}{y}\right)$ in Einklang. Man erhält daher endgültig:

$$y = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \qquad \mathfrak{a} = -(7 + 4\sqrt{3})$$

und errechnet nun

$$R_1 = 6 + 4\sqrt{3} = -\mathfrak{a} - 1,$$

$$R_2 = 7 + 4\sqrt{3} = -\mathfrak{a},$$

$$R_4 = -97 - 56\sqrt{3} = -\mathfrak{a}^2,$$

$$R_5 = 1254 + 724\sqrt{3} = -\mathfrak{a}^2(\mathfrak{a} + 1),$$

$$R_6 = -1351 - 780\sqrt{3} = \mathfrak{a}^3.$$

Man hat nun noch die rationale Funktion $R_3(s)$ zu bestimmen. Setzt man an $R_3 = \lambda + \frac{\mu}{H(s)}$, so heißt also die Gleichung zwischen u und s:

$$u^6 - (\mathfrak{a}+1)u^5 - \mathfrak{a}u^4 + \left(\lambda + \frac{\mu}{H(s)}\right)u^3 - \mathfrak{a}^2u^2 - \mathfrak{a}^2(\mathfrak{a}+1)u + \mathfrak{a}^3 = 0.$$

Man bestimmt λ, μ, indem man spezielle Wertepaare in die Gleichung einsetzt.

Es werde wieder $\Phi(u)$ angeschrieben:

$$\Phi(u) = \frac{1}{u(u-1)(u+7+4\sqrt{3})}.$$

§ 5.

Die Ausführung der Transformation.

In § 3 wurde gezeigt, daß die Integrale, deren Realteile die Koordinaten der periodischen Minimalflächen darstellen, durch algebraische Substitutionen in elliptische Integrale übergeführt werden können. Diese Transformation soll im Falle des Vierecks $A_1 B_4 C_1 C_2$, an dem auch der Beweis exemplifiziert wurde, durchgeführt werden. Die Transformation wird nur für ζ ausgeführt werden, da, wie in § 3 angegeben, ξ, η durch lineare Substitution aus ζ hervorgehen. Dabei werden Begriffsbildungen der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen von Hensel und Landsberg, die an Ort und Stelle erklärt werden, zur Anwendung kommen.

Sei also nach § 3: $t = \wp\{\zeta, \omega_1, \omega_2\}$ diejenige Funktion des Körpers $\mathfrak{R}(u,s)$, die das Integral in die Weierstraßsche Normalform transformiert, die also die Differentialgleichung $d\zeta = \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$ löst. Umgekehrt ist durch diese Differentialgleichung nach Wahl der Integrationskonstanten die Funktion t eindeutig definiert. Insbesondere ist die Ordnung der Funktion auf der Riemannschen Fläche (u,s) eindeutig festgelegt. Zur Bestimmung dieser Ordnung sehe man nach, an welchen Stellen der Riemannschen Fläche nach Fixierung der unteren Grenze das Integral ζ Werte $\zeta_0 \equiv 0(\omega_1, \omega_2)$ annimmt. Diese Werte kann man dadurch bestimmen, daß man die Abbildung untersucht, die das Integral ζ von der Riemannschen Fläche entwirft. Hat man die Riemannsche Fläche durch Zerschneiden längs eines Systemes von p Rückkehrsschnittpaaren einfach zusammenhängend gemacht, so ist das Bild der zerschnittenen Riemannschen Fläche über der ζ-Ebene eine aus p parallelogrammartigen Figuren zusammengesetzte Fläche. (Siehe Riemann, „Theorie der Abelschen Funktionen", Art. 12). Indem man die Werte des Integrals, erstreckt über die Rückkehrschnittpaare ausrechnet, erhält man eine Höchstanzahl für die Stellen $\zeta_0 \equiv 0(\omega_1, \omega_2)$ auf den parallelogrammartigen Figuren. Kennt

man ein System linear unabhängiger Rückkehrschnitte, so kann man nach § 3 die entsprechenden Integralwerte finden. Da aber die Auffindung eines solchen Systems etwas mühsam ist, so ist dieser Weg zur Bestimmung der Ordnung von t hier nicht beschritten worden. Von Bedeutung ist es nur, daß man eine Höchstanzahl für die Ordnung von t durch endlich viele Operationen angeben kann, daß also das Transformationsproblem finit ist. Es wird später für eine Funktion von möglichst niedriger Ordnung direkt gezeigt, daß sie das Problem löst.

Man normiere t zunächst durch Angabe der unteren Grenze des Integrals:

$$t = \wp \left\{ \int_1 2 i s \left(\frac{d u}{d s}\right)^2 \Phi(u)\, d s, \omega_1, \omega_2 \right\}.$$

Dadurch wird t invariant gegenüber der durch $s' = i s$, $s' = 1/s$ erzeugten Untergruppe der Oktaedergruppe. (Sofern man die Substitutionen in dem im § 3 erklärten Sinne als Transformationen der Riemannschen Fläche in sich auffaßt.) Denn bei $s' = 1/s$ ändert ζ sein Vorzeichen, $\wp$ ist aber gerade. Bei $s' = i s$ ändert sich ζ um den Wert $\int_1^i \ldots d s$, der gleich einer Periode ist. Man kann nämlich den Weg $(1 \ldots i)$ speziell so wählen, daß er durch den Nullpunkt geht und aus zwei Teilen besteht, die durch $s' = i s$ auseinander hervorgehen. Für diesen Weg ist das Integral dann Null. t gehört daher sogar dem Körper $\Re\left(u, s^4 + \frac{1}{s^4}\right)$ an. Es liegt also nahe, die Untersuchung in diesem Körper vorzunehmen. Es ist

$$\Phi(u) = \frac{1}{u(u+1)(u-3)},$$

und die zu lösende Differentialgleichung lautet

$$\text{(I)} \qquad 2 i s \left(\frac{d u}{d s}\right)^2 \frac{d s}{u(u+1)(u-3)} = \frac{d t}{\sqrt{4 t^3 - g_2 t - g_3}},$$

wo s und u durch die Gleichung

$$\text{(II)} \qquad u^3 - 729 H(s)(u+1) = 0$$

miteinander verbunden sind und $t = R(u, s)$ ist. Man gehe zu dem Körper $\Re\left(u, s^4 + \frac{1}{s^4}\right)$ in der Weise über, daß man setzt: $s^4 + \frac{1}{s^4} + 14 = \frac{48}{v}$, wodurch (I), (II) in folgende Gleichungen transformiert werden:

$$\text{(I')} \qquad \frac{4 i}{\sqrt{3}} \frac{v \sqrt{(v-3)(v-4)}}{u(u+1)(u-3)} \left(\frac{d u}{d v}\right)^2 d v = \frac{d t}{\sqrt{4 t^3 - g_2 t - g_3}},$$

$$\text{(II')} \qquad u^3 - \frac{27}{16} v (v-3)^2 (u+1) = 0.$$

Die linke Seite von (I') werde im folgenden auch kurz mit $D(u, v)$ bezeichnet. Es seien einige Begriffe aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen vorausgeschickt. Sei ein Funktionenkörper $\mathfrak{R}(x, y)$ gegeben, so sollen mit (x, y) kurz die Stellen der zum Körper gehörigen Riemannschen Fläche bezeichnet werden. Diese Stellen sind, abgesehen von den mehrfachen Punkten der Funktion $y(x)$, durch die Angabe der Werte x, y eindeutig definiert. Sei f eine Körperfunktion und τ eine zur Stelle (x, y) gehörige Ortsuniformisierende, so wird (x, y) eine Nullstelle ν-ter Ordnung von f genannt, wenn die Entwicklung von f nach Potenzen von τ mit der ν-ten Potenz von τ beginnt. Ebenso heißt (x, y) eine Nullstelle ν-ter Ordnung des Differentials df, wenn $\frac{df}{d\tau}$ mit der ν-ten Potenz von τ beginnt. Eine Funktion, bzw. ein Differential des Körpers, wird einem Divisor $\frac{(x_1, y_1)^{\nu_1} \dots}{(a_1, b_1)^{\mu_1} \dots}$ gleichgesetzt, wenn die Stellen (x, y) Nullstellen ν-ter, die Stellen (a, b) Pole μ-ter Ordnung der Funktion, bzw. des Differentials, sind. Durch Angabe des Divisors ist eine Funktion bzw. ein Differential bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Unter der Ordnung eines Divisors wird die Differenz der Anzahlen der Stellen, jede in der richtigen Weise gezählt, in Zähler und Nenner aufgefaßt. Der Divisor einer Funktion hat die Ordnung Null, d. h. eine Funktion hat auf der Riemannschen Fläche ebensoviel Nullstellen wie Pole. Es gilt bekanntlich ferner die wichtige Tatsache: Der Divisor eines Differentials ist von der Ordnung $d = 2p - 2$, wo p das Geschlecht des Körpers bedeutet.

$\{D(u, v)\}^2$ ist ein Produkt aus Funktionen und Differentialen in $\mathfrak{R}(u, v)$. Die Lösung der Differentialgleichung (I') geschieht nun in der Weise, daß der zu $\{D(u, v)\}^2$ in $\mathfrak{R}(u, v)$ gehörige Divisor errechnet und $\frac{dt^2}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}$ diesem Divisor gleichgesetzt wird. Dabei ist $4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)$ gesetzt. Es ergibt sich dann sofort das Geschlecht des Körpers $\mathfrak{R}(u, v)$, und daraus kann man den Divisor einer lösenden Funktion t bestimmen. Da man für das Geschlecht p den Wert $p = 1$ erhält, so wird man t aus seinem Divisor nach der Theorie der elliptischen Funktionen bestimmen können. Man berechnet die Nullstellen und Pole der Differentiale und Funktionen $du, dv, u, v, u + 1, u - 3, v - 3, v - 4$ ohne viel Mühe aus (II') in gewöhnlicher Weise und erhält:

$$u = \frac{(0,0)\,(0,3)^2}{(\infty,\infty)^3}; \qquad u + 1 = \frac{(-1,\infty)^3}{(\infty,\infty)^3}; \qquad u - 3 = \frac{(3,1)^2\,(3,4)}{(\infty,\infty)^3},$$

$$v = \frac{(0,0)^3}{(-1.\infty)\,(\infty,\infty)^2}; \quad v - 3 = \frac{(0,3)^3}{(-1,\infty)\,(\infty,\infty)^2}; \quad v - 4 = \frac{(3,4)\,(-\frac{3}{2},4)^2}{(-1,\infty)\,(\infty,\infty)^2},$$

$$du = \frac{(0,3)\,(3,1)\,(-1,\infty)^2}{(\infty,\infty)^4}, \qquad dv = \frac{(0,0)^2\,(0,3)^2\,(-\frac{3}{2},4)}{(-1,\infty)^2\,(\infty,\infty)^3},$$

folglich durch Multiplikation:

$$\frac{v^2(v-3)(v-4)}{u^2(u+1)^2(u-3)^2}\cdot\frac{du^4}{dv^2}=\frac{(-1,\infty)^2}{(0,3)(3,4)}.$$

Man hat daher t aus der Gleichung

$$\text{(III)}\qquad \frac{dt^2}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}=\frac{(-1,\infty)^2}{(0,3)(3,4)}$$

zu bestimmen. Aus den obigen Formeln ersieht man, daß alle Differentiale die Ordnung Null haben. Aus $2p-2=0$ folgt daher $p=1$. $\mathfrak{R}(u,v)$ ist daher ein Körper elliptischer Funktionen. Das uniformisierende Argument möge im folgenden mit z bezeichnet werden, so daß u,v,t elliptische Funktionen von z sind. Die Funktion $t=\wp\{\zeta,\omega_1,\omega_2\}$ hat auf der Riemannschen Fläche (u,s) Pole an den Stellen $u=0$, $s=\pm 1$, $\pm i$, $u=3$, $s=\frac{1\pm i}{\pm\sqrt{2}}$. An diesen Stellen nimmt nämlich das Integral ζ Werte $\zeta_0\equiv 0\,(\omega_1,\omega_2)$ an. Für die letzten vier Stellen insbesondere sieht man dies nach § 3 ein. Ob t noch andere Pole auf der Riemannschen Fläche hat, bleibe vorläufig dahingestellt. Jedenfalls wird t in (u,v) die Stellen $(0,3)(3,4)$ zu Polen haben. Man setze daher versuchsweise an: $t=\frac{\cdots\cdots}{(0,3)(3,4)}$ und gehe mit diesem Ansatz in die Gleichung (III) ein. Man sieht zunächst, daß es eine Funktion gibt, die die Stellen $(0,3)(3,4)$ (und keine weiteren) zu Polen erster Ordnung hat; denn schreibt man die linke Seite der Gleichung (III) in dem uniformisierenden Argument z, so wird das Differential dt^2 eine elliptische Funktion; denn die Ableitung einer elliptischen Funktion gehört wieder demselben elliptischen Funktionenkörper an. Die linke Seite der Gleichung (III) werde als Körperfunktion mit $t-e_4$ bezeichnet, also

$$\text{(IV)}\qquad t-e_4=\frac{(-1,\infty)^2}{(0,3)(3,4)}.$$

Das Differential dt hat vier Nullstellen, da t zwei Pole erster Ordnung hat. Die drei weiteren Nullstellen mögen mit $(u_1,v_1)(u_2,v_2)(u_3,v_3)$ bezeichnet werden. Man setze nun an:

$$t-e_1=\frac{(u_1,v_1)^2}{(0,3)(3,4)},\quad t-e_2=\frac{(u_2,v_2)^2}{(0,3)(3,4)},\quad t-e_3=\frac{(u_3,v_3)^2}{(0,3)(3,4)},$$

dann ist

$$\frac{dt^2}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}=\frac{(-1,\infty)^2}{(0,3)(3,4)},$$

t löst also die Differentialgleichung.

Der Wert e_4, den t an der Stelle $(-1,\infty)$ annimmt, ist durch die Gleichung $e_1+e_2+e_3=0$ bestimmt.

Zwecks Darstellung der Funktion t als Körperfunktion und Berechnung der Werte e_1,e_2,e_3 werde der Körper $\mathfrak{R}(u,v)$ birational in die Normal-

form transformiert. Man setze $u + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}\lambda(v-1)$, wodurch (II') übergeht in $3\lambda(v-3)^2 - (\lambda+2)(\lambda-1)^2(v-3) - 2(\lambda-1)^3 = 0$, und dann $v - 3 = \frac{\lambda-1}{3\lambda}\mu$, also $\lambda^2(\mu+6) + \lambda(\mu-6) - \mu(\mu+2) = 0$, die Gleichung einer C_3.

Es wird $\lambda = \frac{1}{2\mu+12}\left(-\mu+6+\sqrt{4\mu^3+33\mu^2+36\mu+36}\right)$ oder, wenn endlich noch die Substitution $\mu = \varrho - \frac{11}{4}$ ausgeführt wird,

$$\lambda = \frac{1}{2\varrho+\frac{13}{2}}\left(-\varrho+\frac{35}{4}+\sqrt{4\varrho^3-\frac{219}{4}\varrho+\frac{827}{8}}\right).$$

Es bedeute nun $P(z)$ die zu den damit erhaltenen Invarianten $G_2 = \frac{219}{4}$, $G_3 = -\frac{827}{8}$ des Körpers $\mathfrak{R}(u,v)$ gehörige $\wp$-Funktion, also $\varrho = P(z)$, $\varrho' = P'(z) = \sqrt{4\varrho^3 - \frac{219}{4}\varrho + \frac{827}{8}}$. Stellt man die Stellen der Riemannschen Fläche in ϱ, ϱ' dar, so wird aus (IV)

$$t - e_4 = \left.\frac{\left(\frac{3}{4}, -8\right)^2}{\left(\frac{11}{4}, 6\right)\left(\frac{35}{4}, 48\right)}\right|_{\varrho,\varrho'},$$

wo der angehängte Index andeutet, daß der Divisor in ϱ, ϱ' geschrieben ist. Man kann dann die Funktion t in der Form darstellen:

$$\text{(V)} \qquad t = c\frac{P(z-z_0)-b}{P(z-z_0)-a}.$$

Die Werte des Arguments z, an denen t unendlich wird, werden mit z_1, z_2 bezeichnet. Die Ableitung von t verschwindet, wie man auf Grund der Darstellung (V) sieht, an den Stellen $P(z-z_0) = E_1, E_2, E_3, \infty$, wenn mit E_1, E_2, E_3 die Lösungen der Gleichung

$$4E^3 - \frac{219}{4}E + \frac{827}{8} = 0$$

bezeichnet werden. Die zugehörigen Argumente, unter denen z_0 vorkommt, werden mit $z_0^{(1)}\, z_0^{(2)}\, z_0^{(3)}\, z_0^{(4)}$ bezeichnet. Dann genügen die Werte $z_0^{(k)}$ der Kongruenz

$$2z_0^{(k)} \equiv z_1 + z_2\,(\alpha_1, \alpha_2),$$

wo $\alpha_1\, \alpha_2$ die Perioden des Körpers $\mathfrak{R}\{u(z)\, v(z)\}$ bedeuten. Eine von diesen Stellen ist $P(z_0^{(k)}) = \frac{3}{4}$, $P'(z_0^{(k)}) = -8$. In dem Ansatz (V) sei z_0 das zu dieser Stelle gehörige Argument. Man erhält dann jedenfalls eine Funktion t, die die Gleichung (III) löst, wenn man a, b, c auf folgende Art passend wählt. Man kennt

$$P(z_1) = \tfrac{11}{4}, \qquad P(z_2) = \tfrac{35}{4}, \qquad P(z_0) = \tfrac{3}{4},$$
$$P'(z_1) = 6, \qquad P'(z_2) = 48, \qquad P'(z_0) = -8$$

und berechnet a nach dem Additionstheorem der $\wp$-Funktion:

$$a = P(z_1 - z_0) = -\tfrac{13}{4}.$$

b berechnet man aus der Gleichung

$$e_1 + e_2 + e_3 = c \sum_{i=1}^{3} \frac{E_i - b}{E_i + \frac{13}{4}} = 0$$

zu $b = -\frac{37}{4}$, da

$$E_1 E_2 + E_1 E_3 + E_2 E_3 = -\tfrac{219}{16}, \qquad E_1 E_2 E_3 = -\tfrac{827}{32},$$

und schließlich

$$-\tfrac{1}{4} g_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_1 e_3 = -\tfrac{51}{4} c^2,$$
$$\tfrac{1}{4} g_3 = e_1 e_2 e_3 = -\tfrac{71}{4} c^3.$$

Die Konstante c findet man aus (I'), indem man einen speziellen Wert einsetzt. Die Rechnung werde für $u = 0$, $v = 0$ ausgeführt.

Sei also an der Stelle $u = 0$, $v = 0$ (I'), zu berechnen. Nachdem die Uniformisierende z des Körpers festgelegt ist, kommt einem Differential an jeder Stelle ein Zahlenwert zu. Unter dem Wert des Differentials dv wird der Wert des Differentialquotienten $\frac{dv}{dz}$ verstanden. Man rechnet:

(A) $$\frac{du}{dv}\,\frac{v}{u} = \frac{1}{3} \quad \text{für} \quad u = 0,\ v = 0.$$

Denn:

a) $$u^3 - \frac{27}{16} v (v-3)^2 (u+1) = 0.$$

Durch Differenzieren:

b) $$3u^2 - \frac{27}{16} v (v-3)^2 - \frac{27}{16} 3 (v-1)(v-3) \frac{dv}{du} (u+1) = 0.$$

Aus a) folgt:

$$\frac{u^3}{v} = \frac{27}{16}(v-3)^2 (u+1) \to \frac{27}{16} \cdot 9, \quad \text{wenn} \quad u \to 0,\ v \to 0.$$

Aus b) folgt:

$$\frac{u}{v}\,\frac{dv}{du}\,\frac{27}{16} \cdot 9 \to \frac{3u^3}{v} \to \frac{3 \cdot 27}{16} \cdot 9.$$

Daraus folgt:

$$\frac{u}{v}\,\frac{dv}{du} \to 3.$$

(B) $$du = 9 \quad \text{für} \quad u = 0,\ v = 0;$$

denn aus

$$u + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}\lambda (v-1), \qquad v - 3 = \frac{\lambda - 1}{3\lambda}\mu, \qquad \mu = \varrho - \frac{11}{4},$$
$$\varrho' = \lambda\left(2\varrho + \frac{13}{2}\right) + \varrho - \frac{35}{4},$$
$$\lambda^2 (\mu + 6) - \mu(\mu + 2) + \lambda(\mu - 6) = 0$$

folgt simultan

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \lambda = -2, \quad \mu = -6, \quad \varrho = -\tfrac{13}{4},$$
$$\varrho' = -12, \qquad d\mu = d\varrho = -12,$$
$$2\lambda d\lambda(\mu+6) + \lambda^2 d\mu + d\lambda(\mu-6) + \lambda d\mu - 2\mu d\mu - 2 d\mu = 0,$$

folglich

$$d\lambda = -12,$$
$$du = \tfrac{3}{4} d\lambda (v-1) + \tfrac{3}{4}\lambda dv = \tfrac{3}{4}(-1)(-12) - \tfrac{3}{2} dv = 9, \quad dv = 0.$$

Also:

$$\frac{4i}{\sqrt{3}} \frac{v\sqrt{(v-3)(v-4)}}{u(u+1)(u-3)} \frac{du}{dv} du = \frac{4i}{\sqrt{3}} \frac{1}{3} \frac{\sqrt{12}}{-3} \cdot 9 = -8i.$$

$\frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}$ wird für $u = 0$, $v = 0$ so berechnet:

$$t = c \frac{P(z-z_0) + \frac{37}{4}}{P(z-z_0) + \frac{13}{4}}, \qquad dt = -c \frac{6P'(z-z_0)}{[P(z-z_0) + \frac{13}{4}]^2}.$$

Für $u = 0$, $v = 0$ gilt nach dem Additionstheorem der $\wp$-Funktion:

$$P(z-z_0) = \tfrac{35}{4}, \qquad P'(z-z_0) = -48.$$

Folglich

$$dt = 2c, \qquad t = c\tfrac{3}{2},$$
$$4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3) = 4t^3 - 51c^2 t + 71c^3 = 8c^3,$$
$$\frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}} = \frac{2c}{\sqrt{8c^3}} = -8i;$$
$$c = -\tfrac{1}{128}.$$

Dadurch ist dann die Funktion t nach dem Additionstheorem zu

$$t = -\frac{1}{128} \cdot \frac{10\varrho^2 - 27\varrho + \frac{373}{8} - 4\varrho'}{4\varrho^2 - 18\varrho + \frac{173}{4} - 4\varrho'} = -\frac{1}{128} \frac{P(z-z_0) + \frac{37}{4}}{P(z-z_0) + \frac{13}{4}}$$

bestimmt. Sie transformiert also das Integral ζ in das elliptische Integral

$$J = \int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 51c^2 t + 71c^3}} = 8 \int \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3 - 51\tau - 142}}.$$

Die Funktion t, die damit gefunden ist, ist sicher die Funktion $t = \wp\left\{\int_1^s \dots ds, \omega_1, \omega_2\right\}$, da sie auf der Riemannschen Fläche (u, s), wenn man vermittels $s^4 + \frac{1}{s^4} + 14 = \frac{48}{v}$ wieder zu s übergeht, dieselben Pole hat wie diese. Sie hat ferner die Perioden ω_1, ω_2. Erhielte man nämlich ihre Perioden aus ω_1, ω_2 durch Division mit einer ganzen Zahl, so müßte unsere Funktion t noch an anderen Stellen der Riemannschen Fläche unendlich werden. Andererseits ist ferner nachträglich jetzt gezeigt, daß ζ nur an den acht angegebenen Stellen Werte $\zeta_0 \equiv 0\,(\omega_1, \omega_2)$ annimmt, und daß

daher t die Funktion von niedrigster Ordnung ist, die die Transformation leistet. Fragt man nach anderen Funktionen von derselben Ordnung, die dieselbe Eigenschaft haben, und die auch gegenüber der Gruppe, die durch $s' = \frac{1}{s}$, $s' = is$ erzeugt wird, invariant sind, die also in $\mathfrak{R}(u,v)$ auch die Ordnung 2 haben, so ergibt sich aus Gleichung (III): Die gesuchten Funktionen sind von der oben gefundenen Funktion t linear abhängig. Man erhält daher alle diese Funktionen, indem man alle diejenigen linearen Funktionen von t aufsucht, die das elliptische Integral J wieder in ein elliptisches Integral der Weierstraßschen Normalform überführen. Es sind dies die Funktionen

$$1) \quad \tau = k\,t,$$

$$2) \quad \tau = k\,\frac{t-a_1}{t-e_1},$$

$$3) \quad \tau = k\,\frac{t-a_2}{t-e_2},$$

$$4) \quad \tau = k\,\frac{t-a_3}{t-e_3},$$

wo $a_K = \frac{\frac{1}{4}g_2 - 2e_K^2}{e_K}$, $K = 1, 2, 3.$

Insbesondere führt also der Ansatz (V), wenn man darin für z_0 einen anderen der vier Werte einsetzt, zu derselben Funktion t, da bis auf einen konstanten Faktor unter den Funktionen 1), ..., 4) nur eine mit zwei Polen erster Ordnung vorkommt.

(Eingegangen am 14. Februar 1933.)

Beiträge zur Flächentheorie.

Von

Anton Vakselj in Laibach (Südslawien).

Einleitung.

Hat man in einem Punkte der Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^i)$, $i = 1, 2$ eine beliebige Richtung du^i gewählt, so bekommt man den Krümmungsradius $\frac{1}{R}$ des zugeordneten Normalschnittes aus der Eulerschen Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^1 \varphi}{R_2},$$

in welcher R_1, R_2 die beiden Hauptkrümmungsradien und φ den Winkel zwischen der Richtung du^i und der Richtung der ersten Hauptkrümmung bedeuten. Diese Formel bildet die Krümmungsverhältnisse im Punkte der Fläche auf die Ellipse bzw. Hyperbel (Indikatrix von Dupin) mit den Hauptachsen $\sqrt{|R_1|}$ und $\sqrt{|R_2|}$ ab. Benutzt man dagegen noch die durch die Richtung du^i ebenfalls bestimmte geodätische Windung $\frac{1}{T_g}$, so kann man die Darstellung der Krümmungsverhältnisse in einfacher Weise auf einen Kreis erhalten. Dies ergibt eine bemerkenswerte Abbildung einer jeden Fläche auf zweiparametrige Scharen von Kreisen.

Mit Hilfe dieser Darstellungsweise wird es uns möglich sein, die Flächentheorie in verschiedenen Richtungen zu vertiefen. Als eine erste Anwendung bringen wir die Behandlung der in einem Flächenpunkte vorkommenden Involutionen. Im nächsten Kapitel machen wir den Versuch, das Studium der Krümmungsverhältnisse in einem Flächenpunkte weiter auszubauen und definieren zwei neue ausgezeichnete Richtungen, die wir als Hauptverzerrungsrichtungen bezeichnet haben.

Besonders nützlich erweist sich die obige Darstellungsweise der Krümmungsverhältnisse bei der Untersuchung der Laguerreschen Formel, welche wir nun in einer überaus einfachen Form ausdrücken können. Von da werden wir naturgemäß zu einem Satz über die mittlere Krümmung H geführt, die für diese Krümmung etwas ganz Analoges ausspricht wie das Theorema egregium für die Gaußsche:

Die mittlere Krümmung erfüllt als Funktion der Flächenparameter ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung,

deren Koeffizienten von g_{ik} und deren Ableitungen abhängen, wobei $g_{ik}\,du^i\,du^k$ die erste Grundform ist.

Dieses zunächst komplizierte Differentialgleichungssystem dritter Ordnung ändern wir mittels geeigneter Transformationen in ein planares erster Ordnung um, mit welchen wir die Existenztheoreme der Flächenverbiegung nicht nur im Falle analytischer, sondern auch im Falle nichtanalytischer Funktionen beweisen können.

Als eine weitere Anwendung der Differentialgleichungen für die Krümmung H bringen wir einige interessante Eigenschaften der isothermen Flächen.

§ 1.

Die Krümmungsgleichung.

1. Wir legen unseren Untersuchungen die auf eine Flächenkurve angewandten Serret-Frenetschen Formeln zu Grunde. Es sei ξ der Einheitsvektor der Tangentenrichtung $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_i\,du^i$ der Kurve $u^i = u^i(s)$. Die dadurch definierte erste Grundform $ds^2 = d\mathfrak{x}\cdot d\mathfrak{x}$ sei von der Gestalt $ds^2 = g_{ik}\,du^i\,du^k$. Der Einheitsvektor der Flächennormale sei $\zeta = \frac{1}{\sqrt{g}}(\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2)$, wo $g = g_{11}\,g_{22} - g_{12}$ ist. Endlich sei $\eta = \zeta \times \xi$ das äußere Produkt der Vektoren ξ und ζ. Dieser Vektor liegt wieder in der Tangentialebene und entspricht der Richtung, die durch die Differentiale $-\frac{1}{\sqrt{g}}g_{2i}\,du^i$, $\frac{1}{\sqrt{g}}g_{1i}\,du^i$ bestimmt ist. Für die Flächenkurve lauten dann die Serret-Frenetschen Formeln

$$
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{ds} &= \quad * \quad \gamma\eta \quad + \varrho\zeta \\
\frac{d\eta}{ds} &= -\gamma\xi \quad * \quad -\tau\zeta \qquad (1) \\
\frac{d\zeta}{ds} &= -\varrho\xi + \tau\eta \quad * \quad .
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir mit $\frac{1}{R}$ und $\frac{1}{T}$ die Krümmung und die Windung der Flächenkurve im betrachteten Punkte und mit Ω den Winkel zwischen ihrer Hauptnormalen und der Flächennormalen, so gelten bekanntlich für ϱ, τ, γ die Gleichungen

$$\varrho = \frac{\cos\Omega}{R}, \quad \tau = \frac{1}{T} - \frac{d\Omega}{ds}, \quad \gamma = \frac{\sin\Omega}{R},$$

und man nennt diese Größen beziehungsweise Krümmung, geodätische Windung und geodätische Krümmung. In diesem Aufsatz werden wir für geodätische Windung kürzer Windung sagen.

Die Berechnung von ϱ erfolgt mit Hilfe der zweiten Grundform $-d\mathfrak{x}\cdot d\mathfrak{\zeta} = a_{ik}\,du^i\,du^k$ nach der Formel

$$\varrho = \frac{a_{ik}\,du^i\,du^k}{g_{ik}\,du^i\,du^k}.$$

Die beiden Tensoren g_{ik} und a_{ik} werden wir auch in der kontravarianten Schreibweise benutzen. Von den Tensorkomponenten a^{ik} berechnen wir z. B. a^{11} und finden

$$a^{11} = g^{1\varrho}g^{1\sigma}a_{\varrho\sigma} = g^{11}(g^{ik}a_{ik}) - \frac{1}{g}a_{22}.$$

Daraus schließen wir, daß die Zahlen

$$\alpha^{11} = \frac{1}{g}a_{22},\quad \alpha^{12} = -\frac{1}{g}a_{12},\quad \alpha^{22} = \frac{1}{g}a_{11} \tag{2}$$

Komponenten eines zweimal kontravarianten Tensors sind.

2. Wir führen noch die Ausdrücke für die Windung τ an. Den Wert von τ berechnen wir mit Hilfe der dritten Frenetschen Formel und finden

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{g}\,ds^2}\begin{vmatrix} du^2\,du^2, & du^1\,du^2, & du^1\,du^1 \\ g_{11}, & -g_{12}, & g_{22} \\ a_{11}, & -a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{g\sqrt{g}}{2\,ds^2}\begin{vmatrix} du^1\,du^1, & -2\,du^1\,du^2, & du^2\,du^2 \\ g^{11}, & -2\,g^{12}, & g^{22} \\ \alpha^{11}, & -2\,\alpha^{12}, & \alpha^{22} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Das Produkt der beiden Determinanten ergibt leicht das Quadrat von τ

$$\tau^2 = \frac{g}{2\,ds^4}\begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{g}g_{ik}\,du^i\,du^k, & \frac{1}{g}a_{ik}\,du^i\,du^k \\ g_{ik}\,du^i\,du^k, & g^{ik}\,g_{ik}, & \alpha^{ik}\,g_{ik} \\ a_{ik}\,du^i\,du^k, & g^{ik}\,a_{ik}, & \alpha^{ik}\,a_{ik} \end{vmatrix}.$$

Die Überschiebung $g^{ik}\,g_{ik}$ ist gleich 2, die Invariante $g^{ik}a_{ik} = \alpha^{ik}g_{ik}$ bezeichnen wir mit $2H$ und nennen sie die mittlere Krümmung; ähnlich setzen wir $\alpha^{ik}a_{ik} = 2K$, wo K die Gaußsche Krümmung bezeichnet.

Ersetzen wir also die einzelnen Glieder obiger Determinante durch die ihnen entsprechenden Werte, so bekommen wir folgende *Krümmungsgleichung*

$$\tau^2 + \varrho^2 - 2H\varrho + K = 0. \tag{4}$$

3. Mit geeigneter Normierung des Vorzeichens von τ sind ϱ und τ durch die Richtung du^i vollkommen bestimmt. Zu späterem Gebrauch

wollen wir auch umgekehrt die Richtung du^i aus den Werten ϱ und τ berechnen, die der Krümmungsgleichung genügen.

Aus der ersten Darstellung von τ in (3) definieren wir einen Tensor b_{ik} wie folgt:

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}}(a_{11}g_{12} - a_{12}g_{11}), \quad b_{12} = \frac{1}{2\sqrt{g}}(a_{11}g_{22} - a_{22}g_{11}),$$
$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}}(a_{12}g_{22} - a_{22}g_{12}). \tag{5}$$

Derselbe Tensor besitzt folgende kontravariante Komponenten:

$$b^{11} = -\frac{1}{g}b_{22}, \quad b^{12} = \frac{1}{g}b_{12}, \quad b^{22} = -\frac{1}{g}b_{11}$$

Für τ erhalten wir so die einfache Darstellung

$$\tau = \frac{b_{ik}\,du^i\,du^k}{g_{ik}\,du^i\,du^k}.$$

Man findet leicht die Gleichungen

$$2J\frac{du^i}{ds}\cdot\frac{du^k}{ds} = (\varrho H - K)g^{ik} - (\varrho - H)a^{ik} + \tau b^{ik} \tag{6}$$

wo

$$b^{ik}b_{ik} = 2J = 2(H^2 - K)$$

ist.

4. Die Krümmungsgleichung (4) wollen wir jetzt geometrisch deuten. Schreiben wir sie in der Gestalt:

$$\tau^2 + (\varrho - H)^2 = (\sqrt{J})^2, \tag{7}$$

so ergibt sich, daß nur jene Werte ϱ, τ zulässig sind, die als Koordinaten der Punkte des Kreises mit dem Mittelpunkt $(H, 0)$ und dem Radius $\sqrt{J}$ in Betracht kommen (siehe Fig. 1).

Den Schnittpunkten des Kreises mit der τ-Achse entsprechen die Asymptotenrichtungen. Für diese ist $\varrho = 0$ und $\tau = \pm\sqrt{-K}$, wobei die zweite Gleichung das Theorem Beltrami-Enneper ausspricht.

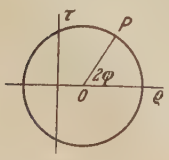


Fig. 1.

Die Schnittpunkte des Kreises mit der ϱ-Achse entsprechen den Hauptkrümmungsrichtungen, für welche

$$\tau = 0, \qquad \varrho^2 - 2H\varrho + K = 0$$

ist. In diesen Punkten erhält die Krümmung ihren größten bzw. kleinsten Wert. Die letzte Gleichung in (1) pflegt man in diesem Falle ($\tau = 0$) nach Olinde Rodrigues zu benennen.

5. Jetzt wollen wir die Zuordnung einzelner Richtungen du^i im gegebenen Flächenpunkte und der Punkte des Kreises (7) untersuchen. Es sei ϱ_1 die größere Hauptkrümmung und φ der Winkel der Richtung du^i mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung. Es ergibt sich

$$\tau = \sqrt{J} \sin 2\varphi, \tag{8}$$

$$\varrho - H = \sqrt{J} \cos 2\varphi. \tag{9}$$

Die letzte Formel ist die etwas anders geschriebene Eulersche Gleichung, die erste die Formel von Ossian Bonnet.

Aus (8) und (9) folgern wir nun, daß eine bestimmte Richtung du^i im gegebenen Flächenpunkte auf jenen Punkt P des Kreises (7) abgebildet wird, für welchen der Winkel, den OP (siehe Fig. 1) mit der positiven ϱ-Achse bildet, gleich ist dem doppelten Winkel zwischen der Richtung du^i und der ersten Hauptkrümmungsrichtung.

Zwei Richtungen im Flächenpunkte, die einen Winkel ψ einschließen, entsprechen auf dem Kreise zwei Punkte, die von einem anderen Punkte des Kreises unter demselben Winkel ψ gesehen werden. Insbesondere entsprechen vier harmonischen Richtungen im Flächenpunkte vier harmonische Punkte des Kreises.

§ 2.

Involutionen.

6. Die letzten Sätze benutzen wir zur Behandlung der in einem Flächenpunkte konjugierten Richtungen. Darunter versteht man zwei solche Richtungen $du^i, \delta u^k$, für welche die Gleichung $a_{ik}\, du^i\, \delta u^k = 0$ erfüllt ist. Die Asymptotenrichtungen entsprechen sich selbst:

$$a_{ik}\, du^i\, du^k = 0.$$

Bevor wir dieses im Kreise (7) darstellen, wollen wir etwas allgemeiner solche konjugierte Richtungen behandeln, bei denen die Doppelelemente zwei Richtungen mit derselben Krümmung ϱ_0 und also entgegengesetzt gleichen Windungen τ_0 und $-\tau_0$ sind. Die in bezug auf die Asymptotenlinien konjugierten Richtungen entsprechen dem Fall $\varrho_0 = 0$.

Wir legen im betrachteten Punkte und tangential an die Fläche eine Kugel mit dem Radius $\frac{1}{\varrho_0}$, deren Gleichung

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})^2 - \frac{2}{\varrho_0}(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}) \cdot \zeta = 0 \tag{10}$$

lautet.

Wir bewegen sie bei konstant gehaltenem Radius in der Richtung du^i und bestimmen die Berührungslinie der erzeugten Hüllfläche mit der

Anfangskugel. Diese Raumkurve erhalten wir als Lösung der Gleichung (10) und der folgenden

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x}) \cdot \left[\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\xi + \frac{\tau}{\varrho_0}\eta\right] = 0,$$

wobei ϱ, τ die der Richtung $d u^i$ zugeordnete Krümmung und Windung bedeuten. Die gesuchte Berührungslinie ist also ein Kreis, dessen Ebene senkrecht zum Vektor $\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\xi + \frac{\tau}{\varrho_0}\eta$ steht. Dieser Kreis geht durch den Flächenpunkt $\mathfrak{x}$ und besitzt dort die Tangente mit dem Einheitsvektor

$$\bar{\xi} = \frac{\tau\,\xi + (\varrho - \varrho_0)\,\eta}{\sqrt{\tau^2 + (\varrho - \varrho_0)^2}}. \tag{11}$$

Diese Formel gilt, wie man leicht sieht, auch für den Fall $\varrho_0 = 0$.

Die durch den Einheitsvektor $\bar{\xi}$ bestimmte Richtung, welche den Differentialen δu^k entsprechen soll, nennen wir die zur Richtung $d u^i$ konjugierte. In der Tat ist die Beziehung zwischen den Richtungen $d u^i$ und δu^k eine involutorische. Den Richtungen $d u^i$ und δu^k sollen im Kreise (7) beziehungsweise die Punkte P und Q entsprechen (siehe Fig. 2). Nach dem oben Gesagten muß der Peripheriewinkel über den Bogen PQ gleich dem Winkel ψ zwischen den Vektoren ξ und $\bar{\xi}$ sein. Für diesen Winkel gilt aber die Gleichung

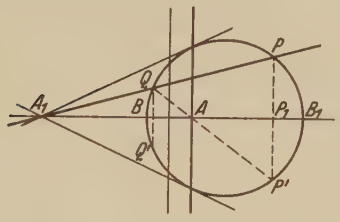


Fig. 2.

$$\cos\psi = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + (\varrho - \varrho_0)^2}}.$$

Ist ϱ_0 die Abszisse von A, diejenige des Punktes P aber ϱ, so ist im rechtwinkligen Dreieck $A P_1 P'$ der Winkel bei P' eben ψ. Der Punkt Q liegt also in der Verlängerung von $P' A$. Ist A_1 der Pol der Senkrechten im Punkte A zur ϱ-Achse, so liegt Q außerdem auf der Geraden durch die Punkte P und A_1. Da die Beziehung der Punkte P und Q eine involutorische ist, so gilt dasselbe auch von den Richtungen $d u^i$ und δu^k.

Die Doppelelemente dieser Involution sind die beiden Richtungen mit derselben Krümmung ϱ_0, wie das aus (11) sofort zu ersehen ist.

7. Legen wir also tangential an die Fläche eine Kugel vom Radius $\frac{1}{\varrho_0}$, so kann man, wenn man sie in verschiedenen Richtungen bewegt und alsdann die Kreise bestimmt, welche Charakteristiken der entstehenden Hüllflächen sind, die einzelnen Richtungen in Paare konjugierter einteilen. Die angegebene geometrische Konstruktion definiert eine Involution, deren Natur vom Kugelradius $\frac{1}{\varrho_0}$ abhängt. Je nachdem der Wert von ϱ_0 dem Intervall (ϱ_2, ϱ_1) angehört oder nicht, besitzt die

Involution reelle oder komplexe Doppelelemente. Nimmt endlich ϱ_0 die Werte der Hauptkrümmungen an, so wird die entsprechende Involution eine ausgeartete, bei der die beiden Doppelelemente zusammenfallen. Daraus ergibt sich folgende eigentümliche Eigenschaft der Hauptkrümmungen:

Bewegen wir in beliebiger Richtung eine tangential an die Fläche gelegte Kugel z. B. vom Radius $\frac{1}{\varrho_1}$, *so fällt die Charakteristik der entstehenden Hüllfläche, die auf der Kugel in der Anfangsstellung liegt, in die durch die Flächennormale und erste Hauptkrümmungsrichtung gelegte Ebene.*

8. Es ergibt sich von selbst, wie man die Theorie der in einem Flächenpunkte konjugierten Richtungen weiter ausbauen könnte. Den Pol A_1 braucht man nur irgendwo in der Ebene (ϱ, τ) zu wählen. Diese Verallgemeinerung hätte aber erst dann einen Sinn, wenn man auch die obige geometrische Konstruktion verallgemeinern oder durch neue ersetzen könnte. Ob dies möglich ist, bleibt dahingestellt. Dennoch wollen wir eine besondere Involution erwähnen, nämlich jene, welche entsteht, wenn sich der Pol A_1 unendlich fern in der Richtung der τ-Achse befindet. Die Doppelelemente sind die beiden Hauptkrümmungsrichtungen. Je zwei konjugierte Richtungen besitzen jetzt dieselbe Krümmung ϱ und entgegengesetzt gleiche Windungen. Geometrisch wird diese Involution erzeugt durch die Gesamtheit aller tangentialen Kugeln.

§ 3.

Hauptverzerrungslinien.

9. Im folgenden versuche ich einen Ausbau des Studiums der Krümmungsverhältnisse zu geben. Die Verkrümmung in einem Punkte P der Fläche hängt von den beiden Werten H und K ab. Im benachbarten Punkte P_1 nehmen diese Größen andere Werte, H_1 und K_1 an, was in P_1 eben einen anderen Charakter der Fläche bedingt. Die Darstellung der Krümmungsverhältnisse durch einen Kreis gibt uns ein Mittel, gewissermaßen auch die Änderung des Charakters der Fläche analytisch zu fassen.

Die Krümmungsverhältnisse in den Punkten P und P_1 sind nach (7) durch die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ abgebildet. Den Kreis $\mathfrak{K}$ führen wir aber in den Kreis $\mathfrak{K}_1$ über, wenn wir die Veränderliche $\varkappa = \varrho + i\tau$ einer linearen Substitution unterwerfen. Diese ist vollkommen bestimmt, wenn wir noch verlangen, daß die reelle Achse in sich übergeht. Bezeichnen wir die Substitution mit

$$\varkappa_1 = \frac{a\varkappa + b}{c\varkappa + d}, \tag{12}$$

so sind die Substitutionskoeffizienten a, b, c, d reelle Zahlen und die Substitution ist elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch. Jetzt definieren wir: Der Ausdruck $\varrho + i\tau$ mit $i = \sqrt{-1}$ soll die *komplexe Krümmungsgröße* der zugeordneten Richtung du^i heißen. Von der Gesamtheit der in einem beliebigen Punkte der Fläche zulässigen Werte von $\varkappa$ wollen wir sagen, daß sie den Charakter der Fläche im gewählten Punkte beschreibt. Dann gilt:

Der Charakter der Fläche ändert sich beim Übergange vom Punkte P in den Punkt P_1 derart, daß die komplexe Krümmungsgröße $\varrho + i\tau$ eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Substitution erleidet.

10. Das eben Gesagte wenden wir auf den Grenzfall an, daß der Punkt P_1 dem Punkte P zustrebt, wobei die oben definierte Substitution infinitesimal wird. Die Entwicklungen führen wir für den Fall einer elliptischen Substitution durch.

Es seien du^i die Differenzen der Koordinaten der Punkte P und P_1. Die mittlere Krümmung H_1 ist dann gleich

$$H_1 = H + dH = H + \Delta_i H\, du^i$$

und ähnlich die Gaußsche Krümmung

$$K_1 = K + dK = K + \Delta_i K\, du^i.$$

Die Doppelpunkte der gesuchten Substitution sind die gemeinsamen Punkte der Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$. Die Koordinaten dieser Punkte sind

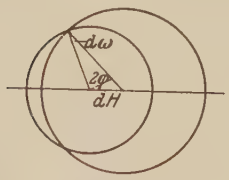


Fig. 3.

$$\varrho_0 = \frac{dK}{2\,dH}, \qquad \tau_0 = \pm\sqrt{J}\,\sqrt{\frac{d\varrho_1 \cdot d\varrho_2}{dH^2}},$$

wo noch immer ϱ_1, ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungen bezeichnen. Den infinitesimalen Drehungswinkel $d\omega$ der betrachteten elliptischen Substitution um die Doppelpunkte berechnen wir aus der Fig. 3 zu

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{J}}\,dH\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tau_0}{J}\,dH$$

oder

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{J}}\sqrt{d\varrho_1\, d\varrho_2}. \tag{13}$$

Aus der Formel (13), die allgemein ist, bestimmt man sofort die Art der betrachteten Substitution. Dreht sich die Richtung du^i um den Flächenpunkt, so ändert sich die Art der zugehörigen Substitution jedesmal beim Übergang über die Linien $d\varrho_1 = 0$ und $d\varrho_2 = 0$. In der Richtung der Tangenten an diese Linien sind die entsprechenden infinitesimalen Substitutionen parabolisch. Die Linien $d\varrho_1 = 0$ und $d\varrho_2 = 0$ teilen die Umgebung des Flächenpunktes in zwei Winkel. Die Substi-

tutionen, die Richtungen entsprechen, welche in demselben Winkel liegen, sind offenbar von derselben Art. Unter diesen Substitutionen sondern sich naturgemäß zwei ausgezeichnete ab. Unter den elliptischen und ebenso unter den hyperbolischen gibt es je eine, für welche das Verhältnis des Drehungswinkels $d\omega$ zu der Bogenlänge ds

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\sqrt{J}} \sqrt{\frac{d\varrho_1 \cdot d\varrho_2}{ds^2}} \tag{14}$$

seinen extremen Wert erreicht. Setzen wir

$$E = g^{ik} \Delta_i \varrho_1 \Delta_k \varrho_2,$$

$$F = \frac{1}{2\sqrt{g}} (\Delta_1 \varrho_1 \Delta_2 \varrho_2 - \Delta_2 \varrho_1 \Delta_1 \varrho_2),$$

so sind die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 - E\lambda - F^2 = 0$$

die extremen Werte von $J\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2$. Diese Gleichung besitzt immer zwei reelle Wurzeln, von denen eine positiv, die andere negativ ist. Nach (14) entsprechen ihnen eine elliptische und eine hyperbolische Substitution.

11. Die beiden zugehörigen ausgezeichneten Richtungen genügen der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} du^2 du^2, & -du^1 du^2, & du^1 du^1 \\ g_{11}, & g_{12}, & g_{22} \\ \Delta_1 \varrho_1 \cdot \Delta_1 \varrho_2, & \frac{1}{2}(\Delta_1 \varrho_1 \Delta_2 \varrho_2 + \Delta_2 \varrho_1 \Delta_1 \varrho_2), & \Delta_1 \varrho_1 \cdot \Delta_2 \varrho_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der besonderen Form der letzten Gleichung folgt sofort die Orthogonalität der beiden Richtungen.

Die notwendigen Rechnungen gleichen vollkommen jenen, die zur Aufstellung der Hauptkrümmungsrichtungen ausgeführt werden. Ähnlich wie dort die Symmetralen der Asymptotenrichtungen die Hauptkrümmungsrichtungen angeben, sind auch hier die beiden ausgezeichneten Richtungen Symmetralen der parabolischen Richtungen $d\varrho_1 = 0$ und $d\varrho_2 = 0$. Diese ausgezeichneten Richtungen wollen wir die *Hauptverzerrungsrichtungen* nennen.

Ist die betrachtete Fläche eine W-Fläche, ist also $F = 0$, so fallen die beiden Richtungen $d\varrho_1 = 0$ und $d\varrho_2 = 0$ zusammen und die entsprechende Substitution ist offenbar eine identische. Die zweite ausgezeichnete Richtung ist zu der gemeinsamen Richtung $d\varrho_1 = d\varrho_2 = 0$ orthogonal.

§ 4.

Die Laguerresche Formel.

12. Die Krümmungsgleichung (4) verbindet die mittlere Krümmung H und die Gaußsche Krümmung K mit ϱ und τ. In natürlicher Weise ergibt sich jetzt die Frage nach jenen Beziehungen, welche noch die geodätische Krümmung γ enthalten. Da diese von den zweiten Ableitungen der die Flächenkurve definierenden Funktionen $u^i = u^i(s)$ abhängt, müßte eine solche Relation nebst höheren Differentialinvarianten von H und K noch die ersten Ableitungen von ϱ oder τ nach s enthalten. Eine solche Relation besteht in der Tat, sie ist die unter dem Namen „Laguerresche Formel" bekannte Beziehung.

Wir wiederholen hier die Entwicklung dieser Formel, um sie in etwas anderer, für unsere Zwecke geeigneter Form zu erhalten.

Es sei also $u^i = u^i(s)$ die durch den Flächenpunkt gelegte Kurve, wo der Parameter s die Bogenlänge der Kurve angibt. Die geodätische Krümmung dieser Kurve ist

$$\gamma = (x', x'', \zeta) = \sqrt{g}\,[u'^1(u''^2 + \Gamma^2_{\varrho\sigma}\,u'^\varrho\,u'^\sigma) - u'^2(u''^1 + \Gamma^1_{\varrho\sigma}\,u'^\varrho\,u'^\sigma)]. \tag{15}$$

Wir bezeichnen mit $\Delta_e t_{rs}$ die kovariante Ableitung des Tensors t_{rs}

$$\Delta_e t_{rs} = \frac{\partial t_{rs}}{\partial u^e} - t_{\varrho s}\,\Gamma^\varrho_{re} - t_{r\varrho}\,\Gamma^\varrho_{se}.$$

Aus $\Delta_e g_{ik} = 0$ folgt, wenn wir die Gleichung $g_{ik}\,u'^i\,u'^k = 1$ nach s ableiten, die Beziehung

$$g_{ik}\,u'^i\,(u''^k + \Gamma^k_{\varrho\sigma}\,u'^\varrho\,u'^\sigma) = 0.$$

Die letzte Gleichung und (15) geben durch Auflösung folgende Relationen:

$$\begin{aligned} u''^1 + \Gamma^1_{\varrho\sigma}\,u'^\varrho\,u'^\sigma &= -\frac{\gamma}{\sqrt{g}}\,g_{2k}\,u'^k, \\ u''^2 + \Gamma^2_{\varrho\sigma}\,u'^\varrho\,u'^\sigma &= \frac{\gamma}{\sqrt{g}}\,g_{1k}\,u'^k. \end{aligned} \tag{16}$$

Mit Hilfe von (16) bekommen wir leicht die erwähnte Laguerresche Formel. Wir differenzieren $\varrho = a_{ik}\,u'^i\,u'^k$ nach s und ersetzen darin u''^k durch die aus (16) zu entnehmenden Werte.

Dann erhalten wir

$$\frac{d\varrho}{ds} + 2\,\gamma\,\tau = \Delta_e a_{ik}\,u'^i\,u'^k\,u'^e. \tag{17}$$

Man verifiziert leicht, daß die letzte Beziehung nur eine andere Gestalt der Laguerreschen Formel ist. Die Gleichung (17) wollen wir mit Hilfe von (6) noch weiter umändern. Ist

$$c_e = \frac{1}{2J} b^{ik} \Delta_e a_{ik},$$

und setzt man für ϱ und τ die Werte aus (8) und (9), so erhält man

$$\gamma - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2} c_e u'^e. \tag{18}$$

Die Gleichung (18) *drückt in zugleich einfachster Form den wesentlichen Inhalt der Laguerreschen Beziehung aus.*

13. Aus der letzten Gleichung folgern wir die Existenz einer interessanten einparametrigen Kurvenfamilie. Längs einer beliebigen Kurve der Schar

$$c_e du^e = 0 \tag{19}$$

gilt nach (18)

$$\gamma = \frac{d\varphi}{ds},$$

wo φ der Winkel der Kurventangente mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung, die immer im Berührungspunkte zu nehmen ist, bedeutet. Diese Gleichung besagt aber:

Auf jeder Fläche (deren Bestimmungsstücke die erforderlichen Differentiationen gestatten) *existiert eine einparametrige Schar von Kurven, längs deren der Paralleltransport von Levi-Civita Hauptkrümmungsrichtungen wieder in solche überführt.*

Als zweite Anwendung der Formel (18) erwähnen wir die Berechnung der geodätischen Krümmung γ einer Krümmungslinie. Aus $\varphi = 0$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ findet man sofort für die gesuchte geodätische Krümmung den Ausdruck

$$\gamma = \tfrac{1}{2} c_e u'^e.$$

§ 5.

Der Vektor c_e.

14. Die Eigenschaften dieses Vektors wollen wir weiter untersuchen. Um dies elegant auszuführen, definieren wir anstatt der bisher verwendeten Tensoren a_{ik} und b_{ik} zwei neue, mit denen man einfacher rechnen kann. Die bis jetzt mit a_{ik} und b_{ik} bezeichneten Tensoren schreiben

wir fortan $\bar{a}_{ik}$ und $\bar{b}_{ik}$ und reservieren die Zeichen a_{ik} und b_{ik} für die neuen. Diese hängen von den alten folgendermaßen ab:

$$a_{ik} = \frac{1}{\sqrt{J}}(\bar{a}_{ik} - H\, g_{ik}),$$

$$b_{ik} = \frac{1}{\sqrt{J}}\bar{b}_{ik}.$$

Die Tensoren g_{ik}, a_{ik}, b_{ik}, die wir symbolisch mit gotischen Lettern $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ bezeichnen, bilden ein orthogonales Tensorsystem, für welches die skalaren Produkte

$$\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{a} = g^{ik} a_{ik} = 0,$$

$$\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{b} = 0,$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$$

sind. Die Überschiebungen der neuen Tensoren mit sich selbst ergeben denselben Wert

$$\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{g} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = 2.$$

Endlich ist jeder der drei Tensoren das äußere Produkt der beiden anderen, wobei dieses durch folgende Formeln definiert ist:

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}}(a_{11} g_{12} - a_{12} g_{11}),$$

(20)
$$b_{12} = \frac{1}{2\sqrt{g}}(a_{11} g_{22} - a_{22} g_{11}),$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}}(a_{12} g_{22} - a_{22} g_{12}).$$

Die genaue Ausrechnung gibt folgende Multiplikationsregeln, die von den üblichen der Vektorrechnung etwas abweichen:

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{g} = \mathfrak{b},$$

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \mathfrak{g}.$$

15. Für die Tensoren $\bar{a}_{ik}$ gelten die Codazzi-Mainardischen Gleichungen, die mit Hilfe der kovarianten Ableitung, angewendet auf den Tensor $\bar{\alpha}^{ik}$ aus (2), so geschrieben werden:

$$\Delta_i \bar{\alpha}^{ik} = 0, \qquad k = 1, 2.$$

In dem neuen Tensor a_{ik} sind die Werte von $\Delta_i a^{ik}$ verschieden von Null

(21)
$$\Delta_i a^{ik} = \frac{1}{\sqrt{J}}(g^{ik} \Delta_i H - a^{ik} \Delta_i \sqrt{J}).$$

Drücken wir noch die Komponenten des Vektors c_e mit Hilfe der Tensoren a_{ik} und b_{ik} aus, so finden wir

$$c_e = \tfrac{1}{2} b^{ik} \Delta_e a_{ik}. \tag{22}$$

16. Mit diesem Apparat können wir jetzt alle Rechnungen mit Leichtigkeit ausführen. Auf dieselben Zahlen c_e stoßen wir, wenn wir die kovarianten Ableitungen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ berechnen. Die abgeleiteten Tensoren $\Delta_e \mathfrak{a}$ und $\Delta_e \mathfrak{b}$ genügen nämlich folgenden Gleichungen:

$$\Delta_e \mathfrak{a} = c_e \mathfrak{b}, \tag{23}$$

$$\Delta_e \mathfrak{b} = -c_e \mathfrak{a}. \tag{24}$$

Die Gleichung (23) gestattet uns nun, die Komponenten c_e zu berechnen

$$c_e = b_{ek} \Delta_i a^{ik}$$

oder wegen (21)

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{J}} (g^{2i} \Delta_i \sqrt{J} - a^{2i} \Delta_i H), \\ c_2 &= -\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{J}} (g^{1i} \Delta_i \sqrt{J} - a^{1i} \Delta_i H). \end{aligned} \tag{25}$$

Die Zahlen c_e hängen also entgegen (22) nur von den Tensoren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{a}$ und den ersten Ableitungen von H und J ab.

16. Die beiden c_e genügen einer Differentialgleichung, die wir nun aufstellen wollen. Zu diesem Zweck ziehen wir die Formel über die Vertauschung zweier hintereinander ausgeführter kovarianter Ableitungen heran

$$\Delta_2 \Delta_1 t_{ik} - \Delta_1 \Delta_2 t_{ik} = -t_{\varrho k} R_{12,i}^{\quad\ \varrho} - t_{i\varrho} R_{12,k}^{\quad\ \varrho}.$$

Wenden wir sie auf den Tensor $\mathfrak{a}$ an, so bekommen wir folgende tensorielle Beziehung:

$$\Delta_2 \Delta_2 \mathfrak{a} - \Delta_1 \Delta_2 \mathfrak{a} = 2\sqrt{g}\, K \mathfrak{b}.$$

Setzen wir in die linke Seite die Werte aus (23) und (24) ein, so finden wir

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\Delta_2 c_1 - \Delta_1 c_2) = 2K. \tag{26}$$

Berücksichtigen wir noch (25), so bekommen wir für (26) auch

$$\Delta_i \left[g^{ik} \left(\frac{1}{\sqrt{J}} \Delta_k \sqrt{J} \right) - a^{ik} \left(\frac{1}{\sqrt{J}} \Delta_k H \right) \right] = 2K$$

oder nach leichter Rechnung

$$\begin{aligned} &\sqrt{J}\, a^{ik} \Delta_i \left(\frac{1}{J} \Delta_k H \right) \\ &= g^{ik}\, \Delta_i \left(\frac{1}{\sqrt{J}} \Delta_k \sqrt{J} \right) - \frac{1}{J} g^{ik}\, \Delta_i H\, \Delta_k H - 2K. \end{aligned} \tag{27}$$

Die rechte Seite hängt nur vom Tensor $\mathfrak{g}$ und von der mittleren Krümmung H ab.

§ 6.

Das System von partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung für die mittlere Krümmung.

17. Die Differentialgleichung (27) gestattet es, den Tensor a_{ik} und somit auch a_{ik} mit Hilfe der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von H auszudrücken. Um dies zu erreichen, bauen wir uns aus dem zweifach kovarianten Tensor $\Delta_i\left(\frac{1}{J}\Delta_k H\right)$ einen neuen, der dieselben Eigenschaften wie $\mathfrak{a}$ besitzen soll, auf. Setzen wir

$$N = g^{ik}\Delta_i\left(\frac{1}{J}\Delta_k H\right), \quad P = \frac{1}{g}\left\{4\,\Delta_1\left(\frac{1}{J}\Delta_1 H\right)\Delta_2\left(\frac{1}{J}\Delta_2 H\right) - \left[\Delta_1\left(\frac{1}{J}\Delta_2 H\right) + \Delta_2\left(\frac{1}{J}\Delta_1 H\right)\right]^2\right\},$$

so sei der Tensor $\mathfrak{D}$ mit den Komponenten Δ_{ik} folgendermaßen definiert:

$$\Delta_{ik} = \frac{\Delta_i\left(\frac{1}{J}\Delta_k H\right) + \Delta_k\left(\frac{1}{J}\Delta_i H\right) - N g_{ik}}{\sqrt{N^2 - P}}. \tag{28}$$

Analog bilden wir noch den Tensor $\mathfrak{E}$ mit den Komponenten Φ_{ik} nach der Formel: $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \times \mathfrak{g}$. Die Verknüpfungen zwischen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ sind dann dieselben wie zwischen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.

Die Differentialgleichung (27) bekommt, wenn wir den Tensor $\Delta_i\left(\frac{1}{J}\Delta_k H\right)$ durch Δ_{ik} ausdrücken, die Gestalt

$$\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{a} = 2\cos\omega,$$

wo

$$\cos\omega = \frac{g^{ik}\Delta_i\left(\frac{1}{\sqrt{J}}\Delta_k\sqrt{J}\right) - \frac{1}{J}g^{ik}\Delta_i H\,\Delta_k H - 2K}{\sqrt{J(N^2 - P)}}$$

durch $\mathfrak{g}$ und H allein bestimmt ist. Die Überschiebung $\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{a} = \Phi^{ik}a_{ik}$ dürfen wir mit $2\sin\omega$ bezeichnen und bekommen für die Tensoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ folgende Ausdrücke

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{D}\cos\omega + \mathfrak{E}\sin\omega, \tag{29}$$

$$\mathfrak{b} = -\mathfrak{D}\sin\omega + \mathfrak{E}\cos\omega. \tag{30}$$

18. Wir gehen noch einen Schritt weiter und stellen mit Hilfe von (29) und (30) die partiellen Differentialgleichungen der mittleren Krümmung H auf.

Für die Ableitungen der Tensoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ gelten wie bei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Formeln

$$\Delta_e\mathfrak{D} = C_e\mathfrak{E}, \quad \Delta_e\mathfrak{E} = -C_e\mathfrak{D},$$

wo

$$C_e = \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}\cdot\Delta_e\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}\Phi^{ik}\Delta_e\Delta_{ik}$$

Ausdrücke bedeuten, die von partiellen Ableitungen dritter Ordnung von H abhängen. Die kovariante Ableitung von (29) lautet

$$\Delta_e \mathfrak{a} = (\Delta_e \omega + C_e)\mathfrak{b}.$$

Aus dem Vergleich mit (23) folgt also

$$X_e \equiv \Delta_e \omega + C_e - c_e = 0 \qquad (l = 1, 2). \tag{31}$$

Die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems geben die bei vorgelegtem Tensor $\mathfrak{g}$ möglichen mittleren Krümmungen H. Auf diese Weise ergibt sich ein Satz, der für die mittlere Krümmung etwas ganz Analoges ausspricht wie das Theorema egregium für die Gaußsche.

Die mittlere Krümmung H erfüllt als Funktion der beiden Flächenparameter ein System von partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, deren Koeffizienten bloß von den g_{ik} und deren Ableitungen abhängen.

19. Die beiden Differentialgleichungen $X_e = 0$ für die mittlere Krümmung H müssen noch einer Integrabilitätsbedingung genügen. Wir zeigen, daß diese Bedingung erfüllt ist, indem wir die folgende identische Beziehung zwischen den Ausdrücken X_e aufstellen

$$\frac{1}{\sqrt{g}}(\Delta_2 X_1 - \Delta_1 X_2) = \frac{1}{\sqrt{J}} b^{ik} X_i \Delta_k H. \tag{32}$$

20. Die Differentialgleichungen $X_e = 0$ bekommen eine einfachere Form, wenn das Koordinatensystem orthogonal ist. In diesem Falle ist $g_{12} = 0$ und wir dürfen wegen

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\Delta_{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\Phi_{12}\right)^2 = 1$$

noch

$$\Delta_{12} = \sqrt{g}\sin\alpha, \quad \Phi_{12} = \sqrt{g}\cos\alpha$$

setzen. Auf diese Weise erhalten wir

$$C_1 = \frac{\partial\alpha}{\partial u^1} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad C_2 = \frac{\partial\alpha}{\partial u^2} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

Die zweiten Glieder rechts erfüllen dabei den altbekannten Ausdruck für die Gaußsche Krümmung

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)\right].$$

Führen wir nun als Hilfsgröße $\Theta = \alpha + \omega$ ein, so nehmen die Differentialgleichungen $X_e = 0$ die Form eines planaren Differentialgleichungssystems erster Ordnung in zwei Funktionen H und Θ an

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Theta}{\partial u^1} &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{g_{11}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\log\sqrt{J}}{\partial u^2} - \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{J}}a^{2i}\frac{\partial H}{\partial u^i}, \\
\frac{\partial\Theta}{\partial u^2} &= -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{g_{22}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\log\sqrt{J}}{\partial u^1} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{J}}a^{1i}\frac{\partial H}{\partial u^i}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Die Komponenten des Tensors a erhalten dabei die Gestalt

$$a_{11} = g_{11}\cos\Theta, \quad a_{12} = \sqrt{g}\sin\Theta, \quad a_{22} = -g_{22}\cos\Theta. \tag{34}$$

Die geometrische Deutung der Hilfsgröße Θ ist höchst einfach. Der Winkel zwischen der Koordinatenlinie $du^1 = 0$ und einer Hauptkrümmungsrichtung ist $\frac{1}{2}\Theta$.

Jede der beiden Differentialgleichungen (33) ist im Grunde die aus der Laguerresche Formel abgeleitete Beziehung (18). Die erste Differentialgleichung von (33) folgt direkt aus (18), wenn wir (18) für die Kurven $u^2 = \text{const}$ anwenden. Das Differentialgleichungssystem (33) ist also allgemeingültig, insbesondere in jenen Fällen, in welchen das ursprüngliche (31) versagt, z. B. wenn $N^2 - P = 0$ ist.

21. Die Differentialgleichungen $X_e = 0$ aus (31) sind in bezug auf die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von H linear. Wir wollen noch diesen linearen Teil von X_e, der von den beiden Gliedern C_e und $\Delta_e\omega$ herrührt, explizit anschreiben

$$X_e = -\frac{\bar{\alpha}^{ik}}{\sqrt{J^3(N^2-P)\sin\omega}}\,\frac{\partial^3 H}{\partial u^e \partial u^i \partial u^k} + \ldots. \tag{35}$$

Wenn im betrachteten Punkte die Richtung $du^1 = 0$ keine Asymptotenrichtung ist, dann ist insbesondere der Koeffizient

$$-\frac{\bar{a}_{22}}{g\sqrt{J^3(N^2-P)\sin\omega}}$$

von $\frac{\partial^3 H}{\partial u^1 \partial u^1 \partial u^1}$ eine von Null verschiedene Zahl.

§ 7.

Die isothermen Flächen.

22. Im Hinblick auf die Koeffizienten von (35) wollen wir jetzt untersuchen, welche Bedeutung dem Verschwinden von $\sin\omega$ und $N^2 - P$ zukommt. Zu diesem Zwecke suchen wir Flächen, auf welchen durchweg $\sin\omega = 0$ oder $N^2 - P = 0$ ist.

Wir wollen mit der Bestimmung der letzten Flächen beginnen. Bezeichnen wir mit $\overline{\Delta}_{ik}$ den Zähler von (28), so ist $\overline{\Delta}_{ik}\overline{\Delta}^{ik} = 0$. Ist noch $g_{12} = 0$, so können wir wegen (20) die letzte Gleichung einfacher

$$(\overline{\Delta}_{12})^2 + (\overline{\Phi}_{12})^2 = 0$$

schreiben.

Im reellen Falle ist also:

$$\begin{aligned} &\Delta_1\left(\frac{1}{J}\Delta_2 H\right) + \Delta_2\left(\frac{1}{J}\Delta_1 H\right) = 0, \\ &g_{22}\Delta_1\left(\frac{1}{J}\Delta_1 H\right) - g_{11}\Delta_2\left(\frac{1}{J}\Delta_2 H\right) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Nun wollen wir noch die Koordinatenlinien geeignet wählen. Sehen wir von der trivialen Lösung $H = \text{const}$ von (36) ab, so können wir als Koordinatenlinien $u^1 = \text{const}$ die Kurven $H = \text{const}$ nehmen. Die Linien $u^2 = \text{const}$ sind alsdann die orthogonalen Trajektorien der Kurvenfamilie $H = \text{const}$. Wir haben also $H = H(u^1)$ und $\Delta_2 H = 0$. Die erste Gleichung von (36) gibt, da $\Delta_1 H = H' \neq 0$ ist,

$$g_{11} J = U_1 H',$$

wo U_1 eine beliebige Funktion von u^1 allein bedeutet. Die zweite Gleichung von (36) führt aber auf

$$\sqrt{g}\, J = U_2 H'$$

mit U_2 als Funktion von u^2. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{g_{11}}{U_1^2} = \frac{g_{22}}{U_2^2},$$

d. h. *die Linien $H = \text{const}$ und ihre orthogonalen Trajektorien bilden ein isothermes System.*

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit dürfen wir $U_1 = U_2 = 1$, $g_{11} = g_{22} = \lambda$ setzen und bekommen

$$H' = \lambda J \tag{37}$$

als erste Bedingung, welcher die gesuchten Flächen genügen. Eine weitere Bedingung ergibt die Gleichung (27), die offenbar auch im Falle $N^2 - P = 0$ gelten muß. Die linke Seite von (27) ist gleich Null, und es bleibt

$$\frac{1}{2} g^{ik} \Delta_i \left(\frac{1}{J} \Delta_k J \right) - \frac{1}{J} g^{ik} \Delta_i H \, \Delta_k H - 2K = 0. \tag{38}$$

Benutzen wir $g_{11} = g_{22} = \lambda$ und (37), so gibt die letzte Gleichung

$$\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{H''}{H'} + 2H \right)' = H' + H^2. \tag{39}$$

Bei den Flächen mit $N^2 - P = 0$ unterscheiden wir also folgende drei Fälle:

1. Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung,
2. bestimmte auf Rotationsflächen abbildbare Flächen: $\lambda = \lambda(u^1)$,
3. Flächen mit $H' + H^2 = 0$.

23. Nun untersuchen wir noch, für welche Flächen der Wert von $\sin\omega$ überall gleich Null ist. Diese Analyse ergibt zugleich eine allgemeine Eigenschaft der Flächen mit $N^2 - P = 0$. Um dies auszuführen, wählen wir als Koordinatenlinien die Krümmungslinien. In dem Differentialgleichungssystem (33) setzen wir also $\Theta = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial H}{\partial u^1} - \frac{\partial \log \sqrt{J}}{\partial u^1} - \frac{\partial \log g_{22}}{\partial u^1} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{J}} \frac{\partial H}{\partial u^2} + \frac{\partial \log \sqrt{J}}{\partial u^2} - \frac{\partial \log g_{11}}{\partial u^2} &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Nun war aber $\Theta = \omega + \alpha$, also wegen $\Theta = 0$, $\omega = 0$ auch $\alpha = 0$ und weiter nach **20.** $\Delta_{12} = 0$; daher findet man

$$\Delta_1\left(\frac{1}{J}\Delta_2 H\right) + \Delta_2\left(\frac{1}{J}\Delta_1 H\right) = 0. \tag{41}$$

Die Lösung von (40) genügt der letzten Gleichung, wenn

$$\frac{g_{11}}{U_1^2} = \frac{g_{22}}{U_2^2}$$

ist, d. h. die Koordinaten bezogen auf die Krümmungslinien sind isotherme Parameter. Die Gleichung (41) ist aber die erste Gleichung von (36); daher ist das hier entwickelte auch für $N^2 - P = 0$ gültig. Also:

Die Flächen mit $N^2 - P = 0$ *oder* $\sin\omega = 0$ *sind isotherme Flächen.*

Interessant ist die Umkehrung dieses Satzes:

Die isothermen Flächen zerfallen in zwei Kategorien je nach dem Verschwinden der einen oder der anderen der Differentialinvarianten $N^2 - P$ *und* $\sin\omega$.

24. Wir fügen noch einige Bemerkungen zu der Einteilung der Flächen mit $N^2 - P = 0$ am Ende von **22.** hinzu. Als Beispiel einer Fläche, die dem dortigen zweiten Falle entspricht, erwähnen wir jene, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{(e^{a(u^1-b)} + e^{-a(u^1-b)})^2}{4a}, \quad \sqrt{J} = \frac{e^{a(u^1-b)} - e^{-a(u^1-b)}}{e^{a(u^1-b)} + e^{-a(u^1-b)}},$$

wo a und b Konstanten bedeuten. Es ist dies eine Fläche konstanter Gaußscher Krümmung, die zugleich eine isotherme Fläche darstellt.

25. Etwas ausführlicher wollen wir nur den dritten Fall mit $H' + H^2 = 0$ behandeln. Die Funktion H besitzt die Form

$$H = \frac{1}{u^1 - a}.$$

Setzen wir $\psi = \lambda H'$, so finden wir aus (38) für ψ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log\psi}{\partial u^1\,\partial u^1} + \frac{\partial^2 \log\psi}{\partial u^2\,\partial u^2} = 2\psi. \tag{42}$$

Die Differentialgleichungen (33) sind dann die folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial u^1} &= \frac{\partial \log\sqrt{\psi}}{\partial u^2} - \sqrt{\psi}\sin\Theta, \\ \frac{\partial\Theta}{\partial u^2} &= -\frac{\partial \log\sqrt{\psi}}{\partial u^1} + \sqrt{\psi}\cos\Theta. \end{aligned} \tag{43}$$

Das letzte System besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft:

Die Funktion Θ *ist eine Potentialfunktion.*

Die Auffindung aller Flächen dieser Art verlangt die Integration von (42). Dieser Differentialgleichung genügt aber unter anderem auch die von einer willkürlichen Potentialfunktion f abhängende Funktion

$$\psi = \left(\frac{\partial \log f}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log f}{\partial u^2}\right)^2.$$

Setzt man diesen Wert von ψ in das System (43) ein, so *vermitteln die so entstehenden Gleichungen eine eigentümliche Beziehung zwischen zwei Potentialfunktionen Θ und f.*

§ 8.

Existenztheoreme im Falle analytischer Funktionen.

26. Alle in diesem Kapitel vorkommenden Funktionen sollen analytisch sein. Das zentrale Problem der Flächenverbiegung lautet folgendermaßen: *Auf einer Fläche mit der ersten Grundform $g_{ik}du^i du^k$ sei eine Kurve $\mathfrak{K}$ durch die Funktion $u^1 = f(u^2)$ bestimmt. Die gegebene Fläche ist so zu verbiegen, daß die Kurve $\mathfrak{K}$ mit der im Raume beliebig gelegenen Kurve $\mathfrak{C}$ zusammenfällt.* Wir geben einen neuen Beweis, daß es eine und und nur eine Verbiegung gibt, welche zu der Fläche von der verlangten Eigenschaft führt. Wir führen dies nicht direkt durch, sondern wenden uns gleich einem weit allgemeineren Problem zu und zeigen erst später, wie sich das oben erwähnte Verbiegungsproblem als spezieller Fall des allgemeineren erledigen läßt. Wir werden so in der Lage sein, die Tragweite der in dieser Mitteilung entwickelten Hilfsmittel der Flächentheorie zu erkennen.

27. Wir schreiben zu diesem Zweck das planare Differentialgleichungssystem (33) in der Form:

$$(44)\quad \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial u^1} &= -\frac{\sin\Theta}{\sqrt{J}}\frac{\partial H}{\partial u^1} + \frac{g_{11}(\sqrt{J}\cos\Theta + H)}{J\sqrt{g}}\frac{\partial H}{\partial u^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} - \frac{g_{11}}{2J\sqrt{g}}\frac{\partial K}{\partial u^2}\right), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial u^2} &= \frac{g_{22}(\sqrt{J}\cos\Theta - H)}{J\sqrt{g}}\frac{\partial H}{\partial u^1} + \frac{\sin\Theta}{\sqrt{J}}\frac{\partial H}{\partial u^2} - \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{g_{22}}{2J\sqrt{g}}\frac{\partial K}{\partial u^1}\right) \end{aligned}$$

und lösen es nach den Ableitungen in bezug auf u^1 auf und bekommen das neue System

$$(45)\quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u^1} &= \frac{1}{\sqrt{J}\cos\Theta - H}\left(a_1\frac{\partial H}{\partial u^2} + b_1\frac{\partial \Theta}{\partial u^2} + c_1\right), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial u^1} &= \frac{1}{\sqrt{J}\cos\Theta - H}\left(a_2\frac{\partial H}{\partial u^2} + b_2\frac{\partial \Theta}{\partial u^2} + c_2\right), \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten a_i, b_i, c_i von den Funktionen H, $\frac{1}{J}$, $\cos\Theta$, $\sin\Theta$ ganz rational abhängen. Die Bedeutung des Nenners $\sqrt{J}\cos\Theta - H$

erkennen wir, wenn wir den Koeffizienten $\bar{a}_{22}$ in der Formel für die Krümmung

$$\varrho = \frac{\bar{a}_{ik}\, du^i\, du^k}{g_{ik}\, du^i\, du^k}$$

berechnen. Es ist nach (34)

$$\bar{a}_{22} = \sqrt{J}\, a_{22} + H\, g_{22} = -\, g_{22}(\sqrt{J}\cos\Theta - H).$$

Der Nenner von (45) verschwindet, wenn die Linie $u^1 = 0$ eine Asymptotenlinie ist. Für das System (45) gilt das Cauchysche Existenztheorem: Es gibt ein und nur ein System von Funktionen $H(u^1, u^2)$ und $\Theta(u^1, u^2)$, welche auf der Linie $u^1 = 0$ vorgeschriebene Werte $H_0(u^2)$ und $\Theta_0(u^2)$ annehmen. Die einzigen Bedingungen sind, daß die Nenner $\sqrt{J}\cos\Theta - H$ und J in den Punkten der Linie und in einer hinreichend eingeschränkten Umgebung derselben von Null verschieden sind.

Da man ein orthogonales System immer so wählen kann, daß die Kurve $\mathfrak{K}$ der Fläche die Koordinatenlinie $u^1 = 0$ ist, so folgt aus dem Cauchyschen Existenzsatz folgendes allgemeinstes Theorem:

Es werden auf der gegebenen Fläche eine Kurve $\mathfrak{K}$ und auf ihr zwei Funktionen $H_0(s)$ und $\Theta_0(s)$ ihrer Bogenlänge s beliebig gewählt. Es existiert eine und nur eine Verbiegung, die folgendes leistet: In den Punkten zum Parameter s der Kurve $\mathfrak{K}$ hat die mittlere Krümmung der neuen Fläche die vorgeschriebenen Werte $H_0(s)$, und die Winkel $\frac{\Theta}{2}$, zwischen den Tangenten an die Kurve $\mathfrak{K}$ und der jeweiligen Hauptkrümmungsrichtung der neuen Fläche, nehmen die Werte $\frac{1}{2}\Theta_0(s)$ an.

Als einzige Bedingung tritt hinzu, daß die Kurve $\mathfrak{K}$ keine Asymptotenlinie der neuen Fläche ist und daß sie auf ihr allen Nabelpunkten ausweicht.

Das obige Theorem sagt also aus, daß die Verbiegung und somit die Fläche bestimmt ist, wenn die Krümmungsverhältnisse der gesuchten Fläche in den Punkten von $\mathfrak{K}$ gegeben sind: Die Werte von $H_0(s)$ und die übrigens bekannten Werte der Gaußschen Krümmung bestimmen die beiden Hauptkrümmungen, während die Werte $\Theta_0(s)$ über die Lage der Hauptkrümmungsrichtungen aussagen.

Insbesondere dürfen wir $\Theta_0(s) = 0$ wählen; dann ist auf der neuen Fläche die Kurve $\mathfrak{K}$ eine Krümmungslinie. Unter der Bedingung, daß auf $\mathfrak{K}$ die Gaußsche Krümmung K_0 von Null verschieden ist, gilt folgendes Corollar:

Es werden auf der gegebenen Fläche eine Kurve $\mathfrak{K}$ und auf ihr eine Funktion $H_0(s)$ ihrer Bogenlänge s beliebig gewählt. Es existiert eine und nur eine Verbiegung, welche eine Fläche ergibt, auf der die Kurve $\mathfrak{K}$ eine

Krümmungslinie ist und die Hauptkrümmungen in Punkten von $\mathfrak{K}$ *vorgeschriebene Werte annehmen.*

Dieses Existenztheorem habe ich schon in der Arbeit: „Ein Existenztheorem der Flächen konstanter Krümmung“[1]) auf anderem Wege und im speziellen Falle bewiesen.

28. Das spezielle im Paragraph **26.** erwähnte Verbiegungsproblem kann nun rasch in ein paar Zeilen erledigt werden. Aus den Werten der Krümmung $\frac{1}{R}$ und der Windung $\frac{1}{T}$ der Raumkurve $\mathfrak{C}$ können wir für die Kurve $\mathfrak{K}$ der gesuchten Fläche die Krümmung ϱ und die geodätische Windung τ berechnen. Das folgt sofort aus den Formeln

$$\gamma = \frac{\sin \Omega}{R}, \quad \varrho = \frac{\cos \Omega}{R}, \quad \tau = \frac{1}{T} - \frac{d\Omega}{ds},$$

wo γ die bekannte geodätische Krümmung der Kurve $\mathfrak{K}$ bedeutet. Die Gleichung

$$\varrho^2 + \tau^2 - 2\varrho H + K = 0$$

gibt die Werte der mittleren Krümmung auf die Kurve $\mathfrak{K}$ und dasselbe liefert die Beziehung

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\varrho - H}$$

für den Winkel $\frac{1}{2}\Theta$ zwischen der Kurve $\mathfrak{K}$ und der jeweiligen Hauptkrümmungsrichtung.

Man kann also jede Fläche auf eine und nur eine Weise so verbiegen, daß eine auf ihr beliebig gegebene Kurve $\mathfrak{K}$ *zu einer im Raume ebenfalls beliebig gegebenen Kurve* $\mathfrak{C}$ *wird, wenn nur die Kurve* $\mathfrak{K}$ *auf der erhaltenen Fläche nicht zu einer Asymptotenlinie wird oder durch einen Nabelpunkt geht.*

29. Endlich läßt sich auf das obige allgemeine Existenztheorem auch der folgende Satz zurückführen:

Es werden auf einer Fläche eine Kurve $\mathfrak{K}$ *und auf dieser zwei Funktionen* $H(s)$, $H_1(s)$ *ihrer Bogenlänge* s *und überdies in einem Punkte* A *von* $\mathfrak{K}$ *eine Richtung beliebig gewählt. Es existiert eine und nur eine Verbiegung, welche zu einer Fläche führt, auf der die mittlere Krümmung* H *in den Punkten von* $\mathfrak{K}$ *den folgenden Bedingungen:*

$$H = H(s), \quad \frac{\partial H}{\partial n} = H_1(s) \tag{46}$$

genügt, wobei n *die Bogenlänge in der Normalrichtung auf die Kurve* $\mathfrak{K}$ *bedeutet. Zugleich ist die im Punkte* A *gewählte Richtung Hauptkrümmungsrichtung.*

Wiederum darf die Kurve $\mathfrak{K}$ auf der neuen Fläche keine Asymptotenlinie werden und sie muß auf dieser allen Nabelpunkten ausweichen.

---

[1]) Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 407.

Ist die Kurve $\mathfrak{K}$ in einem orthogonalen Koordinatensystem die Linie $u^1 = 0$, so können wir die Bedingung (46) folgendermaßen umschreiben:

$$H = H(u^2), \quad \frac{\partial H}{\partial u^1} = H_1(u^2).$$

Setzen wir diese Werte und $u^1 = 0$ in die zweite Gleichung des Systems (44) ein, so erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktion $\Theta = \Theta(u^2)$ von der Form

$$\frac{d\Theta}{du^2} = A(u^2)\cos\Theta + B(u^2)\sin\Theta + C(u^2).$$

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichung enthält noch eine Integrationskonstante, über die man passend verfügen kann.

30. Die Existenztheoreme der vorhergehenden Abschnitte können erweitert werden auf Fälle, in denen Funktionen auftreten, die nur endlich viele Ableitungen besitzen. Die Durchführung des Beweises geschieht in enger Anlehnung an die Arbeit des Herrn O. Perron: „Über die Existenz und Nichtexistenz von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme im reellen Gebiet“[2]). Diese Erweiterung ist gegenwärtig nur möglich bei Flächen negativer Gaußscher Krümmung; auf Grund der Beispiele in der oben erwähnten Arbeit des Herrn Perron darf man aber vermuten, daß die Flächen positiver Krümmung, für welche ein System (33) gilt, analytischer Natur sind.

Die Resultate des Herrn Perron kann man nicht ohne weiteres verwenden, da diese nur für partielle Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + g(x, y, z)$$

gelten, in welchen der Koeffizient f von $\frac{\partial z}{\partial y}$ eine Funktion von x und y allein ist. In unserem Falle hängt aber f auch von der unbekannten Funktion z ab. Diese Schwierigkeit kann überwunden werden, da für das System (33) die Abhängigkeit der entsprechenden Koeffizienten von den unbekannten Funktionen recht einfacher Natur ist.

Die gewonnenen Ergebnisse fassen wir im folgenden Satz zusammen:

Das Existenztheorem in der Theorie der Flächenverbiegung kann bei Flächen negativer Gaußscher Krümmung für jenen Bereich bewiesen werden, in welchen die Koeffizienten der ersten Grundform $g_{ik}\,du^i\,du^k$ stetige Ableitungen fünfter Ordnung nach beiden Variabeln besitzen und den auf der Kurve $\mathfrak{K}$ gegebenen Werten der mittleren Krümmung H und der Hilfsfunktion Θ stetige Ableitungen dritter Ordnung nach der Bogenlänge von $\mathfrak{K}$ zukommen.

[2]) Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 549ff.

(Eingegangen am 3. März 1933.)

A Note on the Extremal Surfaces in the Calculus of Variations.

By

E. K. Haviland in Baltimore.

Let $F(u, u_x, u_y, x, y)$ be defined everywhere in u, u_x, u_y and throughout the interior and on the boundary of a region D in the xy-space to which the Gauss-Green formula can be applied. For the present it is supposed that F is an analytic function of all its arguments throughout its domain of definition. u is to be a function such that its partial derivatives u_x and u_y are uniformly continuous in the open domain D.

Let u be of the form

$$u(x, y, \varepsilon) = u^*(x, y) + \varepsilon\, \zeta(x, y)$$

where ε ($\geqq 0$) is a parameter and ζ vanishes on the boundary of D. From the requirements previously imposed on u it follows that u^*, ζ are also to be functions whose first partial derivatives are uniformly continuous in the open domain D.

Then it is known that the extremals, i. e., the values u^* which cause the first variation of

$$\iint_D F(u, u_x, u_y, x, y)\, dx\, dy$$

to vanish identically in ζ, are furnished by solutions of the corresponding Euler-Lagrange second order differential equation with the given boundary conditions. Hadamard [1]) has pointed out, however, that there exist functions u^* for which the first variation vanishes, although the function u^* does not satisfy the corresponding differential equation. He cites as an example the case where

$$F = u_x^2 - u_y^2$$

the general solution of the corresponding Euler-Lagrange equation, viz.

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

---

[1]) J. Hadamard, C. R. 144 (1907), p. 1092.

being *formally* $u^* = f(x+y) + \varphi(x-y)$. Since f and φ may posess continuous first derivatives but no second derivatives at all, he states that the Euler-Lagrange condition is not a necessary one.

It is, of course, necessary to prove that the first variation does vanish in this case. A proof has been given by Bolza[2]). He requires that the function ζ shall have continuous *second* derivatives, a restriction which is quite artificial, inasmuch as the extremal u^* itself possesses *first* continuous derivatives only. The following proof is free from the restriction that ζ shall possess second derivatives[3]).

As before, let

$$F(u, u_x, u_y, x, y) = u_x^2 - u_y^2.$$

As the region D, we take the unit circle and its interior. As boundary conditions we require

$$u = f(x+y) + \varphi(x-y) \quad \text{on} \quad x^2 + y^2 = 1$$

where $f(t)$ and $\varphi(t)$ are real functions of one variable with continuous first derivatives but no second derivatives. Such a function is furnished by the primative of the well-known function of Weierstrass.

Then the function

$$u^* = f(x+y) + \varphi(x-y)$$

fulfills the requirements placed on u in our introduction and also fulfills the boundary conditions. Furthermore, it causes the first variation of the integral to vanish for all functions ζ, i. e.

$$I(u^*, \zeta) \equiv 2 \iint_D [f'(x+y)(\zeta_x - \zeta_y) + \varphi'(x-y)(\zeta_x + \zeta_y)]\, dx\, dy = 0$$

where $f'(t)$ is the derivative of $f(t)$ and $\varphi'(t)$ that of φ. To prove this, we make a rotation of D: $x^2 + y^2 \leqq 1$ through 45^0 by means of the transformation

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

so that

$$I(u^*, \zeta) \equiv 2 \iint_D [f'(\xi)\, \zeta_\eta + \varphi'(\eta)\, \zeta_\xi]\, d\xi\, d\eta.$$

[2]) O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig (1909), p. 658.

[3]) L. Lichtenstein, Math. Annalen 69 (1910), p. 514, has given a satisfactory proof in the elliptic case. However, his method is advanced and his function F can not be analytic.

As the conditions imposed on the double integral permit of its being evaluated as an iterated integral in either order, we obtain

$$I(u^*, \zeta) \equiv 2\left\{\int_{-1}^{1} f'(\xi)\, d\xi \int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{\sqrt{1-\xi^2}} \zeta_\eta\, d\eta + \int_{-1}^{1} \varphi'(\eta)\, d\eta \int_{-\sqrt{1-\eta^2}}^{\sqrt{1-\eta^2}} \zeta_\xi\, d\xi\right\} = 0$$

as here $\zeta = 0$ for $\xi^2 + \eta^2 = 1$. In thus removing the restriction that ζ possess second partial derivatives, we have answered a question first raised, as far as we know, by W. F. Osgood[4]).

[4]) W. F. Osgood, Annals of Math., Ser. 2, 2 (1900—1901), p. 125, footnote.

(Eingegangen am 19. März 1933.)

Krümmungsfeste Kurven bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung.

Von

Robert Sauer in Aachen.

Gegenüber endlichen Verbiegungen einer Fläche Φ ist zwar die geodätische Krümmung der auf Φ verlaufenden Kurven, nicht aber ihre Raumkrümmung $k(u, v)$ invariant. Bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung

$$\mathfrak{x}^*(u, v) = \mathfrak{x}(u, v) + \varepsilon \bar{\mathfrak{x}}(u, v) \tag{1}$$

ändert sich die Raumkrümmung $k(u, v)$ einer Flächenkurve im allgemeinen in der Ordnung ε. Eine besondere Rolle spielen die Asymptotenlinien der Fläche: Wie aus einer einfachen geometrischen Überlegung oder auch aus Gleichung (5) folgt, bleibt ihre Raumkrümmung $k(u, v)$ (— vorausgesetzt $k \neq 0$ —) in der Ordnung ε ungeändert. Ich werde nun untersuchen, ob es neben den Asymptotenlinien noch andere Flächenkurven gibt, deren Raumkrümmung $k(u, v)$ sich bei der infinitesimalen Verbiegung (1) ebenfalls in der Ordnung ε nicht ändert, bei denen also die Beziehung gilt

$$k^*(u, v) = k(u, v) + \varepsilon^2 \{\ldots\}. \tag{2}$$

Solche (— von Asymptotenlinien verschiedene —) Flächenkurven bezeichne ich als krümmungsfest hinsichtlich der infinitesimalen Flächenverbiegung (1). Im folgenden werde ich sämtliche krümmungsfesten Kurven bestimmen und zeigen, daß es bei jeder infinitesimalen Flächenverbiegung zwei Scharen krümmungsfester Kurven gibt, die auch zusammenfallen oder imaginär sein können.

Die Scharen krümmungsfester Kurven haben die bemerkenswerte Eigenschaft, ebenso wie die Asymptotenlinien gegenüber projektiven Transformationen invariant zu bleiben, obwohl die zur Definition benutzten Begriffe der Flächenverbiegung und der Kurvenkrümmung metrischer Art sind. Die vorliegende Arbeit liefert also einen Beitrag zur projektiven Differentialgeometrie[1]).

[1]) Über eine ähnliche Fragestellung vgl. R. Sauer: Wackelige Kurvennetze usw., Math. Annalen 108 (1933), S. 673—693. Auf eine mechanische Deutung beabsichtige ich später zurückzukommen; vgl. Fußnote [3]).

§ 1.

Krümmungsfeste Parameterkurven.

Ich werde folgende bekannten Tatsachen aus der Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung benutzen:

Zwischen der Ortsvektorfunktion $\mathfrak{x}(u, v)$[2]) der Fläche Φ und der die infinitesimale Verbiegung (1) bestimmenden Vektorfunktion $\bar{\mathfrak{x}}(u, v)$ bestehen die Relationen[3])

$$\bar{\mathfrak{x}}_u = \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_u, \quad \bar{\mathfrak{x}}_v = \mathfrak{x}' \times \mathfrak{x}_v. \tag{3}$$

Durch tiefgesetzte Zeiger werden hier und im folgenden partielle Ableitungen bezeichnet. Aus den Integrierbarkeitsbedingungen von (3) folgt[4])

$$\mathfrak{x}'_u = \mu(u, v)\,\mathfrak{x}_u + \lambda(u, v)\,\mathfrak{x}_v, \quad -\mathfrak{x}'_v = \nu(u, v)\,\mathfrak{x}_u + \mu(u, v)\,\mathfrak{x}_v. \tag{4}$$

Die in (3) eingeführte Vektorfunktion $\mathfrak{x}'(u, v)$ kann man bei $\lambda\nu - \mu^2 \neq 0$ als Ortsvektor einer neuen Fläche Φ' deuten, die nach Blaschke[5]) Drehriß von Φ hinsichtlich der infinitesimalen Flächenverbiegung (1) heißt. Wie (4) zeigt, ist die Beziehung zwischen der Fläche Φ und dem Drehriß Φ' vertauschbar. Bei $\lambda\nu - \mu^2 = 0$ entartet Φ' in eine Kurve oder einen Punkt. Im ersten Fall ist Φ' Regelfläche und wird als Regelfläche verbogen; den zweiten Fall können wir von der Betrachtung ausschließen, da sich hier die infinitesimale Verbiegung zu einer reinen Bewegung spezialisiert.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Krümmungsfestigkeit einer Parameterkurve ($u = \text{const}$) erhalten wir nun folgendermaßen:

---

[2]) Dabei ist hier und im folgenden stets vorausgesetzt, daß die Parameterkurven in dem betrachteten einfach zusammenhängenden Bereich $a \leqq u \leqq b$, $p \leqq v \leqq q$ ein Kurvennetz bilden; d. h. zwei Kurven gleicher Schar haben keinen, dagegen zwei Kurven verschiedener Scharen genau einen Punkt (— als Schnittpunkt, nicht Berührpunkt! —) gemeinsam.

[3]) Vgl. z. B. M. Lagally: Über Spannung und elastische Deformation unebener Membranen, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 4 (1924), S. 377—383; E. Beltrami: Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili, Mem. della accad. di Bologna, IV (III), 1881, S. 217—265.

[4]) Vgl. R. Sauer, Math. Annalen 1933, Gleichung (7).

[5]) W. Blaschke: Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegsamen Haut, Int. Congr. of Math. Cambridge 1912, Proceedings 2 (1913), S. 291—294; vgl. ferner L. Bianchi: Lezioni di geometria differenziale, 3. Auflage, II (1), § 283 („superficie associate").

Setzt man, wie üblich[6]),

$$E(u,v) = \mathfrak{x}_u^2 > 0, \qquad F(u,v) = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v, \qquad G(u,v) = \mathfrak{x}_v^2 > 0,$$

$$L(u,v) = \langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uu} \rangle, \quad M(u,v) = \langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv} \rangle, \quad N(u,v) = \langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv} \rangle,$$

so ergibt sich bei der infinitesimalen Flächenverbiegung (1) für die Krümmung einer Kurve $u = \text{const}$ nach kurzer Rechnung

$$(5) \qquad k^*(u,v)^2 = \frac{(\mathfrak{x}_v^* \times \mathfrak{x}_{vv}^*)^2}{(\mathfrak{x}_v^{*\,2})^3} = \frac{(\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{vv})^2}{(\mathfrak{x}_v^2)^3} - 2\varepsilon\nu \frac{\langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv} \rangle}{(\mathfrak{x}_v^2)^2} + \varepsilon^2 \{\ldots\}$$

$$= k^2(u,v) - 2\varepsilon\nu \frac{N}{G^2} + \varepsilon^2 \{\ldots\}.$$

Die Gleichungen (2) und (5) sind im Falle $N = 0$, $k \neq 0$ stets, dagegen im Falle $N \neq 0$ (also auch $k \neq 0$) dann und nur dann miteinander verträglich, wenn $\nu = 0$ ist.

Im ersten Fall ist die Kurve $u = \text{const}$ Asymptotenlinie, im zweiten Falle krümmungsfeste Kurve[7]). Somit haben wir folgendes Ergebnis:

Eine Parameterkurve $u = \text{const}$ ist dann und nur dann krümmungsfest, wenn für jeden ihrer Punkte $\nu = 0$, $N \neq 0$ gilt.

§ 2.

Bestimmung sämtlicher krümmungsfesten Kurven.

Durch die Parametertransformation

$$U = U(u,v), \quad V = V(u,v)$$

mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante

$$(6) \qquad U_u V_v - U_v V_u \neq 0$$

wird das u,v-Kurvennetz[2]) durch ein U,V-Kurvennetz ersetzt und die Gleichungen (4) gehen über in

$$\mathfrak{x}'_U = \mathsf{M}\,\mathfrak{x}_U + \Lambda\,\mathfrak{x}_V, \quad -\mathfrak{x}'_V = \mathsf{N}\,\mathfrak{x}_U + \mathsf{M}\,\mathfrak{x}_V$$

mit

$$-\mathsf{N} = (U_u V_v - U_v V_u)^{-1} (\lambda U_v^2 + 2\mu U_u U_v + \nu U_u^2).$$

Notwendig und hinreichend für die Krümmungsfestigkeit einer (— keine Asymptotenlinie berührenden —) Kurve $U(u,v) = \text{const}$ ist nach § 1 das Verschwinden der Funktion N für alle Punkte dieser Kurve oder, was nach (6) hiermit gleichbedeutend ist, das Erfülltsein der Gleichung

$$(7) \qquad \lambda U_v^2 + 2\mu U_u U_v + \nu U_u^2 = 0.$$

---

[6]) Der Klammerausdruck $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \rangle$ bedeutet das dreifache Produkt $(\mathfrak{x} \times \mathfrak{y})\,\mathfrak{z}$.

[7]) Etwa vorhandene einzelne Punkte, in denen eine krümmungsfeste Kurve von einer Asymptotenlinie berührt wird ($N = 0$), schließen wir von der Betrachtung aus.

Ersetzt man vermöge

$$U_u\,du + U_v\,dv = 0$$

die partiellen Ableitungen U_u, U_v durch die Differentiale dv, $-du$, so ergibt sich aus (7) die Differentialgleichung[8])

$$\lambda\,du^2 - 2\mu\,du\,dv + \nu\,dv^2 = 0, \tag{8}$$

der alle krümmungsfesten Kurven genügen müssen.

Bei der Diskussion der Differentialgleichung (8) sind drei Fälle zu unterscheiden:

α) $\lambda\nu - \mu^2 < 0$. Die Gleichung (8) liefert ein reelles Kurvennetz. Nimmt man die Kurven dieses Netzes als Parameterkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, so folgt aus (8) $\lambda = \nu = 0$, und die Gleichungen (4) spezialisieren sich zu

$$\mathfrak{x}'_u = \mu\,\mathfrak{x}_u, \qquad -\mathfrak{x}'_v = \mu\,\mathfrak{x}_v \qquad (\mu \neq 0). \tag{9}$$

Die Integrabilitätsbedingung von (9), nämlich

$$2\mu\,\mathfrak{x}_{uv} + \mu_v\,\mathfrak{x}_u + \mu_u\,\mathfrak{x}_v = 0, \tag{10}$$

liefert $M \equiv \langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}\rangle = 0$, d. h. die beiden Scharen des Kurvennetzes sind zueinander konjugiert. Da demnach die Kurven keine Asymptotenlinien berühren, sind sie in der Tat krümmungsfest.

β) $\lambda\nu - \mu^2 > 0$. Die Integralkurven von (8) sind imaginär.

γ) $\lambda\nu - \mu^2 = 0$. Die Fläche Φ ist eine Regelfläche (vgl. § 1) und Gleichung (8) liefert die Erzeugenden der Regelfläche, also lediglich Asymptotenlinien. Zusammengefaßt haben wir somit folgendes Ergebnis:

Im Falle $\lambda\nu - \mu^2 < 0$, und nur in diesem Falle existieren reelle krümmungsfeste Kurven; sie bilden zwei zueinander konjugierte Scharen eines Kurvennetzes[9]).

Wie man sich durch eine kurze Rechnung[10]) überzeugt, ist bei $LN - M^2 > 0$ die Ungleichung $\lambda\nu - \mu^2 < 0$ stets erfüllt, d. h.: *Bei einer infinitesimalen Verbiegung einer Fläche positiven Krümmungsmaßes gibt es stets zwei Scharen reeller krümmungsfester Kurven.* Bei Flächen negativen Krümmungsmaßes ($LN - M^2 < 0$) können alle drei Fälle $\lambda\nu - \mu^2 \lessgtr 0$,

---

[8]) Vgl. R. Sauer, Math. Annalen 108 (1933), S. 685.

[9]) Die Diagonalkurven eines krümmungsfesten Kurvennetzes bilden ein „wackeliges" Kurvennetz im Sinne meiner in Fußnote [1]) zitierten Arbeit.

[10]) Die Gleichungen (4) geben als Integrabilitätsbedingung

$$\lambda N + 2\mu M + \nu L = 0.$$

Für $LN - M^2 > 0$ folgt hieraus $\lambda\nu - \mu^2 < 0$.

bei abwickelbaren Flächen ($LN - M^2 = 0$) die beiden Fälle $\lambda\nu - \mu^2 \leqq 0$ eintreten.

Für den Fall $\lambda\nu - \mu^2 < 0$ seien einige Beispiele angegeben:

a) Infinitesimale Verbiegung einer Drehfläche Φ als Drehfläche:

$$\Phi) \quad x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = f(u), \quad (\Phi = \text{Drehfläche}),$$

$$\Phi') \quad x' = \frac{1}{f'}\sin v, \quad y' = -\frac{1}{f'}\cos v, \quad z' = v, \quad (\Phi' = \text{Wendelfläche}).$$

Die Punkte bedeuten Differentiation nach u. Mit $\lambda = \frac{f''}{u f'^2}$, $\mu = 0$, $\nu = -\frac{1}{f'}$ ergeben sich unter der Annahme $\frac{f''}{u f'} > 0$ aus (8) die reellen krümmungsfesten Kurven

$$v = \pm \int_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{f''}{u f'}}\, du + \text{const.}$$

Ist die Drehfläche Φ eine Kugel ($f(u) = R\cos u$), so sind die krümmungsfesten Kurven die $\pm 45^0$-Trajektorien der Meridiane.

b) Infinitesimale Verbiegung einer Schiebfläche Φ:

$$\Phi) \quad x = a_1(u) + b_1(v), \quad y = a_2(u) + b_2(v), \quad z = a_3(u) + b_3(v),$$

$$\Phi') \quad x' = a_1(u) - b_1(v), \quad y' = a_2(u) - b_2(v), \quad z' = a_3(u) - b_3(v),$$

(Φ, Φ' = Schiebflächen).

Wegen $\lambda = \nu = 0$, $\mu = 1$ sind die Leitkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ krümmungsfest.

§ 3.

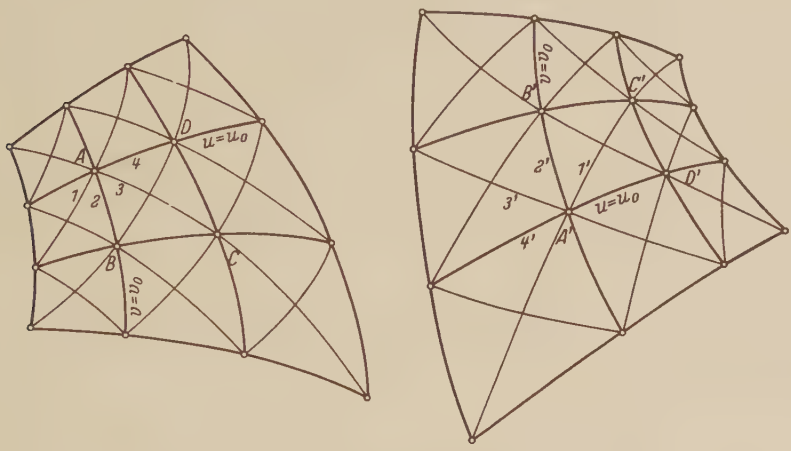
Antiparallele Kurvennetze.

Zwei Flächenbereiche Φ, Φ' seien durch gleiche u, v-Wertepaare punktweise umkehrbar eindeutig aufeinander bezogen und die Kurvenscharen $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ sollen auf Φ bzw. Φ' ein Kurvennetz[2]) C bzw. C' bilden. Ich bezeichne C und C' als antiparallele Kurvennetze, wenn in entsprechenden Punkten von Φ und Φ' folgende Beziehungen bestehen:

Die Tangenten der Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $u + v = \text{const}$, $u - v = \text{const}$ von Φ sind parallel zu den Tangenten der Kurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $u - v = \text{const}$, $u + v = \text{const}$ von Φ'.

Die Flächen Φ, Φ' haben also in entsprechenden Punkten parallele Tangentenebenen. Zwei einander entsprechende von Parameterlinien begrenzte (i. a. krummlinige) Vierecke von Φ und Φ' haben supplementäre

Winkel und werden bei der punktweisen Zuordnung von Φ und Φ' gegensinnig durchlaufen (vgl. Figur; die Tangenten von 1, 2, 3, 4 sind parallel zu den Tangenten von 1′, 2′, 3′, 4′).



Da die Gleichungen (9) für antiparallele Kurvennetze kennzeichnend sind, gilt der Satz:

Für die von einem Kurvennetze C aufgespannte Fläche Φ gibt es dann und nur dann eine infinitesimale Verbiegung[11]*, bei der C krümmungsfest ist, wenn ein zu C antiparalleles Kurvennetz C' existiert.*

Aus der Gegenseitigkeit der antiparallelen Beziehung folgt weiter:

Es gibt auch für die von C' aufgespannte Fläche Φ' eine infinitesimale Verbiegung, bei der C' krümmungsfest ist.

In den beiden in § 2 angegebenen Beispielen haben wir folgende antiparallelen Kurvennetze:

a) auf der Drehfläche Φ: zwei Scharen durch Drehung auseinander hervorgehender Kurven,
auf der Wendelfläche Φ': zwei Scharen durch Schraubung auseinander hervorgehender Kurven;

b) auf der Schiebfläche Φ: } die zwei Scharen der kongruenten,
auf der Schiebfläche Φ': } parallelgestellten Leitkurven.

[11]) Nach § 4 kann es nur eine einzige solche infinitesimale Verbiegung geben; denn durch (11) ist bei Vorgabe eines krümmungsfesten Kurvennetzes die Funktion μ bis auf einen konstanten Faktor c und durch (9) die die infinitesimale Verbiegung kennzeichnende Vektorfunktion $\mathfrak{x}'$ bis auf einen konstanten Faktor c und eine additive Vektorkonstante $\mathfrak{a}$ festgelegt.

§ 4.

Projektive Invarianz der krümmungsfesten Kurven.

Wenn auf einer Fläche Φ hinsichtlich der infinitesimalen Verbiegung (1) krümmungsfeste Kurven existieren, so bilden sie ein Kurvennetz $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, und es gelten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen (9). Aus der Integrierbarkeitsbedingung (10) ergeben sich durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu}$, $\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{vv}$ und wegen $L \neq 0$, $N \neq 0$ (vgl. § 1) die Gleichungen

$$(11)\quad M = 0, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \mu}{\partial u} = \frac{\langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_{uv}\rangle}{L}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \mu}{\partial v} = -\frac{\langle \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}, \mathfrak{x}_{uv}\rangle}{N}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$P = \langle \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_{uu}, \mathfrak{x}_{uv}\rangle, \quad Q = \langle \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{vv}, \mathfrak{x}_{uv}\rangle,$$

so hat man als notwendige Bedingungen der Krümmungsfestigkeit der Parameterkurven

$$(12)\quad L \neq 0, \quad N \neq 0, \quad M = 0; \quad N^2(LP_v - PL_v) + L^2(NQ_u - QN_u) = 0.$$

Die letzte der Gleichungen (12) ist die Integrierbarkeitsbedingung der beiden letzten Gleichungen von (11). Die Gleichungen (12) sind auch hinreichend für die Krümmungsfestigkeit der Parameterkurven. Denn bei Erfülltsein von (12) kann man zur vorgegebenen Vektorfunktion $\mathfrak{x}$ nach (11) die Funktion μ und nach (9) die Vektorfunktion $\mathfrak{x}'$ berechnen; vgl. [11]).

Wir wollen nun zeigen, daß die Krümmungsfestigkeit eine projektiv-invariante Eigenschaft ist. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Bedingungen (12) in homogenen Koordinaten [12]):

Aus $x = \frac{\xi}{\vartheta}$, $y = \frac{\eta}{\vartheta}$, $z = \frac{\zeta}{\vartheta}$ folgt nach einiger Rechnung:

$$\vartheta^4 L = (1, 2, 11, 0), \quad \vartheta^4 N = (1, 2, 22, 0), \quad \vartheta^4 M = (1, 2, 12, 0);$$

$$\begin{aligned}\vartheta^{16}\{N^2(LP_v - PL_v) + L^2(NQ_u - QN_u)\} &= (1,2,22,0)^2\{(1,2,11,0)[(1,112,12,0) + (1,11,122,0) - (1,11,12,2)] \\ &\quad + (1,12,11,0)[(12,2,11,0) + (1,22,11,0) - (1,2,112,0)]\} \\ &\quad - (2,1,11,0)^2\{(2,1,22,0)[(2,122,12,0) + (2,22,112,0) - (2,22,12,1)] \\ &\quad + (2,12,22,0)[(12,1,22,0) + (2,11,22,0) - (2,1,122,0)]\}.\end{aligned}$$

---

[12]) Vgl. hierzu H. Liebmann: Ausnahmefachwerke und ihre Determinante, Münchener Berichte, math.-phys. Klasse 50 (1920), S. 197—227, ferner R. Sauer, Math. Annalen 108 (1933), S. 689.

Mit den Klammerausdrücken $(\cdots)$ sind hierbei vierreihige Determinanten bezeichnet, z. B. bedeutet (1, 2, 112, 0) in leicht verständlicher Symbolik die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi_u & \xi_v & \xi_{uuv} & \xi \\ \eta_u & \eta_v & \eta_{uuv} & \eta \\ \zeta_u & \zeta_v & \zeta_{uuv} & \zeta \\ \vartheta_u & \vartheta_v & \vartheta_{uuv} & \vartheta \end{vmatrix}.$$

Da diese Determinanten gegenüber projektiven Transformationen invariant und da die linken Seiten von (12) homogene Funktionen der Determinanten sind, erhalten wir den bereits in der Einleitung angekündigten Satz:

Wenn ein Kurvennetz C einer Fläche Φ für eine infinitesimale Verbiegung von Φ krümmungsfest ist, so gibt es für jede zu Φ projektive Fläche $\bar{\Phi}$ eine (und nach Fußnote [11]) nur eine) infinitesimale Verbiegung, bei der das zu C projektive Kurvennetz $\bar{C}$ ebenfalls krümmungsfest ist.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß eine kontinuierliche endliche Verbiegung, bei der die Kurven einer Schar krümmungsfest bleiben, nicht möglich ist.

(Eingegangen am 31. März 1933.)

Verallgemeinerung einer Dirichletschen Summenumformung.

Von

Otto Hölder in Leipzig.

§ 1.

Die allgemeine Formel.

In seiner Abhandlung „Über ein die Division betreffendes Problem" hat Dirichlet[1]) eine allgemeine Formel für die Transformation gewisser Summen angegeben. Diese Formel, die auch seitdem vielfach benutzt worden ist, stellt eine Verallgemeinerung einer anderen Formel dar, die Dirichlet zur Lösung seines berühmten Teilerproblems, d. h. zur Bestimmung der asymptotischen Funktion der Summe

$$\sum_{(n)} \left[\frac{x}{n}\right]$$

angewendet hatte[2]).

Die genannte Formel läßt sich auch weiter verallgemeinern, wobei sie zugleich ein symmetrischeres und übersichtlicheres Ansehen gewinnt. Der Beweis, durch den ich die allgemeinere Formel erhalte, macht noch von einer von Lipschitz benutzten Anordnung Gebrauch[3]) und scheint mir auch schon für den ursprünglichen Sonderfall leichter verständlich zu sein als der Beweis von Dirichlet.

Es werde zunächst in der Weise von Dirichlet eine endliche, eindeutige und stetige reelle Funktion $z = f(y)$ angenommen, die, wenn y von α bis α' (algebraisch) wächst, beständig abnimmt und auch nirgends konstant bleibt. Diese Funktion hat dann auch eine Umkehrung $y = g(z)$, die gleichfalls immer abnimmt, wenn ihr Argument z von $f(\alpha')$ bis $f(\alpha)$ wächst.

Nun werden noch zwei Folgen von reellen Zahlgrößen

(1) $\qquad a_1, a_2, a_3, \ldots$

und

(2) $\qquad b_1, b_2, b_3, \ldots$

---

[1]) Vgl. Werke, 2, S. 101.

[2]) $[\xi]$ bedeutet dabei das in ξ enthaltene größte Ganze.

[3]) Acta Mathematica 2 (1883), S. 301.

angenommen. In jeder dieser Folgen sollen die Glieder algebraisch wachsen, niemals zwei Glieder einander gleich sein, und die Glieder schließlich gegen $+\infty$ gehen, so daß also in jedem endlichen Zahlenintervall nur eine endliche Zahl von Gliedern gelegen ist. Dabei können auch gewisse Glieder der einen Folge gewissen Gliedern der anderen gleich sein, ja sogar unter Umständen beide Folgen übereinstimmen. Den Gliedern dieser beiden Folgen werden noch zwei beliebige Funktionen $\varphi(a)$ und $\psi(b)$ zugeordnet und deren summatorische Funktionen mit Φ und Ψ bezeichnet, so daß also

$$\Phi(x) = \sum_{a \leqq x} \varphi(a) \quad \text{und} \quad \Psi(x) = \sum_{b \leqq x} \psi(b)$$

ist.

Mit Hilfe der Folgen (1) und (2) wird nun das Schema von Zahlenpaaren

$$\text{(3)} \qquad \begin{array}{lll} a_\mu, & b_1 & a_\mu, \quad b_2 \quad a_\mu, \quad b_3 \quad . \\ a_{\mu+1}, & b_1 & a_{\mu+1}, \; b_2 \quad a_{\mu+1}, \; b_3 \quad . \\ a_{\mu+2}, & b_1 & a_{\mu+2}, \; b_2 \quad a_{\mu+2}, \; b_3 \quad . \\ \cdot & & \cdot \qquad \cdot \qquad . \\ a_\nu, & b_1 & a_\nu, \quad b_2 \quad a_\nu, \quad b_3 \quad . \end{array}$$

gebildet. In diesem Schema wird jede Zeile von einer Zahl a und jede Spalte von einer Zahl b beherrscht, und es sind von vornherein die Zeilen dabei weggelassen, in denen $a \leqq \alpha$ und $a > \alpha'$ ist. Es sollen aber außerdem noch die Stellen a, b des Schemas gelöscht werden, in denen nicht

$$\text{(4)} \qquad b \leqq f(a)$$

ist.

Auf jede Stelle a, b, die nunmehr noch übriggeblieben ist, wird das Produkt $\varphi(a) \cdot \psi(b)$ gesetzt, und ich will nun die Summe der Produkte

$$\text{(5)} \qquad \begin{array}{lll} \varphi(a_\mu)\,\psi(b_1) & \varphi(a_\mu)\,\psi(b_2) & \varphi(a_\mu)\,\psi(b_3) \quad . \\ \varphi(a_{\mu+1})\,\psi(b_1) & \varphi(a_{\mu+1})\,\psi(b_2) & \varphi(a_{\mu+1})\,\psi(b_3) \quad . \\ \varphi(a_{\mu+2})\,\psi(b_1) & \varphi(a_{\mu+2})\,\psi(b_2) & \varphi(a_{\mu+2})\,\psi(b_3) \quad . \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(a_\nu)\,\psi(b_1) & \varphi(a_\nu)\,\psi(b_2) & \varphi(a_\nu)\,\psi(b_3) \quad . \end{array}$$

über die nichtgelöschten Stellen berechnen. Man wird entweder zuerst in den Zeilen oder zuerst in den Spalten addieren. Im ersten Fall erhält man in der durch eine bestimmte Zahl a beherrschten Zeile

$$\varphi(a)\,\{\psi(b_1) + \psi(b_2) + \ldots\},$$

wobei die in der Klammer stehende Summe wegen der zum Schema (3) hinzugefügten Bedingung (4) sich bis zu dem größten b erstreckt, das noch $\leqq f(a)$ ist; man erhält also in dieser Zeile

$$\varphi(a)\,\Psi(f(a)).$$

Dies ist auch dann noch richtig, falls in dieser Zeile alle Stellen gelöscht sein sollten, insofern, als dann gar kein b vorhanden ist, das kleiner oder gleich diesem $f(a)$ wäre, so daß also

$$\Psi(f(a)) = 0$$

ist. Aus dem ganzen Schema (5) ergibt sich jetzt als Summe

$$\sum_{\alpha < a \leqq \alpha'} \varphi(a)\,\Psi(f(a)). \tag{6}$$

Nunmehr soll zuerst in den Spalten summiert werden. Falls $b_\varrho \leqq f(\alpha')$ ist, ergibt sich aus (4) und aus unseren anderen Annahmen, daß alle Glieder der ϱ-ten Spalte von (3) bzw. von (5) vorhanden, da alle vorkommenden a kleiner oder gleich α' und infolgedessen die zugehörigen Werte $f(a)$ größer oder gleich $f(\alpha')$ und somit auch $\geqq b_\varrho$ sind. Man erhält also aus dieser Spalte von (5) die Summe

$$\psi(b_\varrho) \sum_{\alpha < a \leqq \alpha'} \varphi(a) = \psi(b_\varrho)\,(\Phi(\alpha') - \Phi(\alpha)).$$

Es ergibt sich also aus allen den bis jetzt betrachteten Spalten die Summe

$$\Psi(f(\alpha'))\,(\Phi(\alpha') - \Phi(\alpha)). \tag{7}$$

Falls keine der Zahlen b kleiner oder gleich $f(\alpha')$ ist, ist $\Psi(f(\alpha')) = 0$, und fällt dieser Summenteil fort.

Betrachten wir jetzt die σ-te Spalte, wobei $b_\sigma > f(\alpha')$ sein soll. Falls in dieser Spalte Produkte stehen, ist ihre Summe gleich

$$\psi(b_\sigma)\,\{\varphi(a_\mu) + \varphi(a_{\mu+1}) + \ldots\}, \tag{8}$$

wobei die Summe in der Klammer wegen der Bedingung (4) bis zu dem größten in der Reihe

$$a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots a_\nu \tag{9}$$

enthaltenen Wert a zu führen ist, für den $f(a) \geqq b_\sigma$ ist. Für die Reihe (9) gilt nun

$$\alpha < a_\mu < a_{\mu+1} < \ldots < a_\nu \leqq \alpha'.$$

Wenn es überhaupt in (9) einen Wert a gibt, für den $f(a) \geqq b_\sigma$ ist, so ist wegen des Abnehmens der Funktion $z = f(y)$

$$f(\alpha') < b_\sigma \leqq f(a) < f(\alpha); \tag{10}$$

es liegt also dann auch b_σ in dem Intervall, das oben von z durchlaufen und für das die Umkehrung $g(z)$ der Funktion $z = f(y)$ definiert wurde.

Man erhält somit durch diese Umkehrung aus der fortlaufenden Ungleichung (10)

$$\alpha < a \leqq g(b_\sigma) < \alpha'.$$

Die Summe in der Klammer von (8) ist über die Werte der Reihe (9) zu erstrecken, für die $a \leqq g(b_\sigma)$ ist. Der Ausdruck (8) ist also gleich

$$(11) \qquad \psi(b_\sigma) \sum_{\alpha < a \leqq g(b_\sigma)} \varphi(a) = \psi(b_\sigma)\big(\Phi(g(b_\sigma)) - \Phi(\alpha)\big).$$

Der Ausdruck (8) soll nun über alle $b_\sigma > f(\alpha')$ summiert werden, zu denen Zahlen a der vorhin erwähnten Art gehören. Nach (10) liegen diese b_σ zwischen $f(\alpha')$ und $f(\alpha)$ und es ist für jedes solches b_σ der Ausdruck (8) durch (11) dargestellt. Wir können aber die Summationsgrenzen auch durch die Bedingung

$$f(\alpha') < b \leqq f(\alpha)$$

ausdrücken, indem dann, wenn ein $b = \bar{b}$ vorkommt, das gleich $f(\alpha)$ ist, der diesem $\bar{b}$ entsprechende Wert des Ausdrucks (11) gleich

$$\psi(\bar{b})\big(\Phi(g(\bar{b})) - \Phi(\alpha)\big) = \psi(\bar{b})\big(\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha)\big) = 0$$

ist.

Man bekommt also die Summe

$$\sum_{f(\alpha') < b \leqq f(\alpha)} \{\psi(b)\big(\Phi(g(b)) - \Phi(\alpha)\big)\}$$

oder, wenn man über die beiden Teile einzeln summiert,

$$(12) \qquad \sum_{f(\alpha') < b \leqq f(\alpha)} \psi(b)\Phi(g(b)) - \Phi(\alpha)\big(\Psi(f(\alpha)) - \Psi(f(\alpha'))\big).$$

Der bei der ersten Summationsweise erhaltene Ausdruck (6) muß nun gleich der Summe von (7) und (12) sein. Man erhält beim Zusammenrechnen das Schlußergebnis

$$(13) \qquad \sum_{\alpha < a < \alpha'} \varphi(a)\,\Psi(f(a)) - \sum_{f(\alpha') < b \leqq f(\alpha)} \psi(b)\,\Phi(g(b)) = \Phi(\alpha')\,\Psi(f(\alpha')) - \Phi(\alpha)\,\Psi(f(\alpha)).$$

Bezeichnet man nachträglich die Enden des oben von z beschriebenen Intervalls mit β und β', so kann man

$$f(\alpha') = \beta, \quad f(\alpha) = \beta', \quad \alpha' = g(\beta), \quad \alpha = g(\beta')$$

setzen, und man erkennt nach Einsetzen der neuen Bezeichnungen, daß die Schlußformel (13) nach einer bei der Herleitung vorhanden gewesenen Unsymmetrie vollständig symmetrisch geworden ist. Es ist noch zu bemerken, daß hier die Grenzen der Summation übersichtlicher gestaltet sind als bei Dirichlet, bei dem überdies die Folgen $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ mit der natürlichen Zahlenreihe zusammenfallen und durchweg $\psi(n) = 1$ ist.

§ 2.

Spezialfälle.

Ich lasse zunächst die beiden Folgen (1) und (2) der a und der b mit der Folge $1, 2, 3, \ldots$ der natürlichen Zahlen übereinstimmen. Ferner sei jetzt

$$z = f(y) = \frac{x}{y + \mathfrak{a}} - \mathfrak{b} \tag{14}$$

oder, was dasselbe ist,

$$y = g(z) = \frac{x}{z + \mathfrak{b}} - \mathfrak{a}, \tag{15}$$

wobei x eine positive Zahlgröße und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgendwelche reelle Zahlgrößen sein sollen. Von den beiden Variablen y und z, die stetig veränderlich gedacht waren, könnte man an sich y von $-\mathfrak{a}$ bis $+\infty$ wachsen lassen, wobei dann z von $+\infty$ bis $-\mathfrak{b}$ abnimmt. Wir werden also ein endliches Inservall $\alpha \ldots \alpha'$ so herausnehmen, daß

$$-\mathfrak{a} < \alpha < \alpha'$$

ist. Falls wir noch $\varphi(n)$ und $\psi(n)$ konstant gleich 1 sein lassen, erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{\alpha < n \leqq \alpha'} \left[\frac{x}{n + \mathfrak{a}} - \mathfrak{b}\right] - \sum_{\beta < n \leqq \beta'} \left[\frac{x}{n + \mathfrak{b}} - \mathfrak{a}\right] = [\alpha'][\beta] - [\alpha][\beta'], \tag{16}$$

wenn dabei mit Rücksicht auf (14) und (15)

$$\beta = \frac{x}{\alpha' + a} - \mathfrak{b}, \qquad \beta' = \frac{x}{\alpha + a} - \mathfrak{b} \tag{17}$$

gesetzt wird. Die Formel (16) ist für den Fall $\mathfrak{a} = 0$ mit der Gleichung gleichwertig, die Dirichlet an der erwähnten Stelle[4]) aus seiner allgemeinen Formel erschlossen hat. Ich will jetzt

$$\alpha = -\mathfrak{a} + \varepsilon, \qquad \alpha' = N$$

und dabei ε positiv hinreichend klein und N positiv hinreichend groß annehmen. Dadurch wird dann nach (17) das β gleich einer Zahlgröße, die beliebig wenig größer als $-\mathfrak{b}$, und β' gleich einer solchen, die beliebig groß gemacht werden kann. Nimmt man nun noch

$$\mathfrak{a} \geqq 0, \qquad \mathfrak{b} \geqq 0$$

an, so kann erreicht werden, daß der Anfang $1, 2, 3, \ldots$ der natürlichen Zahlenreihe bis zu einem beliebig entfernten Glied sowohl in das Intervall $\alpha \ldots \alpha'$, als in das Intervall $\beta \ldots \beta'$ hineinfällt. Es ist dann auch

$$[\alpha] = [\beta] = 0,$$

---

[4]) A. a. O. S. 101 unten.

und die Gleichung (16) geht in

$$\sum_{(n)} \left[\frac{x}{n+\mathfrak{a}} - \mathfrak{b}\right] - \sum_{(n)} \left[\frac{x}{n+\mathfrak{b}} - \mathfrak{a}\right] = 0 \tag{18}$$

über; es ist ersichtlich, daß in jeder der Summen die Glieder von einem gewissen an gleich Null sind, und es müssen bis dahin alle Glieder in der Summe eingesetzt werden. Gleichung (18) ist von mir schon einmal angegeben worden[5]).

Jetzt sollen die $a_1, a_2, \ldots$ und die $b_1, b_2, \ldots$ wieder irgendwelche Folgen, jedoch von positiven Zahlgrößen, und die Funktionen $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ ganz beliebige sein. Als Beziehung zwischen den Variablen y und z soll dabei

$$z = f(y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/k}, \quad y = g(z) = \frac{x}{z^k}$$

angenommen werden, wobei x und k feste positive Zahlgrößen bedeuten. Für das von der Variablen y durchlaufene Intervall $\alpha \ldots \alpha'$ setzen wir fest

$$\alpha = \varepsilon, \quad \alpha' = x^l,$$

wobei ε ein hinreichend klein zu nehmender positiver Zahlwert und l beliebig reell ist. Die Gleichung (13) geht dann in

$$\sum_{a \leqq x^l} \varphi(a)\, \Psi\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{1/k}\right) - \sum_{b > x^{(1-l)/k}} \psi(b)\, \Phi\left(\frac{x}{b^k}\right) = \Phi(x^l)\, \Psi(x^{(1-l)/k}) \tag{19}$$

über. Der Anfang der Summation in der ersten Summe und das Ende in der zweiten ist nun nicht mehr besonders zu bemerken, da $\alpha = \varepsilon$ beliebig klein und $f(\alpha) = (x/\varepsilon)^{1/k}$ beliebig groß gedacht werden kann; aus diesem Grunde ist auch das mit $\Phi(\alpha) = \Phi(\varepsilon) = 0$ multiplizierte zweite Glied der rechten Seite von (13) gleich Null geworden.

Nimmt man in Gleichung (19) die Größe x größer als 1, und l positiv hinreichend groß an, so erhält man

$$\sum_{(a)} \varphi(a)\, \Psi\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{1/k}\right) - \sum_{(b)} \psi(b)\, \Phi\left(\frac{x}{b^k}\right) = 0, \tag{20}$$

wo nun rechts der Faktor

$$\Psi(x^{(1-l)/k})$$

wegen des beliebig klein sich ergebenden Wertes von $x^{(1-l)/k}$ gleich Null geworden ist, und die beiden Summen über alle a bzw. alle b zu erstrecken sind. Formel (20) stimmt mit einer früher von mir angegebenen

---

[5]) Ber. d. math.-phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. 82 (1930), S. 165; vgl. auch Chr. Zeller, Göttinger Nachr. 1897, S. 268, wo der Fall $\mathfrak{b} = 0$ der Formel (18) angegeben ist.

Gleichung überein, falls die beiden Folgen $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ mit der natürlichen Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots$ übereinstimmen[6]).

Schließlich soll in (19) noch $k = 1$ und $\varphi(a) = \psi(b) = 1$ gesetzt werden. Bezeichnet man dabei die Anzahl der (positiven) Zahlen a bzw. b, die $\leqq \xi$ sind, mit $[\xi]_a$ bzw. $[\xi]_b$, so ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{a \leqq x^l} \left[\frac{x}{a}\right]_b - \sum_{b > x^{1-l}} \left[\frac{x}{b}\right]_a = [x^l]_a [x^{1-l}]_b. \tag{21}$$

Ich will jetzt $l = \frac{1}{2}$ annehmen. Falls zugleich die Folgen der a und der b beide mit der natürlichen Zahlenreihe zusammenfallen, deckt sich (21) mit der sogenannten Hermiteschen Formel, die auch in der Gestalt

$$\sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] - \sum_{n > \sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] = [\sqrt{x}]^2$$

geschrieben werden kann. Nimmt man aber für die Folgen der a und der b entweder beidemal die Folge der Zahlen gerader oder beidemal die Zahlen ungerader Zusammensetzung[7]) oder für die eine Folge die Zahlen gerader und für die andere die Zahlen ungerader Zusammensetzung, so erscheinen vier Gleichungen, die ich kürzlich in den Math. Ann. abgeleitet habe. Diese Gleichungen haben also im Grunde eine allgemeinere Bedeutung als diejenige, die ich ihnen an der angeführten Stelle zugeschrieben habe[8]).

---

[6]) Ber. d. math.-phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. 83 (1931) S. 330.

[7]) Ich nenne eine ganze Zahl von gerader bzw. ungerader Zusammensetzung, wenn sie das Produkt einer geraden bzw. ungeraden Anzahl von (gleichen oder ungleichen) Primzahlen ist.

[8]) Math. Ann. 108 (1933), S. 609 und 611, Gleichungen (11), (12), (18), (19). Die daselbst auf S. 612 unten angegebene weitere Gleichung (22) ist von anderer Art, dort müssen n'' und n' die natürlichen Zahlen von gerader bzw. ungerader Zusammensetzung bedeuten.

(Eingegangen am 7. Juli 1933.)

On the k-analogue of a result in the theory of the Riemann zeta function.

By

S. Chowla in Benares (India).

Introduction.

Let $\chi(n)$ denote a real primitive character (mod k). On the assumption of unproved results Littlewood [1]) showed that

$$(A) \qquad L(1) = \sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n} = \Omega_R(\log\log k)$$

which is the k-analogue of the result $\zeta(1+ti) = \Omega(\log\log t)$, in the theorie of the Riemann zeta function, due to Bohr and Landau.

In this paper I prove (A) without any assumption.

Paley [2]) has recently shown that

$$\sum_1^m \chi(n) = \Omega(\sqrt{k}\log\log k).$$

From (A) I deduce the stronger result:

$$(B) \qquad \sum_1^{k/4} \chi(n) = \Omega_R(\sqrt{k}\log\log k)$$

§ 1.

Notation. p_r denotes the r^{th}-prime; $\sigma(n)$ the sum of the divisors of n if n is a positive integer, $\sigma(x) = 0$ if x is not a positive integer;

$$r_k(n) = \sum_{\substack{n_1^2+\ldots+n_k^2=n \\ n_1\ldots n_k \gtrless 0}} 1,$$

the number of representations of n as a sum of k squares; $r_k'(n)$ the number of primitive representations of n as a sum of k squares; $F(n)$ the number of classes of binary quadratic forms of negative determinant $-n$; $F'(n)$ the number of primitive classes of negative determinant $-n$; $\mu(n)$ is the Möbius symbol so that $\mu^2(n) = 1$ for quadratfrei n, $\mu^2(n) = 0$

[1]) Proc. Lond. Math. Soc. (Ser. 2) 27 (1928), 358—372.

[2]) Journ. Lond. Math. Soc. 7 (1932), 28—32.

when n is not quadratfrei; (a, b) is the greatest common divisior of a and b; (s/n) is Jacobi's symbol when $(s, n) = 1$, $(s/n) = 0$ when $(s, n) > 1$; B denotes a positive constant which may vary from place to place but is absolutely less than a fixed constant; $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_r$ $(p_1 = 2)$.

Numerals in thick print are references to the equations of this paper.

§ 2.

Lemma 1.

$$r_3(m) = 12 F(m) \qquad [m \equiv 1 \pmod 4]. \tag{1}$$

Proof. See L. Kronecker, Journ. f. Math. **57** (1860), 253.

Lemma 2. If $m \equiv 1 \pmod 4$, $\mu^2(m) = 1$,

$$r_3'(m) = 12 F'(m) = 24 \sum_1^{m/4} (s/m). \tag{2}$$

Proof. See Bachmann, Die Arithmetik der quadratischen Formen (I), 139—143.

Lemma 3. *If* $k > 1$, $\varkappa(n)$ *is a real primitive character* $(\mathrm{mod}\, k)$, *then*

$$\sum_1^a \varkappa(n) = B \sqrt{k} \log k. \tag{3}$$

Proof. See Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, II, 178, for the case k a prime. The argument applies without modification to general k when $\varkappa$ is primitive.

Lemma 4. *If* $\mu^2(M) = 1$, *then*

$$F'(M S^2) = S F'(M) \prod_{\substack{p \mid S \\ (p, 2M) = 1}} \left\{1 - \frac{1}{p}\left(\frac{-M}{p}\right)\right\}. \tag{4}$$

Proof. See Mathew's Theory of Numbers, p. 166.

Lemma 5. *If* $\mu^2(m) = 1$,

$$F'(m) = B \sqrt{m} \log m. \tag{5}$$

Proof. Follows from (2) and (3) since (s/m) is a primitive character $(\mathrm{mod}\, m)$.

Lemma 6.

$$p_r > \tfrac{1}{2} \log N \qquad (N > N_0). \tag{6}$$

Proof.

$$N = 2.3.5 \dots p_r$$

whence (Prime Number Theorem)

$$p_r \sim \log N.$$

Lemma 7. For $k \leqq N$,

$$\prod_{\substack{p|k \\ (p,N)=1}} \left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots\right) = B. \tag{7}$$

Proof. Now $(p,N)=1$ implies $p > p_r$; hence $k(\leqq N)$ cannot have more than $\frac{2\log N}{\log\log N}$ prime factors greater than p_r for $N > N_0$ since by (6),

$$p_r^{\frac{2\log N}{\log\log N}} > e^{\log\left(\frac{1}{2}\log N\right)\cdot\frac{2\log N}{\log\log N}} > N \,(N > N_0).$$

Hence the left side of (7) is

$$\begin{aligned} B\prod_{\substack{p|k \\ p>p_r}}\left(1+\frac{1}{p}\right) &= B\left(1+\frac{1}{p_r}\right)^{\frac{2\log N}{\log\log N}} \\ &= B\,e^{\log\left(1+\frac{2}{\log N}\right)\cdot\frac{2\log N}{\log\log N}} \\ &= B. \end{aligned}$$

Lemma 8.

$$r_4(n) = 8\{\sigma(n) - 4\sigma(n/4)\}. \tag{8}$$

Proof. See Jacobi, Werke I, 423—424.

Lemma 9.

$$\text{If} \quad p^2 \mid (N-x^2) \quad \text{then} \quad p > p_r. \tag{9}$$

Proof. Obvious.

Lemma 10.

$$\frac{\sigma(N)}{N} \sim \frac{6}{\pi^2}\,e^C \log\log N \tag{10}$$

where C is Euler's constant.

Proof.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(N)}{N} &= \left(1+\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_r}\right) \\ &= \frac{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)} \\ &\sim \frac{6}{\pi^2}\,e^C \log p_r \\ &\sim \frac{6}{\pi^2}\,e^C \log\log N \end{aligned}$$

since (Landau, Primzahlen, 140),

$$\prod_{p\leqq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\log x}.$$

Lemma 11.

$$\sum_{x<\sqrt{N}} \{1-\mu^2(N-x^2)\} = \frac{B\sqrt{N}}{\log N} \tag{11}$$

Proof. The congruence $N-x^2 \equiv 0 \pmod{p_s^2}$ has at most 2 incongruent solutions $\pmod{p_s^2}$ if $s > r$, none if $s \leqq r$ (9). Hence the number of solutions of the congruence $N-x^2 \equiv 0 \pmod{p_s^2}$ is 0 if $s \leqq r$ and at most $2\left(\frac{\sqrt{N}}{p_s^2}+1\right)$ for $s > r$.

It follows that [3])

$$\begin{aligned}\sum_{x<\sqrt{N}} \{1-\mu^2(N-x^2)\} &= B \sum_{\substack{s>r \\ p_s<\sqrt{N}}} \left(\frac{\sqrt{N}}{p_s^2}+1\right) \\ &= \frac{B\sqrt{N}}{p_r \log p_r} + B \sum_{p_s<\sqrt{N}} 1 \\ &= \frac{B\sqrt{N}}{\log N \log\log N} + \frac{B\sqrt{N}}{\log N} = \frac{B\sqrt{N}}{\log N},\end{aligned}$$

since $p_r \sim \log N$.

§ 3.

Proofs of (A) and (B):

We have

$$r_4(N) \sim \frac{48}{\pi^2} e^C N \log\log N \tag{12}$$ (8, 10).

Now in $N = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ two of the squares must be even and two odd. Hence

$$\sum_{x \equiv 1 \pmod 2} r_3(N-x^2) = \Omega(N \log\log N) \tag{13}$$ (12).

Now for $x \equiv 1 \pmod 2$,

$$r_3(N-x^2) = BF(N-x^2) = B \sum_{\delta^2 | (N-x^2)} F'\left(\frac{N-x^2}{\delta^2}\right) \tag{14}$$ (1).

Let $\frac{N-x^2}{\delta^2} = MS^2$ where $\mu^2(M) = 1$ and from (9), $(S, N) = 1$, $S \leqq N$.

---

[3]) I am indebted to Mr. Heilbronn for a correction in my original proof.

Hence

$$F'\left(\frac{N-x^2}{\delta^2}\right) = BSF'(M) \prod_{\substack{p|S \\ (p,\,N)=1}} \left(1+\frac{1}{p}\right) \tag{4}$$

$$= BS\sqrt{M}\log M \tag{5, 7}$$

$$= B\sqrt{MS^2}\log(MS^2)$$

$$= B\frac{\sqrt{N}}{\delta}\log N, \tag{15}$$

$$r_3(N-x^2) = B\sqrt{N}\log N \sum_{\delta^2|(N-x^2)} 1/\delta \tag{14, 15}$$

$$= B\sqrt{N}\log N \sum_{\substack{\delta^2|(N-x^2) \\ (N,\,\delta)=1}} 1/\delta \tag{9}$$

$$= B\sqrt{N}\log N \prod_{\substack{p|(N-x^2) \\ (p,\,N)=1}} \left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots\right)$$

$$= B\sqrt{N}\log N \tag{16, 7}$$

Hence

$$\sum_{\substack{x<\sqrt{N} \\ x\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\,2)}} \{1-\mu^2(N-x^2)\}\, r_3(N-x^2) = BN \tag{17, 11, 16}$$

$$\sum_{\substack{x<\sqrt{N} \\ x\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\,2)}} \mu^2(N-x^2)\, r_3(N-x^2) = \Omega(N\log\log N) \tag{18, 13, 17}$$

From (18) and (1) it follows that

$$r_3(m) = \Omega(\sqrt{m}\log\log m) \quad [m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4),\ \mu^2(m)=1], \tag{19}$$

$$F(m) = \Omega(\sqrt{m}\log\log m) \quad [m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4),\ \mu^2(m)=1]. \tag{20}$$

Since $F(m) = F'(m)$ for $\mu^2(m)=1$ and

$$F'(m) = \frac{2\sqrt{m}}{\pi} \sum_{(n,\,2m)=1} \frac{1}{n}\left(\frac{-m}{n}\right)$$

we obtain from (20),

$$\sum_{(n,\,2m)=1} \frac{1}{n}\left(\frac{-m}{n}\right) = \Omega_R(\log\log m) \tag{21}$$

where $m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)$ and $\mu^2(m)=1$. Since $\left(\frac{-m}{n}\right)$ is a real primitive character $(\mathrm{mod}\,4m)$, (A) is an immediate consequence of (21).

(B) follows from (2) and (20).

I am greatly indebted to Mr. Davenport, Mr. Heilbronn and Dr. Walfisz for a critical examination of my manuscript.

Benares, 11th jany. 1933.

(Eingegangen am 12. April 1933.)

The vector-regions of convex closed bodies *).

By

P. Ganapathi, Annamalainagar.

The vector region W of a convex closed body K in Euclidean space of n dimensions may be defined as follows: a point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ belongs to W if there are two points $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ and $(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ in K such that $x_i = x_i' - x_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

It is easily seen that the origin is the centre of symmetry of W.

If $V(W)$ and $V(K)$ be the 'volumes' of W and K, respectively, we shall determine upper and lower limits to the ratio of $V(W)$ to $V(K)$.

Now by the Minkowski inequality [1]) for the mixed volumes, if the 'volume' of a linear combination of two convex bodies of 'volumes' V_0 and V_n be expressed in the form

$$V(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} \mu^i V_i,$$

then

$$V_{n-1}^n \geqq V_0 V_n^{n-1} \tag{1}$$

where the equality holds only when the two given bodies are homothetic.

We shall apply this inequality to the convex regions K and W. Here $V_{n-1} = V(K, W, W, \ldots, W)$.

If p_K, p_K' be the perpendiculars from the origin, to two parallel Stütz-E_{n-1} of K, where E_{n-1} represents a linear Euclidean space of $n-1$ dimensions, p_W the perpendicular to the corresponding parallel Stütz-E_{n-1} of W, $p_W = p_K + p_K'$, and if dS_W $(= dS_W')$ be the element of the 'surface' at the corresponding opposite points of W, we have

$$\begin{aligned} V_{n-1} = V(K, W, W, \ldots, W) &= \frac{1}{n} \int_W p_K \, dS_W = \frac{1}{n} \int_W p_K' \, dS_W' \\ &= \frac{1}{2n} \int_W (p_K + p_K') \, dS_W = \frac{1}{2n} \int_W p_W \, dS_W = \frac{1}{2} V_n. \end{aligned} \tag{2}$$

---

*) This investigation was conducted by me as a research student of the Annamalai University, and is published with the permission of the University Authorities.

[1]) Bonnesen, Beweis einer Minkowskischen Ungleichung, Math. Tidskr. B. H. 1 (1931).

Hence, from (1),

$$V_n \geqq 2^n V_0 \text{ or } V(W) \geqq 2^n V(K).$$

The equality holds when and only when K and W are homothetic, and hence since W has a centre, *only when K has a centre.*

The special cases (for $n = 2$ and $n = 3$) of this result have been proved independently by Rademacher[2]) and Estermann[3]).

The corresponding inequality giving the upper limit of the ratio of $V(W)$ to $V(K)$ can be found by exactly the same method as that of Estermann, and we obtain the result,

$$V(W) \leqq 2V(K)\left\{1 + {}_nC_1 \cdot n + {}_nC_2 \cdot n^2 + \ldots + {}_nC_{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n-1}{2}}\right\}$$

when n is odd,

and

$$V(W) \leqq 2V(K)\left\{1 + {}_nC_1 \cdot n + \ldots + {}_nC_{\frac{n-2}{2}} n^{\frac{n-2}{2}}\right\}$$

$$+ V(K) \cdot {}_nC_{\frac{n}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \text{ when } n \text{ is even.}$$

The equality holds when and only when K is a simplex through $n+1$ points.

---

[2]) Rademacher, Über den Vektorenbereich eines konvexen ebenen Bereiches. Jahresber. d. D. Math. Ver. 34 (1925).

[3]) Estermann, Über den Vektorenbereich eines konvexen Körpers. Math. Zeitschr. 28 (1928).

(Eingegangen am 5. Mai 1933.)

A note on the oval*).

By

P. Ganapathi, Annamalainagar.

§ 1.

An oval has always an odd number of squares circumscribed to it.

Let $\mu(\varphi)$ represent the distance between two parallel tangents of the oval which make an angle φ with any fixed line in the plane. We shall assume that $\mu(\varphi)$ is a continuous function of φ. For convenience we shall denote points on the oval by the angle that the tangent makes with the fixed line.

If the oval has, say, two squares circumscribed to it, there are 8 points on the oval at which $\mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$. Let the points of contact of one square be $\alpha + \frac{i\pi}{2}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ and the other $\beta + k\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ where we can take β lying between α and $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Since $\mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ is continuous and has the same value $(= 0)$ at each of the 8 points, it must have maxima or minima on each of the 8 arcs into which these points divide the oval, and the maxima and minima must alternate. If $\mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ is a max. at a point α' between α and β, it is a minimum at a point β' between β and $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Hence we have maxima of $\mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ at α', $\alpha' + \pi$, $\beta' + \frac{\pi}{2}$ and $\beta' + \frac{3\pi}{2}$; minima at β', $\beta' + \pi$, $\alpha' + \frac{\pi}{2}$ and $\alpha' + \frac{3\pi}{2}$. This leads to the absurdity of having two consecutive minima and two consecutive maxima. Hence the oval cannot have just two squares circumscribed to it.

This argument is general and can be applied to show that no oval can have an even number of squares circumscribed to it.

---

*) This investigation was conducted by me as a research student of the Annamalai University and is published with the permission of the University Authorities.

§ 2.

The medial locus of an oval has an odd number of cusps.

By analogous considerations of the variations of the function $\varrho(\varphi) - \varrho(\varphi + \pi)$ we find that there must be always an odd number of pairs of opposite points at which $\varrho(\varphi) = \varrho(\varphi + \pi)$. Hence the medial locus[1]) has an odd number of cusps, the radius of curvature of the medial being $\frac{1}{2}\{\varrho(\varphi) - \varrho(\varphi + \pi)\}$.

[1]) The medial is the locus of the midpoints of diameters of the oval. Vide in this connection, Journal of the Annamalai University Vol. 1, pp. 67—71.

(Eingegangen am 5. Mai 1933.)

Über das Warteproblem.

Von

Felix Pollaczek in Paris.

Einleitung.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen über die Vorgänge vor einer Gruppe von „Schaltern", an der regellos Personen zur Abfertigung erscheinen, ein Problem, das besonders für die Fernsprechtechnik von Bedeutung ist, sind häufig in der technischen Literatur angestellt worden, wobei man meist näherungsweise mit kombinatorischen Betrachtungen, unter Heranziehung der Bernoullischen oder der Poissonschen Formel, auszukommen suchte. Die exakte Behandlung derartiger Aufgaben führt jedoch schon in den einfachsten Fällen auf schwer anzugreifende Probleme, insbesondere dann, wenn man ein *Warten* vor derartigen Schaltern zuläßt.

In einer früheren Arbeit[1]) über die Statistik des Wartens vor einer Gruppe von s Schaltern war nun folgende Vorschrift zugrunde gelegt worden:

(V*) ... *An dem a-ten Schalter ($a = 1, \ldots, s$) der Gruppe möge immer die a-te, $(a+s)$-te, $(a+2s)$-te, ... eintreffende Person, und zwar in der angeführten Reihenfolge, abgefertigt werden*

und mittels verschiedener analytischer Kunstgriffe wurden dort alle die Wartevorgänge gemäß V* betreffenden Wahrscheinlichkeiten in Form zweifacher bzw. dreifacher komplexer Integrale mit explizit angegebenen Integranden dargestellt und für große Werte eines ganzzahligen, dem Problem zugehörigen Parameters n (der Personenzahl) asymptotisch entwickelt.

Obwohl nun die Vorschrift V* in den Anwendungen häufig erfüllt ist, erwies es sich als erforderlich, im nachstehenden die Statistik des Wartens auch gemäß der „gerechten" Vorschrift:

(V) ... *An der Schaltergruppe sind alle Personen in der Reihenfolge ihres Eintreffens abzufertigen*

zu untersuchen. Beide Vorschriften stimmen nur im Falle $s = 1$ und im Falle einer für alle Personen gleichen Abfertigungszeit überein; im allgemeinen aber ist es unter V* offensichtlich möglich, daß Personen außerhalb der Reihenfolge ihres Eintreffens vor der Gruppe abgefertigt werden.

[1]) Über die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie, I. und II. Teil, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 64–100 und S. 729–750 (hier zitiert als WI und WII).

So wie in WI, II handelt es sich auch hier im wesentlichen darum, vielfache, über gewisse abteilungsweise stetige Funktionen zu erstreckende, bestimmte Integrale wirklich zu berechnen. Diese Aufgabe zerfällt im vorliegenden Falle in zwei Teile.

Erstens die formale Ausführung der erwähnten Integrationen, die wir mit Hilfe einer Darstellung der Integrandenfunktionen durch verallgemeinerte n-fache Fourierintegrale, unter Heranziehung der Entwicklungen und der Methode einer anderen Arbeit [2]) ermöglichen. Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten erhält man wieder, ähnlich wie in W I, II, dreifache Integrale im Komplexen; doch sind die Integranden nur implizit gegeben, als gewisse Lösungen zweier Systeme von je s simultanen (singulären) linearen Integralgleichungen im Komplexen.

Zweitens hat man diese Integralgleichungen, auf deren Lösung unsere Aufgabe also hinauskommt, zu untersuchen. Wir zeigen hierzu, daß die uns interessierenden Lösungen in „geschlossener Form" dargestellt werden können, wenn man naheliegende vereinfachende Annahmen über eine gewisse in unser Problem eingehende, monoton von 0 bis 1 ansteigende, im übrigen willkürliche Funktion $f(t)$ zuläßt und geben für die beiden speziellen hier behandelten Klassen (65a) und (87) von Funktionen $f(t)$ die Endformeln an. Wie in den früheren Arbeiten handelt es sich schließlich noch darum, die für unsere Wahrscheinlichkeiten gewonnenen Integralformeln für $n \to \infty$ (n der erwähnte ganzzahlige Parameter) asymptotisch zu entwickeln, was bei den im II. Teile über $f(t)$ gemachten Voraussetzungen keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bereitet.

I. Formaler Teil.

§ 1.

Problemstellung; analytische Hilfsmittel.

Vor einer Gruppe von s ($\geqq 1$) einander unterstützenden „Schaltern" mögen immer wieder innerhalb eines Zeitintervalls von der Länge T n Personen regellos eintreffen und in der Reihenfolge ihres Eintreffens, nach eventuellem Warten, an irgendeinem gerade frei gewordenen Schalter abgefertigt werden. Als Abfertigungszeiten mögen alle Zahlen eines Intervalls $t' \leqq t \leqq t''$, jede mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit $df(t)$, auftreten. — Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit $\varrho(t)$ dafür, daß die Wartezeit irgendeiner der Personen $\leqq t$ sei, sowie nach dem Verhalten von $\varrho(t)$ für $n \to \infty$.

---

[2]) Lösung eines geometrischen Wahrscheinlichkeitsproblems, Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 230—278.

Hier ist also eine „Verteilungsfunktion“ $f(t)$ mit der Bedeutung: Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Abfertigungszeit irgendeiner Person $\leqq t$ ist, vorgegeben; $f(t)$ nimmt demgemäß monoton zu (im schwächeren Sinn) und unterliegt sonst zunächst nur den Bedingungen (alle Integrationen im Stieltjesschen Sinne verstanden und $\int_{t'}^{t''}$ statt $\int_{t'-0}^{t''+0}$ geschrieben)

$$f(t'-0) = 0, \quad f(t''+0) = 1 \tag{1}$$

und daher

$$\int_{t'}^{t''} df(t) = 1. \tag{1a}$$

Im Falle $t = \infty$ setzen wir außerdem die Endlichkeit von $\int_{t'}^{t''} t\, df(t)$ voraus. und normieren in jedem Falle zur Vereinfachung unserer Formeln unsere Zeiteinheit derart, daß gilt:

$$\int_{t'}^{t''} t\, df(t) = 1. \tag{1b}$$

In jedem Einzelfalle seien die Ankunftszeiten der n Personen vor der Schaltergruppe mit $x_1, \ldots, x_n$ $(0 \leqq x_\nu \leqq T;\ \nu = 1, \ldots, n)$ und die für sie erforderlichen Abfertigungszeiten mit $t_1, \ldots, t_n$ $(t' \leqq t_\nu \leqq t'')$ bezeichnet; durch diese Größen sind gemäß unserer Problemstellung die Vorgänge vor der Schaltergruppe im Einzelfalle eindeutig bestimmt, so daß z. B. die Wartezeiten $\tau_1, \ldots, \tau_n$ der n Personen in Funktion der x_ν und t_ν ausgedrückt werden können. — Um weiter den wahrscheinlichsten oder Erwartungswert der Wartezeit τ_m zu bestimmen, hat man, gemäß der bekannten Definition dieses Wertes, τ_m über alle x_ν und t_ν zu mitteln. Numeriert man zuvor noch in jedem Einzelfall die n Personen der Reihenfolge ihres Eintreffens nach um, so gilt

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq T, \tag{2}$$

so daß man sich bei der Mittelwertbildung über die x_ν auf den Bereich (2), also auf ein Simplex des n-dimensionalen Raumes, vom Volumen $\frac{T^n}{n!}$, zu beschränken hat. Um z. B. den wahrscheinlichsten Wert von τ_m [welcher bei der Anordnung (2) offenbar nur von $x_1, \ldots, x_m;\ t_1, \ldots, t_{m-1}$ abhängt] zu finden, hat man daher $\tau_m(x_1, \ldots, x_m;\ t_1, \ldots, t_{m-1})$ über das Simplex (2) sowie über alle t_ν, unter Berücksichtigung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $df(t_\nu)$, zu mitteln.

Mit der Bezeichnung

$$\bar{f} = \frac{n!}{T^n} \int_{t'}^{t''} df(t_1) \ldots \int_{t'}^{t''} df(t_{n-1}) \int_0^T dx_1 \int_{x_1}^T dx_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^T f(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_{n-1})\, dx_n \tag{3}$$

ist dann $\bar{\tau}_m$ die wahrscheinlichste Wartezeit der m-ten eintreffenden Person und $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\bar{\tau}_m$ der Erwartungswert für die Wartezeit irgendeiner Person.

Um das Folgende übersichtlich auszudrücken, sei für reelles $a \neq 0$ mit $\mathbf{s}(a)$ („signum") die Funktion

$$\mathbf{s}(a)\begin{cases} = 1, & a > 0 \\ = 0, & a < 0 \end{cases} \tag{4a}$$

bezeichnet, und für den Augenblick sei gesetzt

$$(a)\begin{cases} = a, & a > 0 \\ = 0, & a < 0\,; \end{cases} \tag{4b}$$

auf eine Erklärung dieser Zeichen für $a = 0$ soll verzichtet werden.

Da nun der von den Variablen $t;\ x_1, \ldots, x_m;\ t_1, \ldots, t_{m-1}$ abhängige Ausdruck $\mathbf{s}(t - \tau_m) = 1$ bzw. $= 0$ ist, je nachdem die Wartezeit der m-ten Person $\leqq t$ wird, gibt

$$\bar{\mathbf{s}}(t - \tau_m) \tag{5}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wartezeit der m-ten Person $\leqq t$ ist, und

$$\varrho(t) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\bar{\mathbf{s}}(t - \tau_m) \tag{6}$$

ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wartezeit *irgendeiner* Person $\leqq t$ ist. Um (6) bilden zu können, hat man zuvor die τ_m in Funktion der x_ν und t_ν auszudrücken. Da die Schaltergruppe zunächst unbesetzt ist, haben die ersten s Personen nicht zu warten, also:

$$\tau_m = 0, \quad 1 \leqq m \leqq s. \tag{7a}$$

Für $m > s$ schließen wir so: die ersten $m - 1$, zur bzw. Zeit $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ eingetroffenen Personen verlassen die Schalter zur bzw. Zeit $x_i + \tau_i + t_i$; nach Ablauf der $s-$tgrößten dieser Zeiten sind daher nur $s - 1$ vor der m-ten erschienene Personen in Abfertigung begriffen, so daß jetzt unserer Vorschrift gemäß die m-te Person an die Reihe kommt, falls sie schon eingetroffen ist, d. h. falls $x_m < \mathrm{Max}^{(s)}(x_i + \tau_i + t_i;\ 1 \leqq i \leqq m-1)$ ist [Bezeichnung: $\mathrm{Max}^{(s)}(a_1, \ldots, a_\nu)$ bzw. $\mathrm{Min}^{(s)}(a_1, \ldots, a_\nu)$ bedeutet die $s-$tgrößte bzw. die $s-$tkleinste von $\nu \geqq s$ reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_\nu$]; im gegenteiligen Falle ist $\tau_m = 0$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \tau_m &= (\mathrm{Max}^{(s)}(x_i + \tau_i + t_i;\ 1 \leqq i \leqq m-1) - x_m) \\ &= (\mathrm{Max}^{(s)}(x_i + \tau_i + t_i - x_m;\ 1 \leqq i \leqq m-1)), \quad s < m \leqq n. \end{aligned} \tag{7b}$$

Hieraus folgt, da $t \gtrless 0$ vorausgesetzt wird,

$$\mathbf{s}(t-\tau_m) = \mathbf{s}\left(t - (\mathrm{Max}^{(s)}(\ldots))\right)$$
$$= \mathbf{s}\left(t - \mathrm{Max}^{(s)}(x_i + \tau_i + t_i - x_m;\ 1 \leqq i \leqq m-1)\right),$$
$$(8) \qquad \mathbf{s}(t-\tau_m) = \mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(t + x_m - x_i - \tau_i - t_i;\ 1 \leqq i \leqq m-1),$$
$$s < m \leqq n.$$

Unsere Aufgabe kommt nun im wesentlichen darauf hinaus, den Mittelwert (3) des letzten Ausdrucks zu bilden, und die weiteren Entwicklungen sollen als Beispiel dafür dienen, wie derartige bestimmte Integrale, auf die man bei Wahrscheinlichkeitsproblemen dieses Zweiges der Technik immer geführt wird, zu behandeln sind. Wir gelangen hierbei nach verhältnismäßig umständlichen Rechnungen zu einem sehr übersichtlichen Ergebnis, und es ist der hier behandelten Aufgabe zunächst nicht anzusehen, daß sie gelöst ist, wenn es gelingt, gewisse Systeme von linearen Integralgleichungen zu „lösen".

Wir beginnen damit, die Funktion $\mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(a_1, \ldots, a_n)$, das „signum" der s—tkleinsten von n reellen (zunächst nichtverschwindenden) Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, als vielfaches komplexes Integral nach Art des Dirichletschen Faktors zu schreiben. Es gilt

$$(9) \qquad \mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{S_{n,s}} \cdots \int \frac{e^{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p_\nu}}{p_1 \cdots p_n}\, d p_1 \ldots d p_n,$$

wobei für die n-dimensionale Integrationsmannigfaltigkeit des Integrals

$$S_{n,s} = \sum_{i=0}^{s-1} \widetilde{S}_n^{(i)},$$
$$(9\,a) \qquad \widetilde{S}_n^{(i)} = \sum_{1' \ldots i'} C_{1'}' \ldots C_{i'}' C_{(i+1)'} \ldots C_{n'},$$
$$\left(\widetilde{S}_n^{(i)} \equiv 0, \text{ für } i > n > 0;\ \widetilde{S}_0^{(0)} \triangleq 1\right)$$

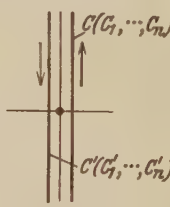


Fig. 1.

gilt; die letzte Summe geht über alle Kombinationen $1' \ldots i'$ zu i Elementen aus $1, \ldots, n$, und C_ν bzw. C_ν' sind die aus Fig. 1 nach Gestalt und Durchlaufungssinn ersichtlichen Kurven der p_ν-Ebene. $\widetilde{S}_n^{(i)}$ ist also eine Summe von $\binom{n}{i}$ Produkten aus je i Kurven C' und $n-i$ Kurven C. An Stelle von (9) (und analoger Formeln) soll jedoch im folgenden der Kürze halber immer geschrieben werden:

$$(9\,b) \qquad \mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(a_1, \ldots, a_n) = S_{n,s} \frac{e^{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p_\nu}}{p_1 \cdots p_n} = \sum_{i=0}^{s-1} \widetilde{S}_n^{(i)} \frac{e^{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu p_\nu}}{p_1 \cdots p_n}.$$

Die letzte Formel, die in der in Anm. 2 genannten Arbeit [l. c. Gl. (20)] hergeleitet wurde, kann unmittelbar verifiziert werden. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{ap}}{p}\,dp = \mathbf{s}(a), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{e^{ap}}{p}\,dp = \mathbf{s}(-a),$$

also

$$(9\,c)\quad \sum_{t=0}^{s-1} \mathfrak{S}_n^{(t)} \frac{e^{\sum_1^n a_\nu p_\nu}}{p_1 \cdots p_n} = \sum_{t=0}^{s-1} \sum_{1' \ldots t'} \mathbf{s}(-a_{1'}) \ldots \mathbf{s}(-a_{t'})\, \mathbf{s}(a_{(t+1)'}) \ldots \mathbf{s}(a_{n'}).$$

Sind nun mehr als $s-1$ Zahlen a_ν negativ (und daher auch die $s-t$-kleinste dieser Zahlen < 0), so verschwindet jedes Elementarprodukt in (9c); sind aber nur die $s' \leqq s-1$ Zahlen $a_1 \ldots a_{s'}$ negativ (also die $s-t$-kleinste der a_ν positiv), so ist in der letzten Doppelsumme nur der Summand $\mathbf{s}(-a_1) \ldots \mathbf{s}(-a_{s'})\, \mathbf{s}(a_{s'+1}) \ldots \mathbf{s}(a_n)$ gleich 1, während in allen übrigen Summanden mindestens ein Faktor verschwindet; daher ist (9c) wirklich gleich $\mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(a_1, \ldots, a_n)$ [das ist aber Gl. (9b)].

Wir führen hier noch die später benötigte Integraldarstellung

$$(9\,d)\quad \frac{1}{\xi} e^{-\xi\left(\mathrm{Max}^{(s)}(a_1, \ldots, a_n)\right)} = \sum_{t=0}^{s-1} \mathfrak{S}_n^{(t)} \frac{e^{-\sum_{\nu=1}^n a_\nu p_\nu}}{p_1 \cdots p_n \left(\xi - \sum_1^n p_i\right)}$$

$$\left(\Re(\xi) > \Re\left(\sum_1^n p_i\right),\ \Re(\xi) > 0\right)$$

an, in der ξ irgendeine komplexe Zahl mit positivem Realteil bedeutet; die Gleichung (9d) beweist man, indem man in die rechte Seite der Identität

$$\frac{1}{\xi} e^{-\xi\left(\mathrm{Max}^{(s)}(a_1, \ldots, a_n)\right)} = \int_0^\infty e^{-\xi t}\, \mathbf{s}\,\mathrm{Min}^{(s)}(t-a_1, \ldots, t-a_n)\,dt \quad (\Re(\xi) > 0)$$

den Ausdruck (9b) einführt und nach t ausintegriert.

Für $1 \leqq n \leqq s$ wird bei unserer Definition (9a) die rechte Seite von (9) gleich 1 und die rechte Seite von (9d) gleich $\frac{1}{\xi}$.

Aus (8) und (9b) folgt nun

$$\mathbf{s}(t-\tau_m) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \mathfrak{S}_{m-1}^{(\lambda)} \frac{e^{\sum_{i=1}^{m-1} p_i (t + x_m - x_i - \tau_i - t_i)}}{p_1 \cdots p_{m-1}}$$

und hierin setzen wir zur Vereinfachung der weiteren Rechnung:

$$(10)\quad e^{\sum_{i=1}^{m-1} p_i (t + x_m - x_i - \tau_i - t_i)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} \frac{e^{\sum_{i=1}^{m-1} p_i (x_m - x_i - \tau_i - t_i) + q t}}{q - \sum_{1}^{m-1} p_i} \, dq,$$

$$\Re(q) > \Re\left(\sum_{1}^{m-1} p_i\right), \quad t > 0,$$

unter C_q eine Parallele rechts von der imaginären Achse der q-Ebene verstanden, ein; die Identität (10) wird, wenn $t > 0$ vorausgesetzt wird, unmittelbar durch Parallelverschiebung von C_q nach links bestätigt und wir haben, um die Werte unserer Wahrscheinlichkeiten für $t = 0$ zu erhalten, von jetzt ab in den nur für $t > 0$ gültigen Integralformeln den Grenzübergang $t \to 0$ zu vollziehen. Man hat also

$$(11)\quad \mathbf{s}(t - \tau_m) = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_q} \mathfrak{S}_{m-1}^{(\lambda)} \frac{e^{\sum_{i=1}^{m-1} p_i (x_m - x_i - \tau_i - t_i) + q t}}{p_1 \cdots p_{m-1} \left(q - \sum_{1}^{m-1} p_i\right)} \, dq, \quad (t > 0)$$

d. h. man hat $\mathbf{s}(t - \tau_m)$ als „komplexes Fourierintegral" bezüglich der Variablen $x_m - x_i - \tau_i - t_i$ $(1 \leqq i \leqq m-1)$ und t geschrieben.

§ 2.

Die ersten reellen Integrationen.

Wir haben jetzt $\bar{\mathbf{s}}(t - \tau_m)$ [s. Gleichung (3)] zu bilden; da $\mathbf{s}(t - \tau_m)$ nur von den Variablen bis einschließlich x_m und t_{m-1} abhängt, ergeben die inneren Integrationen (3) nach $d x_{m+1} \ldots d x_n$ $\frac{(T - x_m)^{n-m}}{(n-m)!}$, und nach (1 b) ist

$$\int_{t'}^{t''} d f(t_m) \ldots \int_{t'}^{t''} d f(t_{n-1}) = 1,$$

so daß

$$(12)\quad \bar{\mathbf{s}}(t - \tau_m) = \frac{n!}{T^n} \int_{t'}^{t''} d f(t_1) \ldots \int_{t'}^{t''} d f(t_{m-1}) \int_{0}^{T} d x_1 \ldots$$

$$\ldots \int_{x_{m-1}}^{T} \mathbf{s}(t - \tau_m) \frac{(T - x_m)^{n-m}}{(n-m)!} \, d x_m.$$

Hier setzen wir wieder formal

$$(13)\qquad \frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_p} \frac{e^{p(T-x_m)}}{p^{n-m+1}}\,dp,\quad T > x_m \quad (\Re(p) > \Re(q))$$

mit zur imaginären Achse parallelem, rechts von C_q liegendem C_p.

Für das innerste Integral in (12) folgt mit (11), (13)

$$(14)\qquad \int_{x_{m-1}}^{T} s(t-\tau_m)\,\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,dx_m$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{s-1} \int_{x_{m-1}}^{T} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p}\int_{C_q} \tilde{S}^{(\lambda)}_{m-1}\,\frac{e^{\sum_{i=1}^{m-1} p_i(x_m - x_i - \tau_i - t_i) + p(T-x_m) + qt}}{p^{n-m+1}\,p_1 \cdots p_{m-1}\left(q - \sum_1^{m-1} p_i\right)}\,dp\,dq\,dx_m,$$

$$s < m \leqq n$$

und hierin kann nun — dies bezweckten die vorangehenden Umformungen — $\int_{x_{m-1}}^{T} \ldots dx_m$ nach Vertauschung mit den übrigen Integrationszeichen formal ausgeführt werden:

$$\int_{x_{m-1}}^{T} e^{\sum_1^{m-1} p_i(x_m - x_i - \tau_i - t_i) + p(T-x_m)}\,dx_m$$

$$= -\left[\frac{e^{\sum_1^{m-1} p_i(x_m - x_i - \tau_i - t_i) + p(T-x_m)}}{p - \sum_1^{m-1} p_i}\right]_{x_{m-1}}^{T}$$

$$= \frac{e^{\sum_1^{m-1} p_i(x_{m-1} - x_i - \tau_i - t_i) + p(T-x_{m-1})}}{p - \sum_1^{m-1} p_i} - \frac{e^{\sum_1^{m-1} p_i(T - x_i - \tau_i - t_i)}}{p - \sum_1^{m-1} p_i}.$$

Beim Einsetzen in (14) darf der Subtrahend des letzten Ausdrucks fortgelassen werden, da ja das zugehörige $\int_{C_p} \ldots \frac{dp}{p^{n-m+1}}$ verschwindet (Verschiebung von C_p nach rechts!) und man erhält

$$(15)\qquad \int_{x_{m-1}}^{T} \mathfrak{s}(t-\tau_m)\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}dx_m$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_q}\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-1}\frac{e^{\sum_1^{m-1}p_i(x_{m-1}-x_i-\tau_i-t_i)+p(T-x_{m-1})+qt}}{p^{n-m+1}p_1\cdots p_{m-1}\left(p-\sum_1^{m-1}p_i\right)\left(q-\sum_1^{m-1}p_i\right)}dpdq,$$

$$\left(\Re\left(p-\sum_1^{m-1}p_i\right)>0,\ \Re\left(q-\sum_1^{m-1}p_i\right)>0\right).$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(16)\qquad P_k=\frac{e^{\sum_1^{k}p_i(x_{k+1}-x_i-\tau_i-t_i)+p(T-x_{k+1})+qt}}{p^{n-m+1}p_1\cdots p_k},\qquad k=0,1,\ldots,m-1,$$

so lauten die Formeln (11), (13) und (15)

$$(17a)\ \mathfrak{s}(t-\tau_m)\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_q}\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-1}P_{m-1}\frac{1}{q-\sum_1^{m-1}p_i}dpdq,$$

$$(17b)\qquad \int_{x_{m-1}}^{T}\mathfrak{s}(t-\tau_m)\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}dx_m$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_q}\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-1}P_{m-2}\frac{e^{-p_{m-1}\tau_{m-1}-p_{m-1}t_{m-1}}}{p_{m-1}\left(p-\sum_1^{m-1}p_i\right)\left(q-\sum_1^{m-1}p_i\right)}dpdq.$$

Wir wollen (17b), analog (17a), als Fourierintegral bezüglich der Variablen $x_{m-1}-x_i-\tau_i-t_i\ (1\leqq i\leqq m-2)$ und t schreiben und nehmen zu diesem Zwecke einige Umformungen vor. Zunächst folgt aus (17a) mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{p-\sum_1^{m-1}p_i}\cdot\frac{1}{q-\sum_1^{m-1}p_i}=\frac{1}{p-q}\left(\frac{1}{q-\sum_1^{m-1}p_i}-\frac{1}{p-\sum_1^{m-1}p_i}\right):$$

$$(18)\qquad \int_{x_{m-1}}^{T}\mathfrak{s}(t-\tau_m)\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}dx_m$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_q}\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-1}P_{m-2}\frac{e^{-p_{m-1}\tau_{m-1}-p_{m-1}t_{m-1}}}{p_{m-1}}\cdot\frac{dpdq}{(p-q)\left(q-\sum_1^{m-1}p_i\right)},$$

da $\int_{C_q} \dots e^{qt}\,dq$ über den Anteil von $\dfrac{1}{p-\sum_1^{m-1} p_i}$ verschwindet. Für die hier auftretenden Integrationsmannigfaltigkeiten $\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-1}$ folgt aus (9a) in leicht verständlicher Symbolik (durch Verschiebung von C'_{m-1} über den Punkt $p_{m-1}=0$ nach rechts in die neue Lage $-C_{m-1}$)

$$(19)\quad \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-1} = \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-2}\,C_{m-1} + \widetilde{S}^{(\lambda-1)}_{m-2}\,C'_{m-1}$$
$$= (\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-2} - \widetilde{S}^{(\lambda-1)}_{m-2})\,C_{m-1} + \widetilde{S}^{(\lambda-1)}_{m-2}\,(p_{m-1}=0),\ \lambda \geqq 0,\ (\widetilde{S}^{(-1)}_{m-2} \equiv 0),$$

wobei sich $\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-2}$, $\widetilde{S}^{(\lambda-1)}_{m-2}$ auf die Indizes $1, \dots, m-2$ beziehen.

Mit (19) wird aus (18)

$$(18a)\quad \int_{x_{m-1}}^{T} \mathfrak{s}(t-\tau_m)\,\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,dx_m$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{s-2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_p}\int_{C_q} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{1}{(p-q)\left(q-\sum_1^{m-2} p_i\right)}\,dp\,dq$$
$$+ \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p}\int_{C_q}\int_{C_{m-1}} \widetilde{S}^{(s-1)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{e^{-p_{m-1}\tau_{m-1}-p_{m-1}t_{m-1}}}{p_{m-1}(p-q)\left(q-\sum_1^{m-1} p_i\right)}\,dp\,dq\,dp_{m-1}.$$

Übt man hierauf gemäß (12) die Operation $\int_{t'}^{t''} \dots df(t_{m-1})$ aus, und führt eine, i. a. nur für $\Re(z) < 0$ reguläre analytische Funktion $\varepsilon(z)$

$$(20a)\quad \varepsilon(z) = \int_{t'}^{t''} e^{zt}\,df(t)\quad \text{(hieraus nach (1a, 1b): } \varepsilon(0)=1,\ \varepsilon'(0)=1)$$

und einen Operator φ_z

$$(20b)\quad \varphi_z F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varepsilon(-z)F(z)\,dz;\quad \varphi_{p_{m-1}} \equiv \varphi_{m-1}$$

ein, so folgt aus (18a)

$$(21)\quad \int_{t'}^{t''} df(t_{m-1}) \int_{x_{m-1}}^{T} \mathfrak{s}(t-x_m)\,\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,dx_m$$
$$\doteq \sum_{\lambda=0}^{s-2} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{1}{(p-q)\left(q-\sum_1^{m-2} p_i\right)}$$
$$+ \varphi_{m-1}\,\widetilde{S}^{(s-1)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{e^{-p_{m-1}\tau_{m-1}}}{p_{m-1}(p-q)\left(q-\sum_1^{m-1} p_i\right)};$$

hierin, wie in den folgenden Formeln wurde auch das Zeichen

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_q}\ldots dp\,dq$$

fortgelassen und zur Erinnerung daran „$\doteq$“ anstatt „$=$“ geschrieben.

Der erste Summand rechts in (21) ist bereits eine Summe von Fourierintegralen in unserem Sinne; um auch den zweiten Summanden in die gleiche Form überzuführen, stellen wir zunächst den Integrandenfaktor $\frac{e^{-p_{m-1}\tau_{m-1}}}{p_{m-1}}$ $(\Re(p_{m-1})>0)$ selbst [siehe auch Gleichung (7b)] als Fourierintegral bezüglich der Variablen $x_{m-1}-x_i-\tau_i-t_i\,(1\leqq i\leqq m-2)$ dar; die Darstellung folgt aus (7b), (9d) unter Beibehaltung der dort eingeführten abgekürzten Schreibweise zu

$$\frac{e^{-p_{m-1}\tau_{m-1}}}{p_{m-1}}=\sum_{\mu=0}^{s-1}\tilde{T}^{(\mu)}_{m-2}\,\frac{e^{\sum_1^{m-2}q_i(x_{m-1}-x_i-\tau_i-t_i)}}{q_1\cdots q_{m-2}\left(p_{m-1}-\sum_1^{m-2}q_i\right)} \tag{22}$$

$$\left(\Re(p_{m-1})>\Re\left(\sum_1^{m-2}q_i\right)\right)$$

mit

$$\tilde{T}^{(\mu)}_{m-2}=\sum_{1'\ldots\mu'}D'_{1'}\ldots D'_{\mu'}D_{(\mu+1)'}\ldots D_{(m-2)'},$$

wobei die D_ν bzw. D'_ν, gleich den Kurven C_ν und C'_ν, Parallele rechts bzw. links von der imaginären Achse der q_ν-Ebene sind.

Wird nun (22) in den zweiten Summanden rechts in (21) eingesetzt, so ergibt sich mit der Zerlegung

$$\frac{1}{q-\sum_1^{m-1}p_i}\,\frac{1}{p_{m-1}-\sum_1^{m-2}q_i}=\frac{1}{q-\sum_1^{m-2}(p_i+q_i)}\left(\frac{1}{q-\sum_1^{m-1}p_i}+\frac{1}{p_{m-1}-\sum_1^{m-2}q_i}\right)$$

und mit (16)

$$\varphi_{m-1}\,\tilde{S}^{(s-1)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{e^{-p_{m-1}\tau_{m-1}}}{p_{m-1}(p-q)\left(q-\sum_1^{m-1}p_i\right)} \tag{23}$$

$$\doteq\varphi_{m-1}\sum_{\mu=0}^{s-1}\tilde{S}^{(s-1)}_{m-2}\,\tilde{T}^{(\mu)}_{m-2}\,\frac{e^{\sum_1^{m-2}(p_i+q_i)(x_{m-1}-x_i-\tau_i-t_i)+p(T-x_{m-1})+qt}}{\prod_1^{m-2}(p_iq_i)\cdot p^{n-m+1}(p-q)}$$

$$\frac{1}{q-\sum_1^{m-2}(p_i+q_i)}\left(\frac{1}{q-\sum_1^{m-1}p_i}+\frac{1}{p_{m-1}-\sum_1^{m-2}q_i}\right)$$

und hierin darf noch der Bruch $\dfrac{1}{p_{m-1}-\sum_1^{m-2} q_i}$ gestrichen werden, da sein Anteil durch die Operation

$$\varphi_{m-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{m-1}} \varepsilon(-p_{m-1})\ldots dp_{m-1}$$

annulliert wird. Ersetzt man nunmehr in den $\binom{m-2}{s-1}\binom{m-2}{\mu}$ $(2m-4)$-fachen Integralen von $\widetilde{S}_{m-2}^{(s-1)}\widetilde{T}_{m-2}^{(\mu)}$ die q_i durch neue Integrationsvariable mittels $p_i+q_i=v_i$, so folgt für irgendein Teilintegral $\int\int\ldots dp_i dq_i$:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_i}\int_{D_i}\ldots dp_i dq_i = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int \frac{e^{v_i a_i}}{p_i(v_i-p_i)}\,\frac{1}{q-\sum_1^{m-2} v_i}\cdot\frac{1}{q-\sum_1^{m-1} p_k}\,dp_i\,dv_i$$

$$\left(\Re\left(q-\sum_1^{m-2} v_i\right)>0,\ \Re\left(q-\sum_1^{m-1} p_k\right)>0\right)$$

und man kann die Integration nach dp_i durch Linksverschiebung von $C_i(C_i')$ ausführen (mögliche Pole $p_i=0$ und $p_i=v_i$). Bezeichnet man für den Augenblick die zu C und C' analogen v-Kurven mit V und V', so führt die erste der drei im folgenden benötigten Kombinationen C_iD_i, $C_i'D_i$, $C_i'D_i'$ auf C_iV_i und daher ist

$$\text{(24a)}\qquad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_i}\int_{D_i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{V_i}\frac{e^{v_i a_i}}{v_i}\,\frac{1}{q-\sum_{k=1}^{m-2} v_k}\cdot\frac{1}{q-\sum_{k=1}^{m-1} p_k+p_i}\,dv_i;$$

weiter ergibt sich

$$\text{(24b)}\qquad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_i'}\int_{D_i} = 0;$$

$$\text{(24c)}\qquad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_i'}\int_{D_i'} = \frac{1}{2\pi i}\int_{V_i'}\frac{e^{v_i a_i}}{v_i}\,\frac{1}{q-\sum_{k=1}^{m-2} v_k}\cdot\frac{1}{q-\sum_{k=1}^{m-1} p_k+p_i-v_i}\,dv_i.$$

Aus (24b) folgt, daß für $\mu<s-1$ alle Summanden von $\widetilde{S}_{m-2}^{(s-1)}\widetilde{T}_{m-2}^{(\mu)}$ verschwinden, und daß auch in $\widetilde{S}_{m-2}^{(s-1)}\widetilde{T}_{m-2}^{(s-1)}$ nur diejenigen $\binom{m-2}{s-1}$ Summanden übrigbleiben, in denen die Indexkombination der Kurven D_i' die gleiche ist wie die der C_i'. Durch wiederholte Anwendung von (24a, c) auf diese letzteren Summanden erhält man aus (23), wenn wieder p_i, C_i statt v_i, V_i geschrieben wird,

$$(25)\qquad \varphi_{m-1}\,\widetilde{S}^{(s-1)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{e^{-p_{m-1}\tau_{m-1}}}{p_{m-1}(p-q)\Big(q-\sum_1^{m-1}p_i\Big)}$$

$$\doteq \varphi_{m-1}\sum_{1'\ldots(s-1)'}\frac{1}{(2\pi i)^{m-2}}\int_{C_{1'}'}\cdots\int_{C_{(s-1)'}'}\int_{C_{s'}}\cdots\int_{C_{(m-2)'}}$$

$$\frac{e^{\sum_1^{m-2}p_i(x_{m-1}-x_i-\tau_i-t_i)+p(T-x_{m-1})+qt}}{p^{n-m+1}(p-q)\Big(q-\sum_1^{m-2}p_i\Big)}\cdot\frac{dp_1\ldots dp_{m-1}}{q-p_{m-1}-p_{1'}-\cdots-p_{(s-1)'}}.$$

Setzt man dies in (21) ein und führt hierbei, in Verallgemeinerung der Schreibweise in (9a, 9b), für in $p_1,\ldots,p_a$ symmetrisches $f(p_1,\ldots,p_a)$ die abkürzende Schreibweise

$$(26)\qquad \sum_{1'\ldots a'}\frac{1}{(2\pi i)^a}\int_{C_{1'}'}\cdots\int_{C_{a'}'}\int_{C_{(a+1)'}}\cdots\int_{C_{\mu'}}P_a f(p_{1'},\ldots,p_{a'})\,dp_1\ldots dp_a$$

$$=\widetilde{S}^{(a)}_{\mu}\,P_\mu f(p_{1'},\ldots,p_{a'}),\qquad 0\leqq a\leqq\mu$$

ein, so folgt endlich mit (16)

$$(27)\qquad \int_{t'}^{t''}df(t_{m-1})\int_{x_{m-1}}^{T}\mathbf{s}(t-x_m)\,\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,dx_m$$

$$\doteq\sum_{\lambda=0}^{s-2}\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{1}{(p-q)\Big(q-\sum_1^{m-2}p_i\Big)}$$

$$+\varphi_{m-1}\,\widetilde{S}^{(s-1)}_{m-2}\,P_{m-2}\,\frac{1}{(p-q)\Big(q-\sum_1^{m-2}p_i\Big)}\,\frac{1}{q-p_{m-1}-p_{1'}-\cdots-p_{(s-1)'}};$$

diese Formel ist die gesuchte, zu (17a) analoge Darstellung als Summe von Fourierintegralen bezüglich der $x_m-x_i-\tau_i-t_i$ $(1\leqq i\leqq m-2)$.

§ 3.

Rekursive Ausführung aller reellen Integrationen.

Wir wenden nunmehr vollständige Induktion an und nehmen an, daß man bereits für ein $\nu\geqq 1$ das bestimmte Integral (siehe (12))

$$(28)\quad J_\nu=\int_{t'}^{t''}df(t_{m-\nu})\ldots\int_{t'}^{t''}df(t_{m-1})\int_{x_{m-\nu}}^{T}dx_{m-\nu+1}\ldots\int_{x_{m-1}}^{T}\mathbf{s}(t-\tau_m)\,\frac{(T-x_m)^{n-m}}{(n-m)!}\,dx_m,$$

$$0\leqq\nu\leqq m-1$$

in der Gestalt

$$(29)\quad J_\nu \doteq \sum_{\lambda=0}^{s-1} \tilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-1} P_{m-\nu-1} \left(\frac{(p-q)\, a^{(\lambda)}_{\nu,0}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'})}{q - \sum_1^{m-\nu-1} p_i} - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{a^{(\lambda)}_{\nu,k}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'})}{\left(p - \sum_1^{m-\nu-1} p_i\right)^k} \right), \qquad 0 \leqq \nu \leqq m-1$$

dargestellt habe, wobei die (noch von den Parametern p und q abhängigen) $a^{(\lambda)}_{\nu,k}$ analytische, für $\Re\left(q - \sum_1^{\lambda} p_i\right) > 0$ reguläre, symmetrische Funktionen der Variablen $p_1, \ldots, p_\lambda$ seien.

Nach (28) ist

$$J_{\nu+1} = \int_{t'}^{t''} d f(t_{m-\nu-1}) \int_{x_{m-\nu-1}}^{T} J_\nu \, d x_{m-\nu}$$

und wir haben zu zeigen, daß diese Operation (29) in einen analogen Ausdruck überführt; integriert man zunächst (29) nach $d x_{m-\nu}$, so tritt analog wie in (14), (15) zum Integranden ein Faktor $\dfrac{1}{p - \sum_1^{m-\nu-1} p_i}$ hinzu, und der Anteil der oberen Grenze $x_{m-\nu} = T$ ist fortzulassen, da er ja durch die Operation $\int_{C_p} \ldots \frac{d p}{p^{n-m+1}}$ annulliert wird, also

$$\int_{x_{m-\nu-1}}^{T} J_\nu \, d x_{m-\nu} \doteq \sum_{\lambda=0}^{s-1} \tilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-1} P_{m-\nu-2} \frac{e^{-p_{m-\nu-1}\tau_{m-\nu-1} - p_{m-\nu-1} t_{m-\nu-1}}}{p_{m-\nu-1}} \cdot \left(\frac{(p-q)\, a^{(\lambda)}_{\nu,0}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'})}{\left(q - \sum_1^{m-\nu-1} p_i\right)\left(p - \sum_1^{m-\nu-1} p_i\right)} - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{a^{(\lambda)}_{\nu,k}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'})}{\left(p - \sum_1^{m-\nu-1} p_i\right)^{k+1}} \right).$$

Zerlegt man hierin

$$\frac{1}{q - \sum_1^{m-\nu-1} p_i} \cdot \frac{1}{p - \sum_1^{m-\nu-1} p_i} = \frac{1}{p-q} \left(\frac{1}{q - \sum_1^{m-\nu-1} p_i} - \frac{1}{p - \sum_1^{m-\nu-1} p_i} \right)$$

und integriert nach $df(t_{m-\nu-1})$, so wird mit der Bezeichnung (20a)

$$(30)\qquad J_{\nu+1} \doteq \sum_{\lambda=0}^{s-1} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-1} P_{m-\nu-2}\, \varepsilon(-p_{m-\nu-1})\, \frac{e^{-p_{m-\nu-1}\tau_{m-\nu-1}}}{p_{m-\nu-1}} \cdot \left(\frac{a^{(\lambda)}_{\nu,0}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'})}{q - \sum_1^{m-\nu-1} p_i} - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{a^{(\lambda)}_{\nu,k-1}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'})}{\left(p - \sum_1^{m-\nu-1} p_i\right)^k} \right).$$

Nach (19) ist

$$\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-1} = (\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2} - \widetilde{S}^{(\lambda-1)}_{m-\nu-2})\, C_{m-\nu-1} + \widetilde{S}^{(\lambda-1)}_{m-\nu-2}(p_{m-\nu-1} = 0), \quad \lambda \geqq 0,$$

so daß weiter folgt (ξ und φ_ξ statt $p_{m-\nu-1}$ und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{m-\nu-1}} \ldots \varepsilon(-p_{m-\nu-1})\, dp_{m-\nu-1}$$

geschrieben):

$$(31)\qquad J_{\nu+1} \doteq \sum_{\lambda=0}^{s-2} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2} P_{m-\nu-2} \left(\frac{a^{(\lambda+1)}_{\nu,0}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'}, 0)}{q - \sum_1^{m-\nu-2} p_i} - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{a^{(\lambda+1)}_{\nu,k-1}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'}, 0)}{\left(p - \sum_1^{m-\nu-2} p_i\right)^k} \right)$$

$$+ \varphi_\xi \sum_{\lambda=0}^{s-1} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2} P_{m-\nu-2}\, \frac{e^{-\xi\tau_{m-\nu-1}}}{\xi} \left(\frac{a^{(\lambda)}_{\nu,0}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'}) - a^{(\lambda+1)}_{\nu,0}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'}, \xi)}{q - \xi - \sum_1^{m-\nu-2} p_i} \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{a^{(\lambda)}_{\nu,k-1}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'}) - a^{(\lambda+1)}_{\nu,k-1}(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'}, \xi)}{\left(p - \xi - \sum_1^{m-\nu-2} p_i\right)^k} \right), \qquad (a^{(s)}_{\nu,k-1} \equiv 0).$$

Um den zweiten Summanden dieses Ausdruckes in eine Summe von Fourierintegralen bezüglich der $x_{m-\nu-1} - x_i - \tau_i - t_i$ $(1 \leqq i \leqq m-\nu-2)$ umformen, hat man in ihn (siehe (22)) die Fourierdarstellung

$$\frac{e^{-\xi\tau_{m-\nu-1}}}{\xi} = \sum_{\mu=0}^{s-1} \widetilde{T}^{(\mu)}_{m-\nu-2} Q_{m-\nu-2} \frac{1}{\xi - \sum_1^{m-\nu-2} q_i}, \quad (\Re(\xi) > 0)$$

$$(32)\qquad \text{mit} \quad Q_{m-\nu-2} = \frac{e^{\sum_1^{m-\nu-2} q_i (x_{m-\nu-1} - x_i - \tau_i - t_i)}}{q_1 \cdots q_{m-\nu-2}}, \quad 1 \leqq \nu \leqq m-2$$[3])

[3]) Daß (32) auch für $m-1-s \leqq \nu \leqq m-2$ richtig bleibt, folgt daraus, daß dann die rechte Seite gemäß dem bei (9d) ausgeführten $= \frac{1}{\xi}$ ist, also nach (7a) auch dann der linken Seite gleich ist.

einzusetzen und hat daher Summen aus $2(m-\nu-2)$-fachen Integralen von der Form

$$(33)\qquad \sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{\mu=0}^{s-1} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2}\,\widetilde{T}^{(\mu)}_{m-\nu-2}\,P_{m-\nu-2}\,Q_{m-\nu-2}\,\frac{f(p_{1'},\ldots,p_{\lambda'})}{\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} q_i}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i}\quad\text{oder}\quad\frac{1}{\left(p-\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i\right)^k}\right)$$

mit

$$(33a)\quad f(p_1,\ldots,p_\lambda)=a^{(\lambda)}_{\nu,k-1}(p_1,\ldots,p_\lambda)-a^{(\lambda+1)}_{\nu,k-1}(p_1,\ldots,p_\lambda,\xi)\quad(1\leqq k\leqq\nu)$$

$\left(\text{also symmetrisch in } p_1,\ldots,p_\lambda \text{ und regulär für } \Re\left(q-\sum_{1}^{\lambda}p_i\right)>0\right)$ in $(m-\nu-2)$-fache Fourierintegrale umzuwandeln. Wir setzen wieder

$$p_i+q_i=v_i$$

und bedienen uns der Partialbruchzerlegung

$$(34a)\qquad \frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i}\,\frac{1}{\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} q_i}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{q-\sum_{1}^{m-\nu-2} v_i}\,\frac{1}{\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} q_i}}_{1}+\underbrace{\frac{1}{q-\sum_{1}^{m-\nu-2} v_i}\,\frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i}}_{2}$$

bzw.

$$(34b)\qquad \frac{1}{\left(p-\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i\right)^k}\,\frac{1}{\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} q_i}=\frac{1}{\left(p-\sum_{1}^{m-\nu-2} v_i\right)^k}\,\frac{1}{\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} q_i}$$

$$+\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{\left(p-\sum_{1}^{m-\nu-2} v_i\right)^x}\,\frac{1}{\left(p-\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i\right)^{k-x+1}}.$$

Es genügt nun, die beiden durch (34a) aus (33) hervorgehenden Ausdrücke

$$(35a)\qquad \text{„1“}=\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{\mu=0}^{s-1}\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2}\,\widetilde{T}^{(\mu)}_{m-\nu-2}\,P_{m-\nu-2}\,Q_{m-\nu-2}\,\frac{f(p_{1'},\ldots,p_{\lambda'})}{\left(q-\sum_{1}^{m-\nu-2} v_i\right)\left(\xi-\sum_{1}^{m-\nu-2} q_i\right)}$$

und

$$(35\text{b}) \qquad „2'' = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \sum_{\mu=0}^{s-1} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2}\, \widetilde{T}^{(\mu)}_{m-\nu-2}\, P_{m-\nu-2}\, Q_{m-\nu-2} \frac{f(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'})}{\left(q - \sum_{1}^{m-\nu-2} v_i\right)\left(q - \xi - \sum_{1}^{m-\nu-2} p_i\right)}$$

umzuformen; daraus sind dann auch die den Partialbrüchen des Integrandenfaktors (34b) entsprechenden Formeln unmittelbar zu entnehmen.

In den $\sum_{\lambda=0}^{s-1} \binom{m-\nu-2}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{s-1} \binom{m-\nu-2}{\mu}$ Summanden von (35a) ersetzen wir für diejenigen Indizes i, die zu Kurven C_i gehören (so daß p_i in $f(p_{1'}, \ldots, p_{\lambda'})$ nicht auftritt), die Variable q_i durch $v_i - p_i$; für die elementaren Doppelintegrale

$$\int_{C_i} \int_{D_i(D_i')} \ldots d p_i d q_i$$

folgt dann, mit der früheren Bedeutung von V_i, V_i',

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_i} \int_{D_i(D_i')} \frac{e^{(p_i+q_i)a_i}}{p_i q_i} \frac{d p_i d q_i}{\left(p - \sum_{1}^{m-\nu-2} v_k\right)\left(\xi - \sum_{1}^{m-\nu-2} q_k\right)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_i'} \int_{V_i(-V_i')} \frac{e^{v_i a_i}}{p_i(v_i - p_i)} \frac{d p_i d v_i}{\left(q - \sum_{1}^{m-\nu-2} v_k\right)\left(\xi - \sum_{1}^{m-\nu-2} q_k + p_i + q_i - v_i\right)}$$

$$\begin{pmatrix} D_i \to \Re(v_i - p_i) > 0 \\ D_i' \to \Re(v_i - p_i) < 0 \end{pmatrix}.$$

Verschiebt man nun C_i nach rechts, so wird nur im Falle eines D_i ein Pol, und zwar $p_i = v_i$, überstrichen, so daß man erhält:

$$(36) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi i)^2} \displaystyle\int_{C_i'} \int_{D_i'} \ldots d p_i d q_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{V_i'} \frac{e^{v_i a_i}}{v_i} \frac{d v_i}{\left(q - \sum_{1}^{m-\nu-2} v_k\right)\left(\xi - \sum_{1}^{m-\nu-2} q_k + q_i\right)}, \\ \dfrac{1}{(2\pi i)^2} \displaystyle\int_{C_i} \int_{D_i'} \ldots d p_i d q_i = 0. \end{cases}$$

Aus der letzten Beziehung folgt, daß in (35a) für $\mu > \lambda$ alle Summanden von $\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2}\,\widetilde{T}^{(\mu)}_{m-\nu-2}$ verschwinden, da ja jeder dieser Summanden $\mu-\lambda \geqq 1$ Aggregate $\int_{C_i}\int_{D_i'}$ enthält. Für $\mu \leqq \lambda$ aber hat man nur diejenigen Summanden zu berücksichtigen, deren μ D'-Indizes Zahlen aus dem System $1', \ldots, \lambda'$ der zugehörigen C'-Indizes sind. Für jedes System $1', \ldots, \lambda'$ ist daher nur über $\sum_{\mu=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\mu} = 2^\lambda$ D'-Indexkombinationen zu summieren. Formt man nun in den verbleibenden Summanden von (35a) die $m-\nu-2-\lambda$ Doppelintegrale $\int_{C_i}\int_{D_i'}$ gemäß (36) um, so folgt (p_i, C_i statt v_i, V_i geschrieben)

$$„1“ \doteq \sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\cdots$$

$$\doteq \sum_{\lambda=0}^{s-1}\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2}\,P_{m-\nu-2}\,\frac{f(p_{1'},\ldots,p_{\lambda'})}{q-\sum_{1}^{m-\nu-2}p_i}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\sum_{1''\ldots\mu''}\frac{1}{(2\pi i)^\lambda}\int_{D_{1''}'}\cdots\int_{D_{\mu''}'}\int_{D_{(\mu+1)''}}\cdots$$

$$\cdots\int_{D_{\lambda''}}\frac{dq_{1'}\ldots dq_{\lambda'}}{\xi-\sum_{1'}^{\lambda'}q_i},$$

worin $\sum_{1''\ldots\mu''}$ über alle $\binom{\lambda}{\mu}$ Kombinationen zu μ Elementen aus $1'\ldots\lambda'$ geht. Weiter ist

$$\sum_{\mu=0}^{\lambda}\sum_{1''\ldots\mu''}\cdots = \frac{1}{(2\pi i)^\lambda}\int_{D_{1'}+D_{1'}'}\cdots\int_{D_{\lambda'}+D_{\lambda'}'}\frac{dq_{1'}\ldots dq_{\lambda'}}{\xi-\sum_{1'}^{\lambda'}q_i} = \frac{1}{\xi},$$

da $\frac{1}{2\pi i}\int_{D_i+D_i'}\ldots dq_i$ gleich dem Residuum an der Stelle $q_i = 0$, ist und daher

$$(37)\qquad „1“ = \sum_{\lambda=0}^{s-1}\widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2}\,P_{m-\nu-2}\,\frac{f(p_{1'},\ldots,p_{\lambda'})}{\left(q-\sum_{1}^{m-\nu-2}p_i\right)\xi}.$$

Ersetzt man nun ebenso in den elementaren Doppelintegralen $\int\int \dots dp_i dq_i$ von „2“ die Variable q_i durch $v_i - p_i$, also

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int \dots dp_i dq_i = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int \frac{e^{v_i a_i}}{p_i(v_i - p_i)} \frac{f(p_{1'}, \dots, p_{\lambda'})}{\left(q - \sum_1^{m-\nu-2} v_k\right)\left(q - \xi - \sum_1^{m-\nu-2} p_k\right)} dp_i dv_i,$$

und verschiebt $C_i (C_i')$ nach links, so werden höchstens die Pole $p_i = 0$ (im Falle eines C_i) und $p_i = v_i$ (im Falle eines D_i') überstrichen; man erhält so

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_i}\int_{D_i} \dots dp_i dq_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{V_i} \frac{e^{v_i a_i}}{v_i} \frac{f(p_{1'}, \dots, p_{\lambda'})\, dv_i}{\left(q - \sum_1^{m-\nu-2} v_k\right)\left(q - \xi - \sum_1^{m-\nu-2} p_k + p_i\right)};$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_i}\int_{D_i'} \dots dp_i dq_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{V_i'} \frac{e^{v_i a_i}}{v_i} \frac{f(p_{1'}, \dots, p_{\lambda'})}{q - \sum_1^{m-\nu-2} v_k} \left(\frac{1}{q - \xi - \sum_1^{m-\nu-2} p_k + p_i} - \frac{1}{q - \xi - \sum_1^{m-\nu-2} p_k + p_i - v_i}\right) dv_i;$$

(38)

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_i'}\int_{D_i} \dots dp_i dq_i = 0;$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_i'}\int_{D_i'} \dots dp_i dq_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{V_i'} \frac{e^{v_i a_i}}{v_i} \frac{f(p_{1'}, \dots, v_i, \dots, p_{\lambda'})\, dv_i}{\left(q - \sum_1^{m-\nu-2} v_k\right)\left(q - \xi - \sum_1^{m-\nu-2} p_k + p_i - v_i\right)}.$$

Aus der dritten dieser Formeln geht hervor, daß in „2“ alle Summanden mit $\lambda > \mu$ verschwinden, während von den übrigen Summanden nur diejenigen zu berücksichtigen sind, deren λ C'-Indizes dem Systeme $1', \dots, \mu'$

der zugehörigen D'-Indizes angehören; durch $(m-\nu-2)$-malige Anwendung von (38) auf die einzelnen Summanden von (35 b) folgt daher (mit p_i, C_i statt v_i, V_i):

$$(39)\qquad \text{„}2\text{“} \doteq \sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{\mu=0}^{s-1}\cdots \doteq \sum_{\mu=0}^{s-1}\sum_{\lambda=0}^{\mu}\cdots$$

$$\doteq \sum_{\mu=0}^{s-1} \widetilde{S}^{(\mu)}_{m-\nu-2}\, P_{m-\nu-2}\, \frac{1}{q-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i} \sum_{\lambda=0}^{\mu}\sum_{1''\dots\lambda''} f(p_{1''},\dots,p_{\lambda''})$$

$$\cdot\left[\frac{1}{q-\xi-\sum_{1''}^{\lambda''} p_i} - \sum_{j=(\lambda+1)''}^{\mu''} \frac{1}{q-\xi-\sum_{1''}^{\lambda''} p_i - p_j} + \dots - \dots + \frac{(-1)^{\mu-\lambda}}{q-\xi-\sum_{1'}^{\mu'} p_i}\right];$$

hierbei geht $\sum_{1''\dots\lambda''}$ über alle $\binom{\mu}{\lambda}$ Kombinationen aus dem System $1',\dots,\mu'$, und $[\dots]$ enthält $2^{\mu-\lambda}$ Summanden.

Wir können nunmehr den zweiten Summanden von (31), der zufolge (32) eine Summe von Ausdrücken (33) (mit (33 a)) ist, als Fourierintegralsumme schreiben, denn die Umwandlungsformeln für die den Partialbrüchen rechts in (34 b) entsprechenden, zu (35 a), (35 b) analogen Ausdrücke sind aus (37), (39) unmittelbar zu entnehmen. Für den zweiten Summanden von (31) folgt so, mit (33 a):

$$\varphi_\xi \sum_{\lambda=0}^{s-1} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2}\, P_{m-\nu-2}\, \frac{e^{-\xi\tau_{m-\nu-1}}}{\xi}(\dots) = \varphi_\xi \sum_{\lambda=0}^{s-1} \widetilde{S}^{(\lambda)}_{m-\nu-2}\, P_{m-\nu-2}$$

$$\Bigg\{\Bigg(\cancel{\left(a^{(\lambda)}_{\nu,0}(p_{1'},\dots,p_{\lambda'}) - a^{(\lambda+1)}_{\nu,0}(p_{1'},\dots,p_{\lambda'},\xi)\right)\frac{1}{\xi}}$$

$$+\sum_{\mu=0}^{\lambda}\sum_{1''\dots\mu''}\left(a^{(\mu)}_{\nu,0}(p_{1''},\dots,p_{\mu''}) - a^{(\mu+1)}_{\nu,0}(p_{1''},\dots,p_{\mu''},\xi)\right)$$

$$\left[\frac{1}{q-\xi-\sum_{1''}^{\mu''} p_i} - \dots + \frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{q-\xi-\sum_{1'}^{\lambda'} p_i}\right]\Bigg)\cdot\frac{1}{q-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i} \qquad (40)$$

$$-\sum_{k=1}^{\nu}\cancel{\left(a^{(\lambda)}_{\nu,k-1}(p_{1'},\dots,p_{\lambda'}) - a^{(\lambda+1)}_{\nu,k-1}(p_{1'},\dots,p_{\lambda'},\xi)\right)\frac{1}{\xi}}\frac{1}{\left(p-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i\right)^k}$$

$$-\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{x=1}^{k}\sum_{\mu=0}^{\lambda}\sum_{1''\dots\mu''}\left(a^{(\mu)}_{\nu,k-1}(p_{1''},\dots,p_{\mu''}) - a^{(\mu+1)}_{\nu,k-1}(p_{1''},\dots,p_{\mu''},\xi)\right)$$

$$\left[\frac{1}{\left(p-\xi-\sum_{1''}^{\mu''} p_i\right)^{k-x+1}} - \dots + \frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{\left(p-\xi-\sum_{1'}^{\lambda'} p_i\right)^{k-x+1}}\right]\frac{1}{\left(p-\sum_{1}^{m-\nu-2} p_i\right)^x}\Bigg\};$$

die beiden hier durchstrichenen Glieder werden durch φ_ξ annulliert.

Setzt man (40) in (31) ein, so entsteht eine Formel von der Gestalt (29), und für die $a^{(\lambda)}_{\nu+1,k}$ erhält man

(41 a)
$$(p-q)\,a^{(\lambda)}_{\nu+1\,0}(p_1,\ldots,p_\lambda)$$
$$= a^{(\lambda+1)}_{\nu,0}(p_1,\ldots,p_\lambda,0) - \varphi_\xi \frac{1}{\xi} a^{(\lambda+1)}_{\nu,0}(p_1,\ldots,p_\lambda,\xi)$$
$$+ \varphi_\xi \sum_{\mu=0}^{\lambda} \sum_{1'\ldots\mu'} \left(a^{(\mu)}_{\nu,0}(p_{1'},\ldots,p_{\mu'}) - a^{(\mu+1)}_{\nu,0}(p_{1'},\ldots,p_{\mu'},\xi)\right)$$
$$\cdot\left[\frac{1}{q-\xi-\sum_{1'}^{\mu'} p_i} - \ldots + \frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{q-\xi-\sum_{1}^{\lambda} p_i}\right]$$
$$(0 \leqq \lambda \leqq s-1;\ \nu = 0, 1, \ldots)$$

(41 b)
$$a^{(\lambda)}_{\nu+1,k}(p_1,\ldots,p_\lambda)$$
$$= a^{(\lambda+1)}_{\nu,k-1}(p_1,\ldots,p_\lambda,0) - \frac{\varphi_\xi}{\xi} a^{(\lambda+1)}_{\nu,k-1}(p_1,\ldots,p_\lambda,\xi)$$
$$+ \varphi_\xi \sum_{x=k}^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \sum_{1'\ldots\mu'} \left(a^{(\mu)}_{\nu,x-1}(p_{1'},\ldots,p_{\mu'}) - a^{(\mu+1)}_{\nu,x-1}(p_{1'},\ldots,p_{\mu'},\xi)\right)$$
$$\cdot\left[\frac{1}{\left(p-\xi-\sum_{1'}^{\mu'} p_i\right)^{x-k+1}} - \ldots + \frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{\left(p-\xi-\sum_{1}^{\lambda} p_i\right)^{x-k+1}}\right]$$
$$(1 \leqq k \leqq \nu;\quad 0 \leqq \lambda \leqq s-1;\quad \nu = 1, 2, \ldots;\quad a^{(s)}_{\nu,k} \equiv 0);$$

weiter folgt noch aus dem Vergleich von (29), (28) mit (17 a)

(41 c)
$$a^{(\lambda)}_{0,0}(p_1,\ldots,p_\lambda) = \frac{1}{p-q},\quad 0 \leqq \lambda \leqq s-1,$$

so daß alle $a^{(\lambda)}_{\nu,k}$ durch (41 a, b, c) rekursiv zu bestimmen sind.

Setzt man in (29) speziell $\nu = m-1$, wobei nach (16)

$$P_0 = \frac{e^{p(T-x_1)+qt}}{p^{n-m+1}}$$

und nach (9 a)

$$\widetilde{S}^{(0)}_0 = 1,\quad \widetilde{S}^{(\lambda)}_0 = 0,\quad (\lambda > 0)$$

wird, so folgt

$$J_{m-1} \doteq \frac{e^{p(T-x_1)+qt}}{p^{n-m+1}}\left((p-q)\frac{a^{(0)}_{m-1,0}}{q} - \sum_{k=1}^{m-2}\frac{a^{(0)}_{m-1,k}}{p^k}\right)$$
$$\doteq \frac{e^{p(T-x_1)+qt}}{p^{n-m+1}}\left(\frac{p}{q}\,a^{(0)}_{m-1,0} - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{a^{(0)}_{m-1,k}}{p^k}\right).$$

Nach (12), (28) ist

$$\bar{s}(t-\tau_m) = \frac{n!}{T^n}\int_0^T J_{m-1}\,dx_1,$$

und daher, mit „=“ statt „$\doteq$“,

$$(42)\quad \bar{s}(t-\tau_m) = \frac{n!}{T^n}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_p}\int_{C_q}\frac{e^{pT+qt}}{p^{n-m+2}}\left(\frac{p}{q}\,a^{(0)}_{m-1,0} - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{a^{(0)}_{m-1,k}}{p^k}\right)dp\,dq$$

$$(\Re(p-q)>0),\quad m=1,2,\ldots,$$

so daß unsere Aufgabe, die Integrationen (12) auszuführen, durch Angabe der durch (41 a, b, c) bestimmten, von den Parametern p und q abhängigen $a^{(0)}_{\nu,k}$ gelöst wird.

§ 4.

Zurückführung auf zwei Systeme von linearen Integralgleichungen.

Um nun einfachere Rekursionsformeln zu erhalten, ersetzen wir die $a^{(\lambda)}_{\nu,k}$ $(0 \leqq \lambda \leqq s-1)$ durch die ebenfalls in $p_1, \ldots, p_\lambda$ symmetrischen Funktionen

$$(43)\quad b^{(\lambda)}_{\nu,k}(p_1,\ldots,p_\lambda) = \sum_{\varrho=0}^{\lambda}(-1)^\varrho \sum_{1''\ldots\varrho''} a^{(\varrho)}_{\nu,k}(p_{1''},\ldots,p_{\varrho''}),$$

$$(0 \leqq \lambda \leqq s;\ 0 \leqq k \leqq \nu-1;\ \nu=0,1,\ldots;\ a^{(s)}_{\nu,k} \equiv 0).$$

Zwischen den $b^{(\lambda)}_{\nu,k}$ besteht die im folgenden benötigte Identität $\left(\sum_{1'\ldots\lambda'}\right.$ bzw. $\sum_{1'\ldots\varrho'}$ ist über alle $\binom{s}{\lambda}$ bzw. $\binom{s}{\varrho}$ Kombinationen zu λ bzw. ϱ Elementen aus $1\ldots s$ zu erstrecken$\Big)$

$$\sum_{\lambda=0}^{s}(-1)^{s-1-\lambda}\sum_{1'\ldots\lambda'} b^{(\lambda)}_{\nu,k}(u_{1'},\ldots,u_{\lambda'})$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{s}(-1)^{s-1-\lambda}\sum_{1'\ldots\lambda'}\sum_{\varrho=0}^{\lambda}(-1)^\varrho\sum_{1''\ldots\varrho''} a^{(\varrho)}_{\nu,k}(u_{1''},\ldots,u_{\varrho''})$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{s-1}(-1)^\varrho\sum_{1''\ldots\varrho''} a^{(\varrho)}_{\nu,k}(u_{1''},\ldots,u_{\varrho''})\cdot\sum_{\lambda=\varrho}^{s}(-1)^{s-1-\lambda}\binom{s-\varrho}{\lambda-\varrho} = 0,$$

also

$$(43\,a)\quad b^{(s)}_{\nu,k}(u_1,\ldots,u_s) = \sum_{\varrho=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\varrho}\sum_{1'\ldots\varrho'} b^{(\varrho)}_{\nu,k}(u_{1'},\ldots,u_{\varrho'}).$$

Wird rechts in (43) ($k = 0$; $0 \leqq \lambda \leqq s-1$) der Ausdruck (41a) eingesetzt und noch

$$a_{\nu,k}^{(\lambda+1)}(p_1, \ldots, p_\lambda, 0) - \varphi_\xi \frac{a_{\nu,k}^{(\lambda+1)}(p_1, \ldots, p_\lambda, \xi)}{\xi} = -\widetilde{\varphi}_\xi \frac{a_{\nu,k}^{(\lambda+1)}(p_1, \ldots, p_\lambda, \xi)}{\xi}$$

geschrieben, mit

$$\widetilde{\varphi}_\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \varepsilon(-\xi) \ldots d\xi \tag{44}$$

Fig. 2.

($C^* = -C'$ (s Fig. 2) entsteht durch Linksverschiebung von C über den Nullpunkt hinweg; wir setzen hier der Kürze halber voraus, daß (20a) noch für $\Re(z) = c > 0$ konvergiert), so folgt

$$(p-q)\, b_{\nu+1,0}^{(\lambda)}(p_1, \ldots, p_\lambda) = \widetilde{\varphi}_\xi \frac{1}{\xi} \sum_{\varrho=0}^{\lambda} (-1)^{\varrho+1} \sum_{1'' \ldots \varrho''} a_{\nu,0}^{(\varrho+1)}(p_{1''}, \ldots, p_{\varrho''}, \ldots$$

$$+ \widetilde{\varphi}_\xi \sum_{\varrho=0}^{\lambda} (-1)^{\varrho} \sum_{1'' \ldots \varrho''} \sum_{\mu=0}^{\varrho} \sum_{1' \ldots \mu'} (a_{\nu,0}^{(\mu)}(p_{1'}, \ldots, p_{\mu'}) - a_{\nu,0}^{(\mu+1)}(p_{1'}, \ldots, p_{\mu'}, \xi$$

$$\cdot \left[\frac{1}{q - \xi - \sum_{1'}^{\mu'} p_i} - \ldots + \frac{(-1)^{\varrho-\mu}}{q - \xi - \sum_{1''}^{\varrho''} p_i} \right], \quad 0 \leqq \lambda \leqq s-1. \tag{45}$$

Für die erste Doppelsumme rechts folgt für mit (43)

$$\sum_{\varrho=0}^{\lambda} (-1)^{\varrho+1} \sum_{1' \ldots \varrho'} a_{\nu,0}^{(\varrho+1)}(p_{1'}, \ldots, p_{\varrho'}, \xi) \tag{46}$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{\lambda+1} (-1)^{\sigma} \sum_{1' \ldots \sigma'} a_{\nu,0}^{(\sigma)}(\widetilde{p}_{1'}, \ldots, \widetilde{p}_{\sigma'}) - \sum_{\sigma=0}^{\lambda} (-1)^{\sigma} \sum_{1' \ldots \sigma'} a_{\nu,0}^{(\sigma)}(p_{1'}, \ldots, p_{\sigma'})$$

$$= b_{\nu,0}^{(\lambda+1)}(p_1, \ldots, p_\lambda, \xi) - b_{\nu,0}^{(\lambda)}(p_1, \ldots, p_\lambda), \quad 0 \leqq \lambda \leqq s-1;$$

hierin durchläuft $(\widetilde{p}_{1'}, \ldots, \widetilde{p}_{\sigma'})$ alle $\binom{\lambda+1}{\sigma}$ Kombinationen aus $p_1, \ldots, p_\lambda, \xi$. Für den zweiten Summanden von (45) hat man

$$\sum_{\varrho=0}^{\lambda} (-1)^{\varrho} \sum_{1'' \ldots \varrho''} \sum_{\mu=0}^{\varrho} \sum_{1' \ldots \mu'} \ldots \tag{47}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^{\mu} \sum_{1' \ldots \mu'} (a_{\nu,0}^{(\mu)}(p_{1'}, \ldots, p_{\mu'}) - a_{\nu,0}^{(\mu+1)}(p_{1'}, \ldots, p_{\mu'}, \xi))$$

$$\cdot \sum_{\varrho=\mu}^{\lambda} (-1)^{\varrho-\mu} \sum_{1'' \ldots \varrho''} \sum_{1' \ldots \mu'} \left[\frac{1}{q - \xi - \sum_{1'}^{\mu'} p_i} - \ldots + \frac{(-1)^{\varrho-\mu}}{q - \xi - \sum_{1''}^{\varrho''} p_i} \right],$$

und für die letzte Doppelsumme, deren innere Summation über diejenigen $\binom{\lambda-\mu}{\varrho-\mu}$ Indexkombinationen aus $1, \ldots, \lambda$ geht, die $1', \ldots, \mu'$ enthalten, folgt

$$\sum_{\varrho=\mu}^{\lambda}(-1)^{\varrho-\mu}\sum_{1''\dots\varrho''\geqq 1'\dots\mu'}\left[\frac{1}{q-\xi-\sum_{1'}^{\mu'}p_i}-\sum_{j\neq 1'\dots\mu'}\frac{1}{q-\xi-\sum_{1'}^{\mu'}p_i-p_j}+\dots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{\varrho-\mu}}{q-\xi-\sum_{1''}^{\varrho''}p_i}\right]=\frac{1}{q-\xi-\sum_{1'}^{\mu'}p_i}\sum_{\varrho=\mu}^{\lambda}(-1)^{\varrho-\mu}\binom{\lambda-\mu}{\varrho-\mu}$$

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1'\dots\mu'}}^{\lambda}\frac{1}{q-\xi-\sum_{1'}^{\mu'}p_i-p_j}\sum_{\varrho=\mu+1}^{\lambda}(-1)^{\varrho-\mu}\binom{\lambda-\mu-1}{\varrho-\mu-1}+\dots$$

$$+\frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{\lambda}p_i}=\frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{\lambda}p_i},$$

so daß man aus (47) mit (43) erhält

$$\sum_{\varrho=0}^{\lambda}(-1)^{\varrho}\sum_{1''\dots\varrho''}\sum_{\mu=0}^{\varrho}\sum_{1'\dots\mu'}\dots$$

$$(48)\qquad=\frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{\lambda}p_i}\sum_{\mu=0}^{\lambda+1}(-1)^{\mu}\sum_{1'\dots\mu'}a_{\nu,0}^{(\mu)}(\tilde{p}_{1'},\dots,\tilde{p}_{\mu'})$$

$$=\frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{\lambda}p_i}\,b_{\nu,0}^{(\lambda+1)}(p_1,\dots,p_\lambda,\xi),\quad 0\leqq\lambda\leqq s-1.$$

Mit (46), (48) wird aus (45)

$$(p-q)\,b_{\nu+1,0}^{(\lambda)}(p_1,\dots,p_\lambda)=\tilde{\varphi}_\xi\frac{1}{\xi}\left(b_{\nu,0}^{(\lambda+1)}(p_1,\dots,p_\lambda,\xi)-b_{\nu,0}^{(\lambda)}(p_1,\dots,p_\lambda)\right)$$

$$+\tilde{\varphi}_\xi\frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{\lambda}p_i}\,b_{\nu,0}^{(\lambda+1)}(p_1,\dots,p_\lambda,\xi)$$

oder, da aus (44) $\tilde{\varphi}\frac{c}{\xi}=-c$ folgt,

$$(49\,a)\qquad(p-q)\,b_{\nu+1,0}^{(\lambda)}(p_1,\dots,p_\lambda)-b_{\nu,0}^{(\lambda)}(p_1,\dots,p_\lambda)$$

$$=\tilde{\varphi}_\xi\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{q-\xi-\sum_{1}^{\lambda}p_i}\right)b_{\nu,0}^{(\lambda+1)}(p_1,\dots,p_\lambda,\xi),\qquad 0\leqq\lambda\leqq s-1;\ \nu=0,1,\dots$$

Schließlich erhält man aus (43) ($\nu=k=0$) und den Anfangsbedingungen (41 c)

$$(49\,b)\qquad b_{00}^{(0)}=\frac{1}{p-q};\quad b_{00}^{(\lambda)}=0,\qquad 1\leqq\lambda\leqq s-1.$$

In gleicher Weise folgt mit (43) aus den Formeln (41 b)

$$(50)\qquad b_{\nu+1,k}^{(\lambda)}(p_1,\dots,p_\lambda)-b_{\nu,k-1}^{(\lambda)}(p_1,\dots,p_\lambda)$$

$$=\tilde{\varphi}_\xi\frac{1}{\xi}\,b_{\nu,k-1}^{(\lambda+1)}(p_1,\dots,p_\lambda,\xi)+\tilde{\varphi}_\xi\sum_{x=k}^{\nu}\frac{b_{\nu,x-1}^{(\lambda+1)}(p_1,\dots,p_\lambda,\xi)}{\left(p-\xi-\sum_{1}^{\lambda}p_i\right)^{x-k+1}},$$

$$0\leqq\lambda\leqq s-1,\quad(1\leqq k\leqq\nu;\ \nu=1,2,\dots)$$

und durch (49 a, b), (50), (43 a) sind die $b_{\nu,k}^{(\lambda)}$ eindeutig bestimmt.

Wir fassen diese Gleichungen jetzt mittels der, gleich den $b_{\nu,k}^{(\lambda)}$ in $p_1, \ldots, p_\lambda$ symmetrischen, „erzeugenden Funktionen"

$$(51) \qquad B_{\lambda,0}(p_1, \ldots, p_\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu b_{\nu,0}^{(\lambda)}(p_1, \ldots, p_\lambda), \qquad 0 \leqq \lambda \leqq s,$$

$$(52) \qquad B_\lambda(p_1, \ldots, p_\lambda; y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu-1} z^{\nu+1} y^{-k-1} b_{\nu,k}^{(\lambda)}(p_1, \ldots, p_\lambda), \qquad 0 \leqq \lambda \leqq s,$$

zusammen; daß diese Reihen, deren Abhängigkeit von p, q, z in der Schreibweise nicht besonders zum Ausdruck gebracht wird, für hinreichend kleines $|z|$, bzw. für hinreichend kleines $|z|$ und $\left|\frac{z}{y}\right|$ konvergieren [gleichmäßig für alle p_ν des Bereiches $\Re\left(q - \sum_1^{\lambda'} p_i\right) > c > 0$, $0 \leqq \lambda \leqq s-1$], kann durch elementare Abschätzung der $b_{\nu,k}^{(\lambda)}$ in (49a), (50) leicht nachgewiesen werden. Aus (49a) erhält man durch die Operation $\sum_{\nu=0}^{\infty} \ldots z^{\nu+1}$

$$(p - q - z) \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu b_{\nu,0}^{(\lambda)}(p_1, \ldots, p_\lambda) - (p - q) b_{0,0}^{(\lambda)}$$
$$= \tilde{\varphi}_\xi^{\lambda} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{q - \xi - \sum_1^{\lambda} p_i} \right) z \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu b_{\nu,0}^{(\lambda+1)}(p_1, \ldots, p_\lambda, \xi), \qquad 0 \leqq \lambda \leqq s-1,$$

oder mit (51), (49b)

$$(53a) \qquad (p - q - z) B_{\lambda,0}(p_1, \ldots, p_\lambda)$$
$$= z \tilde{\varphi}_\xi^{\lambda} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{q - \xi - \sum_1^{\lambda} p_i} \right) B_{\lambda+1,0}(p_1, \ldots, p_{\lambda-1}, \xi) + \delta_0^\lambda,$$
$$0 \leqq \lambda \leqq s-1 \quad (\delta_0^0 = 1;\ \delta_0^\lambda = 0,\ \lambda > 0);$$

mittels der gleichen Operation folgt aus (43a) ($k = 0$) und (51)

$$(53b) \qquad B_{s,0}(p_1, \ldots, p_s) = \sum_{\varrho=0}^{s-1} (-1)^{s-1-\varrho} \sum_{1' \ldots \varrho'} B_{\varrho,0}(p_{1'}, \ldots, p_{\varrho'}),$$

worin wieder $\sum_{1' \ldots \varrho'}$ über alle $\binom{s}{\varrho}$ Kombinationen zu ϱ Elementen aus $1 \ldots s$ zu erstrecken ist.

Weiter erhält man aus (50), (52) durch die Operation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu} \ldots z^{\nu+1} y^{-k} :$$

$$(54)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu} z^{\nu+1}y^{-k}\,b^{(\lambda)}_{\nu+1,k}(p_1,\ldots,p_\lambda) - B_\lambda(p_1,\ldots,p_\lambda;\,y)$$
$$= \tilde{\varphi}_\xi \frac{1}{\xi} B_{\lambda+1}(p_1,\ldots,p_\lambda,\xi;\,y)$$
$$+ \tilde{\varphi}_\xi \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{x=k}^{\nu} \frac{y^{-k}z^{\nu+1}\,b^{(\lambda+1)}_{\nu,x-1}(p_1,\ldots,p_\lambda,\xi)}{\left(p-\xi-\sum_1^\lambda p_i\right)^{x-k+1}},\quad 0\leqq\lambda\leqq s-1$$

und hier folgt für die linke Seite, wegen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\nu}\ldots - \sum_{\nu=0}^{\infty}(k=0),$$

mit (52), (51), (49 b)

$$\left(\frac{y}{z}-1\right)B_\lambda(p_1,\ldots,p_\lambda;\,y) - B_{\lambda,0}(p_1,\ldots,p_\lambda) + \frac{\delta_0^\lambda}{p-q};$$

rechts ist

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{x=k}^{\nu}\ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{\nu} z^{\nu+1}y^{-x}\,b^{(\lambda+1)}_{\nu,x-1}\sum_{k=1}^{x}\frac{y^{x-k}}{\left(p-\xi-\sum_1^\lambda p_i\right)^{x-k+1}}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{x=1}^{\nu} z^{\nu+1}y^{-x}\frac{b^{(\lambda+1)}_{\nu,x-1}(p_1,\ldots,p_\lambda,\xi)}{p-\xi-\sum_1^\lambda p_i - y}\left(1-\frac{y^x}{\left(p-\xi-\sum_1^\lambda p_i\right)^x}\right).$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke zu beiden Seiten von (54) ein, so folgt mit (52)

$$(55a)\quad \begin{cases} \left(\frac{y}{z}-1\right)B_\lambda(p_1,\ldots,p_\lambda;\,y) - B_{\lambda,0}(p_1,\ldots,p_\lambda) + \frac{\delta_0^\lambda}{p-q} \\ = \tilde{\varphi}_\xi\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{p-\xi-\sum_1^\lambda p_i - y}\right) B_{\lambda+1}(p_1,\ldots,p_\lambda,\xi;\,y) \\ - \tilde{\varphi}_\xi \frac{1}{p-\xi-\sum_1^\lambda p_i - y} B_{\lambda+1}\left(p_1,\ldots,p_\lambda,\xi;\,p-\xi-\sum_1^\lambda p_i\right) \\ \qquad\qquad (0\leqq\lambda\leqq s-1); \end{cases}$$

durch die Operation $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\nu-1}\ldots z^{\nu+1}y^{-k-1}$ erhält man schließlich aus (43 a), mit (52)

$$(55\,b)\qquad B_s(p_1,\ldots,p_s;\,y) = \sum_{\varrho=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\varrho}\sum_{1'\ldots\varrho'} B_\varrho(p_{1'},\ldots p_{\varrho'};\,y).$$

Daß durch diese beiden Systeme von linearen Gleichungen, in denen $\Re(p-q)>0$, $\Re\left(q-\xi-\sum_{1'}^{\lambda'} p_i\right)>0$ (für alle 2^{s-1} Kombinationen $\sum_{1'}^{\lambda'}$) vorausgesetzt sind, die $B_{\lambda,0}$ und B_λ als ihre einzigen für hinreichend kleines $|z|$ und $\left|\frac{z}{y}\right|$ regulären Lösungen eindeutig bestimmt sind, ist leicht zu erkennen.

Wir leiten jetzt aus (42) für $\bar{\mathfrak{s}}(t-\tau_m)$ und $\varrho(t)$ Formeln ab, die nur die Funktionen B_{00} und B_0 enthalten. Aus (52) folgt für $\lambda = 0$, $y = p$

$$B_0(p) = \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{b^{(0)}_{\nu,k}}{p^{k+1}}$$

und hieraus, unter K_z einen hinreichend kleinen Kreis um den Nullpunkt der z-Ebene verstanden,

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{b^{(0)}_{\nu,k}}{p^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_z} \frac{B_0(p)}{z^{\nu+2}}\, dz, \qquad (\nu = 1, 2 \ldots); \tag{56a}$$

ebenso folgt für $\lambda = 0$ aus (51):

$$b^{(0)}_{\nu,0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_z} \frac{B_{00}}{z^{\nu+1}}\, dz, \qquad (\nu = 0, 1 \ldots). \tag{56b}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formel (42), in der zufolge (43) (auf $\lambda = 0$ angewandt) $b^{(0)}_{m-1,0}$ und $b^{(0)}_{m-1,k}$ statt $a^{(0)}_{m-1,0}$ und $a^{(0)}_{m-1,k}$ geschrieben werden darf, ein, so erhält man ($\nu = m-1$):

$$\bar{\mathfrak{s}}(t-\tau_m) = \frac{n!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p} \int_{C_q} \int_{K_z} \frac{e^{pT+qt}}{p^{n+1} z} \left(\frac{p}{z}\right)^m \left(\frac{z}{q} B_{00} - B_0(p)\right) dp\, dq\, dz, \tag{56c}$$

$$(t > 0),\ 1 \leqq m \leqq n.$$

Wird dies in die Gleichung (6) für $\varrho(t)$ eingesetzt, so ist im Integranden $\left(\frac{p}{z}\right)^m$ durch $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{p}{z}\right)^m = \frac{p}{n(p-z)} \left(\frac{p^n}{z^n} - 1\right)$ zu ersetzen, wobei noch der Subtrahend -1 fortgelassen werden darf; denn sein Anteil wird durch $\int_{K_z} \ldots dz$ annulliert, da $B_0(p)$ nach (52) für $z = 0$ verschwindet. Man erhält daher

$$\varrho(t) = \frac{(n-1)!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p} \int_{C_q} \int_{K_z} \frac{e^{pT+qt}}{z^{n+1}(p-z)} \left(\frac{z}{q} B_{00} - B_0(p)\right) dp\, dq\, dz, \tag{56d}$$

$$t > 0.$$

Wir nehmen nun an den Gleichungen (56d), (53a, b), (55a, b), die zusammen $\varrho(t)$ eindeutig bestimmen, einige Umformungen vor. Zunächst darf in (55a) das Glied $\frac{\delta_0^\lambda}{p-q}$ gestrichen werden; denn sein „Beitrag" zu $B_0(p)$ ist von der Form $\frac{1}{p-q} f(p, z)$ und wird daher durch $\int_{C_q} \ldots e^{qt} dq$ annulliert. Sodann ersetzen wir in allen diesen Formeln q durch $p - q$ und außerdem $p, q, z, y, p_1, \ldots, p_{s-1}$; $B_{\lambda,0}$, B_λ durch $sp, sq, sz, sy, sp_1, \ldots, sp_{s-1}$; $\frac{B_{\lambda,0}}{s}$, $\frac{B_\lambda}{s}$.

Fig. 3.

Hierdurch erhält man, mit (44), als formales Ergebnis unserer Fragestellung (C_p, C_q, K_z gemäß Fig. 3)

(57)
$$\varrho(t) = \frac{(n-1)!}{(s\,T)^n}\,\frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{C_p}\int\limits_{C_q}\int\limits_{K_z}\frac{e^{s(T+t)\,p - s\,t\,q}}{z^{n+1}\,(p-z)}\left(\frac{z}{p-q}\,B_{0\,0} - B_0(p)\right)dp\,dq\,dz,\quad (\Re(p) > \Re(q) > 0),\ t > 0.$$

(58)
$$(q-z)\,B_{\lambda,\,0}(p_1, \ldots, p_\lambda) = \frac{z}{2\pi i}\int\limits_{C^*}\varepsilon(-s\,\xi)\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{p-q-\xi-\sum\limits_1^\lambda p_i}\right)B_{\lambda+1,\,0}(p_1, \ldots, p_\lambda, \xi)\,d\,\xi + \delta_0^\lambda, \qquad 0 \leqq \lambda \leqq s-1$$

$$B_{s,\,0}(u_1, \ldots, u_s) = \sum_{\varrho=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\varrho}\sum_{1'\ldots\varrho'} B_{\varrho,\,0}(u_{1'}, \ldots, u_{\varrho'}),$$

(59)
$$(y-z)\,B_\lambda(p_1, \ldots, p_\lambda;\ y) - z\,B_{\lambda,\,0}(p_1, \ldots, p_\lambda) = \frac{z}{2\pi i}\int\limits_{C^*}\varepsilon(-s\,\xi)\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{p-y-\xi-\sum\limits_1^\lambda p_i}\right)B_{\lambda+1}(p_1, \ldots, p_\lambda, \xi; y)\,d\,\xi$$

$$-\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\varepsilon(-s\,\xi)}{p-y-\xi-\sum\limits_1^\lambda p_i}\,B_{\lambda+1}\left(p_1, \ldots, p_\lambda, \xi;\ p-\xi-\sum_1^\lambda p_i\right)d\,\xi, \quad 0 \leqq \lambda \leqq s-1$$

$$B_s(u_1, \ldots, u_s; y) = \sum_{\varrho=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\varrho}\sum_{1'\ldots\varrho'} B_\varrho(u_{1'}, \ldots, u_{\varrho'}; y).$$

II. Lösung der Integralgleichungen.

§ 1.

Der Fall $s = 1$.

Es handelt sich nunmehr darum, diese beiden Systeme linearer Integralgleichungen für hinreichend kleines $|z|$ und $\left|\frac{z}{y}\right|$ unter geeigneten Annahmen über die Verteilungsfunktion $f(t)$, und daher über $\varepsilon(z)$ (Gleichung (20a)), zu lösen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Falle $s = 1$, in welchem die Lösungen von (58) und (59) für jedes $f(t)$ in geschlossener Form geschrieben werden können. Aus (58) folgt für $s = 1$

$$(q - z)\, B_{00} = \frac{z}{2\pi i} \int_{C^*} \varepsilon(-\xi) \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{p - q - \xi}\right) B_{00}\, d\xi + 1 \quad (\Re(p - q - \xi) > 0)$$

und hieraus durch Parallelverschiebung von C^* nach $\Re(\xi) = \infty$, wo

$$\varepsilon(-\xi) = \int_{t'}^{t''} e^{-\xi t}\, df(t)$$

exponentiell verschwindet, mit (20a):

$$(q - z)\, B_{00} = z(-1 + \varepsilon(q - p))\, B_{00} + 1,$$

das ist

$$B_{00} = \frac{1}{q - z\,\varepsilon(q - p)}, \quad (\Re(p - q) > 0,\ |z| \leqslant 1),\ s = 1. \tag{60}$$

Weiter folgt für $s = 1$ aus (59)

$$(y - z)\, B_0(y) - z\, B_{00} = \frac{z}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{\varepsilon(-\xi)}{\xi} B_0(y)\, d\xi \tag{61}$$

$$+ \frac{z}{2\pi i} \int_{C} \frac{\varepsilon(-\xi)}{p - \xi - y} B_0(y)\, d\xi - \frac{z}{2\pi i} \int_{C} \frac{\varepsilon(-\xi)}{p - \xi - y} B_0(p - \xi)\, d\xi.$$

Wir denken uns hier C so gelegen, daß $\Re(p - \xi - y) > 0$ ist und erhalten dann für die Summe der ersten beiden Integrale durch

Rechtsverschiebung der Integrationskurven $z(-1+\varepsilon(y-p))\,B_0(y)$ und daher

$$(61a)\qquad (y - z\varepsilon(y-p))\,B_0(y) = z\,B_{00} - \frac{z}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon(-\xi)}{p-\xi-y}\,B_0(p-\xi)\,d\xi,\quad (\Re(p-\xi-y)>0).$$

Da die Funktionen $B_0(y)$ und B_{00}, als Taylorreihen in z und $\frac{z}{y}$, für hinreichend kleines $|z|$ und $\left|\frac{z}{y}\right|$, bzw. hinreichend kleines $|z|$ regulär sind, ist hier ersichtlich die rechte Seite, und daher

$$(61b)\qquad (y - z\varepsilon(y-p))\,B_0(y)$$

auch regulär für $|z|<c_1$, $|y|<c_2$ ($c_1>0$, $c_2>0$ und ebenso c_1', c_2', ... bezeichnen geeignete positive Konstanten). Mit $y_0(z)$ sei die einzige in der Umgebung von $z=0$, $y=0$ vorhandene Nullstelle der Gleichung

$$(62)\qquad y_0 - z\varepsilon(y_0-p) = 0,\qquad |z|\ll 1,\qquad |y|\ll 1.$$

bezeichnet; spaltet man daher von (61b) den in der Umgebung von $z=0$, $y=0$ nicht verschwindenden Faktor $\frac{y-z\varepsilon(y-p)}{y-y_0(z)}$ ab, so bleibt auch der andere Faktor

$$(63)\qquad (y-y_0(z))\,B_0(y)$$

für $|z|<c_1'$, $|y|<c_2'$ regulär. Andererseits ist die Funktion (63), zugleich mit der mit einem Gliede $\frac{1}{y}F(z)$ beginnenden Potenzreihe $B_0(y)$, auch für $|z|<c_1''$, $\left|\frac{z}{y}\right|<c_2''$ $\left(\text{das ist } |y|>\frac{|z|}{c_2''}\right)$ regulär und beschränkt; (63) ist daher für $|z|<c_1'''$ in der abgeschlossenen y-Ebene regulär und (gleichmäßig für alle diese z) beschränkt, also gleich einer „Konstanten" $F(z)$, und daher

$$(63a)\qquad B_0(y) = \frac{F(z)}{y-y_0(z)},\quad |z|<c_1''',\quad y\neq y_0(z).$$

Setzt man dies in das zweite und dritte Integral rechts in (61) ein, so folgt mit (62)

$$y\,B_0(y) - z\,B_{00} = \frac{z\,F(z)}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon(-\xi)}{p-\xi-y}\left(\frac{1}{y-y_0(z)} - \frac{1}{p-\xi-y_0(z)}\right)d\xi$$

$$= \frac{z\,F(z)}{y-y_0(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varepsilon(-\xi)}{p-\xi-y_0(z)}\,d\xi = \frac{z\,F(z)}{y-y_0(z)}\,\varepsilon(y_0-p) = \frac{y_0(z)}{y-y_0(z)}F(z)$$

und hieraus mit (63a) $F(z) = z B_{00}$, also

$$B_0(y) = \frac{z B_{00}}{y - y_0(z)}. \tag{63b}$$

Aus (60), (63b) erhält man

$$\frac{z}{p-q} B_{00} - B_0(p) = \frac{1}{q - z\varepsilon(q-p)} \frac{z}{p-q} \frac{q - y_0(z)}{p - y_0(z)}$$

und hiermit aus (57)

$$\varrho(t) = \frac{(n-1)!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p} \int_{C_q} \int_{K_z} \frac{e^{p(T+t)-qt}}{z^n (p-z)(p-q)} \cdot \frac{q - y_0(z)}{q - y_0(z)} \frac{dp\,dq\,dz}{q - z\varepsilon(q-p)}, \tag{64}$$

$$(y_0(z) - z\varepsilon(y_0 - p) = 0),\ s = 1,\ t > 0;$$

diese Formel wurde auf andere Weise in W II (Gleichung (40) für $s = 1$) abgeleitet und unter der Annahme $\frac{n}{T} = \eta = \text{const}$ für $n \to \infty$ asymptotisch entwickelt.

§ 2.

Der Fall $\varepsilon(z) = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu e^{\nu h z}$.

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß der Integrand $\frac{z}{p-q} B_{00} - B_0(p)$ von (57) auch für $s > 1$ in ähnlicher Weise, nämlich als rationale Funktion gewisser Wurzeln einer transzendenten Gleichung, dargestellt werden kann, wenn nur endlich viel kommensurable Abfertigungszeiten auftreten.

Sind also N Abfertigungszeiten $h, 2h, \ldots, Nh$, mit den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten $a_1, \ldots, a_N$, vorhanden, so gilt

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k, \quad \nu h \leqq t < (\nu+1) h \tag{65a}$$

und nach (20a)

$$\varepsilon(z) = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu e^{\nu h z}, \quad \Big(\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu = 1,\ h \sum_{\nu=1}^{N} \nu a_\nu = 1;\ a_\nu \geqq 0,\ 1 \leqq \nu \leqq N \Big). \tag{65b}$$

In dem zur Darlegung des Folgenden ausreichenden Falle $s = 2$ folgt aus (58) (u statt p_1 geschrieben)

$$(q - z) B_{00} = \frac{z}{2\pi i} \int_{C^*} \varepsilon(-2\xi) \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{p - q - \xi} \right) B_{10}(\xi)\, d\xi + 1. \tag{66a}$$

$$
\begin{aligned}
&(q-z)\,B_{10}(u)\\
&=\frac{z}{2\pi i}\int_{C^*}\varepsilon(-2\xi)\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{p-q-\xi-u}\right)\left(B_{10}(u)+B_{10}(\xi)-B_{00}\right)d\xi\\
&=z\left(\varepsilon\left(2\left(u+q-p\right)\right)-1\right)\left(B_{10}(u)-B_{00}\right)\\
&+\frac{z}{2\pi i}\int_{C^*}\varepsilon(-2\xi)\left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{p-q-\xi-u}\right)B_{10}(\xi)\,d\xi.
\end{aligned}
\tag{66b}
$$

Löst man diese Integralgleichungen für $\varepsilon(z)=\sum_1^N a_\nu e^{\nu h z}$ bei hinreichend kleinem $|z|$ durch sukzessive Approximation, so erkennt man, daß $B_{10}(u)$, gleich den approximierenden Ausdrücken, eine Potenzreihe in e^{2hu} ist. Setzt man nun in (66a, 66b)

$$
B_{00}=\beta_0;\quad B_{10}(u)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\beta_{\mu+1}e^{2\mu hu}\quad(\beta_\mu=\beta_\mu(p,q,z);\ \mu=0,1,\ldots)
\tag{67}
$$

ein und führt die Integration $\int_{C^*}\ldots d\xi$ gliedweise durch Rechts- bzw. Linksverschiebung von C^* aus, $\left(\int_{C^*}\ldots B_{10}(\xi)\,d\xi\right.$ erweist sich hierbei als nur von $\beta_1,\ldots,\beta_N$ abhängig$\Big)$ so entsteht insbesondere aus (66b) eine Identität zwischen zwei Potenzreihen in e^{2hu} und durch Gleichsetzung der beiderseitigen Koeffizienten von $e^{2\mu hu}$ $(0\leqq\mu\leqq N-1)$ erhält man $1+N$ lineare Gleichungen, in denen nur $\beta_0,\ldots,\beta_N$ auftreten; diese Gleichungen lauten

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{q}{z}-1\right)\beta_0+\sum_{\mu=0}^{N-1}\beta_{\mu+1}\sum_{\nu=\mu+1}^{N}a_\nu\left(1-e^{2(\nu-\mu)h(q-p)}\right)=\frac{1}{z};\\
&\frac{q}{z}\beta_1-\beta_0+\sum_{\mu=0}^{N-1}\beta_{\mu+1}\sum_{\nu=\mu+1}^{N}a_\nu=0,\\
&\frac{q}{z}\beta_{c+1}+\beta_0 a_c e^{2ch(q-p)}-\sum_{\mu=0}^{c-1}\beta_{\mu+1}a_{c-\mu}e^{2(c-\mu)h(q-p)}\\
&-e^{2ch(q-p)}\sum_{\mu=0}^{N-c}\beta_{\mu+1}a_{c+\mu}=0,\qquad 1\leqq c\leqq N-1.
\end{aligned}
\right.
\tag{68}
$$

Führt man die nur von y, p, z abhängige Matrix $(N+1)$-ten Grades

$$(69)\quad \mathsf{M}(y)=\begin{pmatrix} \frac{y}{z}-1 & \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu(1-\vartheta^\nu), & \sum_{\nu=2}^{N} a_\nu(1-\vartheta^{\nu-1}), & \sum_{\nu=3}^{N} a_\nu(1-\vartheta^{\nu-2}) & \dots & a_N(1-\vartheta) \\ -1 & \frac{y}{z}+1 & \sum_{\nu=2}^{N} a_\nu & \sum_{\nu=3}^{N} a_\nu & \dots & a_N \\ a_1\vartheta & -2a_1\vartheta & \frac{y}{z}-a_2\vartheta & -a_3\vartheta & \dots & -a_N\vartheta \\ a_2\vartheta^2 & -2a_2\vartheta^2 & -a_1\vartheta-a_3\vartheta^2 & \frac{y}{z}-a_4\vartheta^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N-1}\vartheta^{N-1}, & -2a_{N-1}\vartheta^{N-1}, & -a_{N-2}\vartheta^{N-2}-a_N\vartheta^{N-1}, & -a_{N-3}\vartheta^{N-3} & \dots & \frac{y}{z} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vartheta=e^{\gamma h(y-p)}$$

mit der Determinante $D(y)=\|\mathsf{M}(y)\|$ und den Minoren $M_{ik}(y)$ $(i,k=0,1,\dots,N)$ ein, so lautet das System (68), in Matrizenform geschrieben

$$(68\,\text{a})\qquad \mathsf{M}(q)\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_N\end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

und daher

$$(70)\qquad \beta_k=\frac{M_{0k}(q)}{z\,D(q)},\quad k=0,1\dots,N;$$

insbesondere ist also

$$(70\,\text{a})\qquad B_{00}=\beta_0=\frac{M_{00}(q)}{z\,D(q)}.$$

Für $s = 2$ folgt weiter aus (59)

$$(71\,a)\quad (y-z)\,B_0(y) - z\,B_{00} = \frac{z}{2\pi i}\int_{C^*} \varepsilon(-2\xi)\,B_1(\xi; y)\,\frac{d\xi}{\xi} + \frac{z}{2\pi i}\int_{C} \varepsilon(-2\xi)\,(B_1(\xi; y) - B_1(\xi; p-\xi))\,\frac{d\xi}{p-\xi-y},$$

$$(71\,b)\quad \begin{cases} (y-z)\,B_1(u; y) - z\,B_{10}(u) \\ = \frac{z}{2\pi i}\int_{C^*} \varepsilon(-2\xi)\,(B_1(u; y) + B_1(\xi; y) - B_0(y))\,\frac{d\xi}{\xi} \\ \quad + \frac{z}{2\pi i}\int_{C} \varepsilon(-2\xi)\,(B_1(u; y) - B_1(u; p-\xi-u) \\ + B_1(\xi; y) - B_1(\xi; \xi-p-u) - B_0(y) + B_0(p-\xi-u))\,\frac{d\xi}{p-\xi-u-y} \end{cases}$$

und man erkennt wie früher, daß auch $B_1(u; y)$ eine Potenzreihe in $e^{2\pi i u}$ ist, also

$$(72)\qquad B_0(y) = b_0(y);\ B_1(u; y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\mu+1}(y)\,e^{2\mu\pi i u}$$
$$(b_\mu(y) = b_\mu(p, q, z; y),\ \mu = 0, 1, \ldots).$$

Die Gleichungen (71 a, b) gehen nun, abgesehen von Gliedern, die für $|z| < c_1$, $|y| < c_2$ regulär und beschränkt sind, aus (66 a, b) bei Ersetzung von B_{00}, $B_{10}(u)$, q durch $B_0(y)$, $B_1(u; y)$, y hervor; daher gehen auch die $N+1$ Gleichungen, die aus (71 a, b), (65 b), (72) durch Gleichsetzung der beiderseitigen Koeffizienten von $e^{2\mu\pi i u}$ $(0 \leqq \mu \leqq N-1)$ folgen, abgesehen von derartigen Gliedern aus den analog gewonnenen linearen Gleichungen (68) oder (68 a) bei Ersetzung von β_μ, q durch $b_\mu(y)$, y hervor. Man hat also

$$z\,\mathfrak{M}(y)\begin{pmatrix} b_0(y) \\ \vdots \\ b_N(y) \end{pmatrix} = \mathfrak{O}(1),\ |z| < c_1,\ |y| < c_2$$

und hieraus, da die $b_\mu(y)$, zugleich mit den Funktionen (72), für $|z| < c_1'$, $\left|\frac{z}{y}\right| < c_2'$ regulär sind, nach dem schon bei Gleichung (61 a) angewandten Schlusse

$$(72\,a)\qquad b_i(y) = \sum_{k=0}^{N} \frac{d_{ik}}{y - y_k},\ (0 \leqq i \leqq N),$$

wobei die $y_k = y_k\,(p,z)$ die $N+1$ in der Umgebung von $z=0,\ y=0$ vorhandenen (als einfach vorausgesetzten) Wurzeln der Determinante von M, d. i. der Gleichung

$$D(y) = 0 \tag{73}$$

bezeichnen und die $d_{ik}(p,q,z)$ nicht mehr von y abhängen.

Setzt man nun (72), (72a) in (71a, b) ein, so darf bei der Berechnung von $\int_{C^*} \dots B_1(\xi; y)\,d\xi$ und $\int_{C^*} \dots B_1(\xi; p-\xi)\,d\xi \sum_{\mu=0}^{N-1} b_{\mu+1}(y)\,e^{2\mu h u}$ statt $\sum_{u=0}^{\infty} b_{\mu+1}(y)\,e^{2\mu h u}$ geschrieben werden, so daß z. B. $B_1(\xi, y)$ durch

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{y-y_k} \sum_{\mu=0}^{N-1} d_{\mu+1,k}\,e^{2\mu h \xi}$$

und

$$\frac{1}{p-\xi-y}\,(B_1(\xi; y) - B_1(\xi; p-\xi))$$

durch

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{y-y_k} \cdot \frac{1}{p-\xi-y_k} \sum_{\mu=0}^{N-1} d_{\mu+1,k}\,e^{2\mu h \xi},\ (\Re(p-\xi-y_k) > 0),$$

worin die inneren Summen aus den analogen früher rechts in (66a) eingesetzten Ausdrücken durch die Substitution $(\beta_{\mu+1} : d_{\mu+1,k})$ und $(q : y_k)$ hervorgehen, zu ersetzen ist; hiermit folgt z. B. aus (71a)

$$(y-z) \sum_{k=0}^{N} \frac{d_{0k}}{y-y_k} - z\,B_{00}$$

$$= -z \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{y-y_k} \sum_{\mu=0}^{N-1} d_{\mu+1,k} \sum_{\nu=\mu+1}^{N} a_\nu (1 - e^{(\nu-\mu)2h(y_k-p)})$$

und weiter, wenn in dieser in y identisch erfüllten Gleichung

$$y - z = (y - y_k) + (y_k - z)$$

zerlegt wird,

$$\left(\frac{y_k}{z} - 1\right) d_{0k} + \sum_{\mu=0}^{N-1} d_{\mu+1,k} \sum_{\nu=\mu+1}^{N} a_\nu (1 - e^{(\nu-\mu)2h(y_k-p)}) = 0,\ (0 \leqq k \leqq N);$$

$$\sum_{k=0}^{N} d_{0k} = z\,B_{00} = z\,\beta_0.$$

Die $d_{\mu,k}$ befriedigen also, wie auch aus der Herleitung der letzten Relationen von vornherein erhellt, die aus der aus (66a) entstandenen ersten Gleichung (68) durch die Substitution $(q : y_k)$ und Streichung der rechten Seite entstehenden Gleichungen, und das Einsetzen von (72), (72a) in (71b), nebst Gleichsetzung der beiderseitigen Koeffizienten von

$c^{2\mu h u}$, ergibt ebenso, daß die $d_{\mu,k}$ auch den weiteren durch die Substitution $(q:y_k)$ aus (68) oder (68a) entstehenden Gleichungen genügen, also

$$\mathsf{M}(y_k)\begin{pmatrix} d_{0k} \\ \vdots \\ d_{Nk} \end{pmatrix} = 0, \quad (0 \leqq k \leqq N); \tag{74a}$$

$$\sum_{k=0}^{N} d_{ik} = z\beta_i \quad (0 \leqq i \leqq N). \tag{74b}$$

Setzt man voraus, daß nicht alle Minoren der ersten Zeile von $\mathsf{M}(y_k)$ verschwinden, so folgt aus (74a)

$$d_{ik} = \varepsilon_k M_{0i}(y_k), \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, N) \tag{75a}$$

und hieraus mit (74b) für die Proportionalitätsfaktoren ε_k

$$\sum_{k=0}^{N} \varepsilon_k M_{0i}(y_k) = z\beta_i \qquad (0 \leqq i \leqq N)$$

oder mit der Matrix

$$\{M_{0i}(y_k)\} \quad i, k = 0, 1, \ldots, N \ (i \text{ Zeilen-}, \ k \text{ Spaltenindex}) \tag{75b}$$

und mit (70)

$$\{M_{0i}(y_k)\}\begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix} = \frac{1}{D(q)}\{M_{0i}(y_k)\}^{-1}\begin{pmatrix} M_{00}(q) \\ \vdots \\ M_{0N}(q) \end{pmatrix}; \tag{75c}$$

daraus ergibt sich das gesuchte $B_0(y) \equiv b_0(y)$ mit (72a), (75a) $(i = 0)$ als Matrizenprodukt

$$B_0(y) = \frac{1}{D(q)}\left(\frac{1}{y-y_0}M_{00}(y_0), \ldots, \frac{1}{y-y_N}M_{00}(y_N)\right)\{M_{0i}(y_k)\}^{-1}\begin{pmatrix} M_{00}(q) \\ \vdots \\ M_{0N}(q) \end{pmatrix} \tag{76}$$

und für den uns interessierenden Integrandenfaktor von (57) folgt mit (70a)

$$\frac{z}{p-q}B_{00} - B_0(p) = \frac{1}{p-q}\frac{M_{00}(q)}{D(q)} - \frac{1}{D(q)}\left(\frac{1}{p-y_0}M_{00}(y_0), \ldots, \frac{1}{p-y_N}M_{00}(y_N)\right)\{M_{0i}(y_k)\}^{-1}\begin{pmatrix} M_{00}(q) \\ \vdots \\ M_{0N}(q) \end{pmatrix}. \tag{77}$$

Dadurch ist unsere Aufgabe im Falle $s = 2$, $\varepsilon(z) = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu e^{\nu h z}$ auf die Berechnung der Matrix (69), ihrer Minoren M_{ik} und der Nullstellen der Gleichung (73) zurückgeführt.

Multipliziert man (69) von rechts mit der einspaltigen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\vartheta} \\ 1 \\ \sqrt{\vartheta}\,(1-\sqrt{\vartheta}) \\ \vdots \\ \vartheta^{\frac{N-1}{2}}\,(1-\sqrt{\vartheta}) \end{pmatrix},$$

so entsteht eine Spalte, deren sämtliche Elemente durch

$$\frac{y}{z} - \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu\, \vartheta^{\nu/2} = \frac{y}{z} - \varepsilon\,(y-p) \tag{78}$$

teilbar sind; daher ist die Determinante $D(y) = \|\mathsf{M}(y)\|$ durch (78) $\left(\text{und ebenso durch } \frac{y}{z} - \sum_{\nu=1}^{N} (-1)^\nu a_\nu e^{\nu h (y-p)}\right)$ teilbar.

Es ist leicht zu erkennen, daß die letzten Entwicklungen fast ungeändert auf den Fall $s > 2$ übertragen werden können. Setzt man in diesem Falle in (58) für die $B_{\lambda,0}\,(0 \leqq \lambda \leqq s-1)$ Potenzreihen in den $e^{s h p_\nu}$ ein und setzt die beiderseitigen Koeffizienten von $e^{s h \sum_{k=1}^{\lambda} \nu_k p_k}$ $(0 \leqq \nu_1 \leqq \ldots \leqq \nu_\lambda \leqq N-1)$ einander gleich, so erhält man $\binom{N+s-1}{s-1}$ in den ersten Koeffizienten der $B_{\lambda,0}$ lineare Gleichungen. Die letzten Formeln, insbesondere Gleichung (77) $\left(\text{mit } \binom{N+s-1}{s-1} \text{ statt } N+1\right)$, bleiben nun gültig, wenn man $\mathsf{M}(y)$, $D(y)$, $M_{ik}(y)$, y_k auf die Koeffizientenmatrix des eben erwähnten Gleichungssystems bezieht. Man findet auch wieder, daß die Determinante $D(y)$ den Teiler (78) besitzt; für die zugehörige für $z \approx 0$ reguläre einfache Nullstelle $y_0(p,z)$ von $D(y)$ gilt dann

$$y_0 - z\,\varepsilon(y_0 - p) = 0 \tag{78a}$$

und daher (wegen $\varepsilon(0) = 1$)

$$y_0(z,z) = z. \tag{78b}$$

Für die Anwendungen am wichtigsten ist der Grenzfall $n = \infty$; setzt man in (57), (77) zunächst, so wie in W I, II,

$$\frac{n}{s\,T} = \text{const} = \eta \quad (\text{„zeitlicher Ausnutzungsgrad“}) \tag{79}$$

so kann der Grenzübergang $n \to \infty$ wie in W I, § 9; W II, §§ 3, 4 ausgeführt werden. Wir skizzieren daher hier nur den weiteren Gang der Rechnung unter Verzicht auf Beweise und unter Beschränkung auf den Fall

$$0 \leqq \eta < 1. \tag{79a}$$

Verschiebt man in (57), (77) die Kurve C_p parallel nach $\Re(p) = -\infty$, so wird $\int_{C_p} \dots dp$ gleich einer Summe von unendlich viel Residuen und Verzweigungsintegralen, und Abschätzungen, die in gleicher Weise wie in der erwähnten Arbeit vorzunehmen sind, zeigen, daß für $n \to \infty$ die Residuen in den Polen $p = q$ und $p = z$ gleich $O(1)$, die Summe der übrigen Bestandteile aber $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Für das Residuum von (77), das ist von $\frac{z}{p-q} B_{00}$, an der Stelle $p = q$ folgt aus (58) $(\lambda = 0)$ $\frac{z}{q-z}$ und hiermit für den zugehörigen Anteil von (57)

$$\frac{(n-1)!}{(s\,T)^n} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_q} \int_{K_z} \frac{e^{s\,q\,T}}{z^{n+1}\,(q-z)} \frac{z}{q-z}\, dq\, dz = 1$$

Die Stelle $p = z$ ist wegen (78b) ein einfacher Pol des Faktors $\frac{1}{p - y_0}$ in (77) und daher ein Pol zweiter Ordnung des Integranden von (57); das zugehörige Residuum hat die Gestalt

$$\frac{n!}{(s\,T)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_z} \frac{e^{z\,s\,T}}{z^{n+1}} \left(F(z) + \frac{1}{n} G(z)\right) dz$$

und ergibt sich, mit (79), (79a) nach der Sattelpunktsmethode entwickelt, als gleich $F(\eta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Für $n = \infty$ erhält man so, wenn

$$\mathsf{P}(t) = \lim_{n=\infty} \varrho(t) \tag{80}$$

gesetzt, $D(q, p, z)$ usw. statt $D(q)$ usw. geschrieben, und in $\int_{C_q} \dots dq$ noch q durch ηq ersetzt wird.

$$\mathsf{P}(t) = 1 - \frac{(1-\eta)\, M_{00}(\eta, \eta, \eta)}{\| M_{0i}(y_k, \eta, \eta) \|} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{s\,\eta\,t\,(1-q)}}{D(q, \eta, \eta)} \tag{81}$$

$$\begin{vmatrix} M_{00}(q, \eta, \eta), M_{00}(y_1, \eta, \eta), \dots M_{00}(y_{N_1}, \eta, \eta) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ M_{0\,N_1}(q, \eta, \eta), M_{0\,N_1}(y_1, \eta, \eta), \dots, M_{0\,N_1}(y_{N_1}, \eta, \eta) \end{vmatrix} dq, \quad t > 0;$$

$$\left(N_1 = \binom{N+s-1}{s-1} - 1\right)$$

hierin bezeichnen C die Gerade $\Re(q) = 1 + 0$ und $y_k(\eta)$ die $N_1 + 1$ für $\eta \to 0$ regulären Wurzeln der Gleichung $D(y, \eta, \eta) = 0$, und das von η unabhängige $M_{00}(\eta, \eta, \eta)$ ist als $\neq 0$ vorausgesetzt (dies bedeutet im wesentlichen, daß in (65a, b) nicht bloß $a_a, a_{2a}, \dots > 0$ sein sollen).

Um aus (81) $\mathsf{P}(0) = \lim_{t=+0} \mathsf{P}(t)$ zu erhalten, verschiebe man C in das Gebiet $\Re(q) < 0$, wobei nur der einfache Pol $q = 1$, mit dem

Residuum 1, überstrichen wird; entwickelt man sodann den zweiten Integrandenfaktor, als rationale Funktion von q und $e^{s\,h\,q}$ betrachtet, in eine Potenzreihe nach $\frac{1}{q}$

$$\left(\frac{1}{D(q,\eta,\eta)}\left|\begin{array}{c} M_{00}(q,\eta,\eta)\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right| = \frac{z}{q}\,\|M_{0i}(y_k,\eta,\eta)\|_{i,k\geqq 1} + \frac{c_2(e^{s\,h\,q})}{q^2} + \cdots\right),$$

und übt gliedweise die Operation $\lim\limits_{t=+0}\int\limits_{C_q}\ldots e^{q\,t}\,dq$ aus, so folgt

$$\text{(81 a)}\qquad \mathsf{P}(0) = (1-\eta)\,M_{00}(\eta,\eta,\eta)\,\frac{\|M_{0i}(y_k\,\eta,\eta)\|_{i,k\geqq 1}}{\|M_{0i}(y_k,\eta,\eta)\|_{i,k\geqq 0}}.$$

Ähnlich ergibt sich z. B. die mittlere Wartezeit

$$\int\limits_0^\infty t\,d\,\mathsf{P}(t)\left(=\lim_{n=\infty}\int\limits_0^\infty t\,d\,\varrho(t)\right) = \int\limits_0^\infty (1-\mathsf{P}(t))\,dt$$

als Residuum im Pole (zweiter Ordnung) $q=1$ des formal von 0 bis ∞ nach dt integrierten Integranden von (81).

§ 2a.

Der Fall $\varepsilon(z) = e^z$.

Als Beispiel bestimmen wir den Integranden (77) für den einfachsten hierhergehörigen Fall des Vorhandenseins einer einzigen Abfertigungszeit ($=1$); in (65a, b) ist dann zu setzen $N=1$, $a_1=1$, $h=1$ und

$$\text{(82)}\qquad \varepsilon(z) = e^z.$$

Setzt man in Anwendung des eben Ausgeführten in (58) für die $B_{\lambda,0}(p_1,\ldots,p_\lambda)$ $(0\leqq\lambda\leqq s-1)$ Potenzreihen in $e^{s\,p_1},\ldots,e^{s\,p_\lambda}$, mit dem bzw. Anfangsglied β_λ $(\beta_0 = B_{00})$ ein, so folgt für die konstanten Glieder der so entstehenden Identitäten in den $e^{s\,p_\nu}$:

$$(q-z)\,\beta_0 = z\,(e^{s(q-p)}-1)\,\beta_1 + 1;\quad (q-z)\,\beta_\lambda = -z\,\beta_{\lambda+1},\quad 1\leqq\lambda\leqq s-2;$$

$$(q-z)\,\beta_{s-1} = -z\sum_{\varrho=0}^{s-1}(-1)^{s-1-\varrho}\binom{s}{\varrho}\beta_\varrho$$

und hieraus

$$\text{(83)}\qquad B_{00} \equiv \beta_0 = \frac{1}{q^s - z^s e^{s(q-p)}}\cdot\frac{q^s - z^s}{q-z};$$

$$\beta_\lambda = \frac{z^{s-\lambda}(z-q)^{\lambda-1}}{q^s - z^s e^{s(q-p)}},\quad 1\leqq\lambda\leqq s-1.$$

Es ist hier daher $N_1 = \binom{N+s-1}{s-1} = s$ und (siehe (70))

$$(83\,a)\quad D(q) = \left(\frac{q}{z}\right)^s - e^{s(q-p)};\quad M_{00}(q) = \frac{\left(\frac{q}{z}\right)^s - 1}{\frac{q}{z} - 1};\quad M_{0\lambda}(q) = \left(1 - \frac{q}{z}\right)^{\lambda-1}$$

$$(1 \leqq \lambda \leqq s-1),$$

und mit diesen $M_{0\lambda}$ folgt für das rechts in (76) enthaltene Matrizenprodukt

$$\{M_{0i}(y_k)\}^{-1} \begin{pmatrix} M_{00}(q) \\ \vdots \\ M_{0,s-1}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \prod\limits_{\nu \neq i} \dfrac{q-y_\nu}{y_i - y_\nu} \\ \vdots \end{pmatrix},$$

da hier das i-te Glied der letzten Spalte ein Polynom $(s-1)$-ten Grades in q ist, das für $q = y_i$ gleich 1 wird und für alle anderen y_ν verschwindet. Aus (76), (83 a) folgt hiermit weiter, mit $\Pi(q) = \prod\limits_{\nu=0}^{s-1}(q - y_\nu)$:

$$\begin{aligned} B_0(y) &= \frac{z^{1-s}}{D(q)} \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{y - y_i} \frac{y_i^s - z^s}{y_i - z} \prod_{\nu \neq i} \frac{q - y_\nu}{y_i - y_\nu} \\ &= \frac{z^{1-s}}{D(q)} \prod_{\nu=0}^{s-1}(q - y_\nu) \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{y - y_i} \cdot \frac{1}{q - y_i} \cdot \frac{1}{\Pi'(y_i)} \cdot \frac{y_i^s - z^s}{y_i - z} \\ &= \frac{z^{1-s}}{D(q)} \frac{\Pi(q)}{q - y} \sum_{i=0}^{s-1} \left(\frac{1}{y - y_i} - \frac{1}{q - y_i}\right) \frac{1}{\Pi'(y_i)} \frac{y_i^s - z^s}{y_i - z} \\ &= \frac{z^{1-s}}{D(q)} \frac{\Pi(q)}{q - y} \left(\frac{1}{\Pi(y)} \frac{y^s - z^s}{y - z} - \frac{1}{\Pi(q)} \frac{q^s - z^s}{q - z}\right), \end{aligned}$$

$$(84)\quad B_0(p) = \frac{z^{1-s}}{D(q)} \frac{p^s - z^s}{p - z} \cdot \frac{1}{q - p} \prod_{\nu=0}^{s-1} \frac{q - y_\nu}{p - y_\nu} - \frac{z^{1-s}}{D(q)} \frac{q^s - z^s}{q - z} \cdot \frac{1}{q - p}$$

und hieraus mit (83), (83 a)

$$\frac{z}{p - q} B_{00} - B_0(p) = \frac{z}{q^s - z^s e^{s(q-p)}} \frac{p^s - z^s}{p - z} \frac{1}{p - q} \prod_{\nu=0}^{s-1} \frac{q - y_\nu}{p - y_\nu}.$$

Aus (57) folgt so

$$(85)\quad \varrho(t) = \frac{(n-1)!}{T^n} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_p} \int_{C_q} \int_{K_z} \frac{e^{s(T+t)p - stq}}{z^n (p - q)} \frac{p^s - z^s}{(p - z)^2} \prod_{\nu=0}^{s-1} \frac{q - y_\nu}{p - y_\nu} \frac{dp\,dq\,dz}{q^s - z^s e^{s(q-p)}}$$

$$(\Re(p) > \Re(q) > 0;\ \varepsilon(z) = e^z),\quad t > 0.$$

worin die $y_\nu(p,q)$ $(0 \leqq \nu \leqq s-1)$ die für $z=0$ regulären Lösungen der Gleichung $D(y)=0$, das ist

$$y^s - z^s e^{s(y-p)} = 0 \tag{85a}$$

bezeichnen; diese Formel wurde (unwesentlich modifiziert und $n \equiv 0$, mod s vorausgesetzt[4])) in W II, Gleichung (31), auf einem anderen Wege gewonnen, davon ausgehend, daß bei konstanter Abfertigungszeit ($t_\nu = 1$; $\nu = 1, 2, \ldots$) aus (7b) folgt:

$$\tau_m = \left(\mathrm{Max}\left(x_{m-ts} + i - x_m;\quad 1 \leqq i \leqq \left[\frac{m-1}{s}\right]\right)\right).$$

Für $N > 1$ erhält man für $\varrho(t)$ und $\mathsf{P}(t)$ umständliche Ausdrücke; z. B. folgt aus (81) im nächsteinfachen Falle $N=2$, $s=2$, wobei also

$$\varepsilon(z) = a_1 e^{hz} + a_2 e^{2hz} \qquad (a_1 + a_2 = 1,\quad h(a_1 + 2a_2) = 1)$$

ist, nach einigen Vereinfachungen

$$\mathsf{P}(t) = 1 - \frac{2(1-\eta)}{k}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(q)=1+0} \frac{e^{2\eta t(1-q)}}{(q-a_1\vartheta-a_2\vartheta^2)(q+a_1\vartheta-a_2\vartheta^2)(q+a_2\vartheta^2)} \cdot \begin{vmatrix} q^2-q, & q_1^2-q_1, & q_2^2-q_2 \\ q-a_2^2\vartheta^2, & q_1-a_2^2\vartheta_1^2, & q_2-a_2^2\vartheta_2^2 \\ \vartheta^2(q-1), & \vartheta_1^2(q_1-1), & \vartheta_2^2(q_2-1) \end{vmatrix} dq, \tag{86}$$

$$(s=2,\quad \varepsilon(z) = a_1 e^{hz} + a_2 e^{2hz}),\quad t > 0;$$

hierin ist zur Abkürzung

$$\vartheta = e^{\eta h(q-1)},\quad \vartheta_1 = e^{\eta h(q_1-1)},\quad \vartheta_2 = e^{\eta h(q_2-1)}$$

und

$$k = (1-q_1)(1-q_2)(\vartheta_1^2 q_2 - \vartheta_2^2 q_1)$$

gesetzt; $q_1(\eta)$ bzw. $q_2(\eta)$ sind die für $\eta = 0$ regulären Lösungszweige der Gleichung

$$q + a_1 e^{\eta h(q-1)} - a_2 e^{2\eta h(q-1)} = 0$$

bzw.

$$q + a_2 e^{2\eta h(q-1)} = 0.$$

Entsprechend folgt aus (81a)

$$\mathsf{P}(0) = \frac{2(1-\eta)}{k}\begin{vmatrix} q_1 - a_2^2\vartheta_1^2, & q_2 - a_2^2\vartheta_2^2 \\ \vartheta_1^2(q_1-1), & \vartheta_2^2(q_2-1) \end{vmatrix} \tag{86a}$$

---

[4]) Die Angabe der Anmerkung [2]) von W II, die Formeln der dortigen §§ 2, 3 [insbesondere Gleichung (31)] blieben auch für $n \not\equiv 0$, mod s gültig, ist als irrig zu streichen.

§ 3.

Der Fall eines rationalen $\varepsilon(z)$.

Ebenso wie für die Funktionen (65 a, b) können die Lösungen unserer Integralgleichungen auch für die Verteilungsfunktionen $f(t)$ von der Gestalt

$$f(t) = 1 + \Re \sum_{i,k=0}^{N} \alpha_{ik} t^i e^{-a_k t} \qquad (\Re(a_k) > 0), \quad 0 \leqq t \leqq \infty \tag{87}$$

in geschlossener Form dargestellt werden. Die Laplacetransformierte $\varepsilon(z)$ (Gleichung (20 a)) von (87) ist ersichtlich eine rationale Funktion vom Gesamtgrade $\leqq -1$, mit reellen Koeffizienten und Polen von positivem Realteil; umgekehrt folgt aus dem Fouriertheorem

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varepsilon(-z) e^{zt} dz \qquad (0 < t \leqq \infty), \tag{87 a}$$

daß jedes derartige rationale $\varepsilon(z)$ durch ein $f(t)$ von der Gestalt (87) erzeugt wird.

Für alle *derartigen* rationalen $\varepsilon(z)$ werden nun die Integralgleichungen (58), (59) zu Funktionalgleichungen, deren für hinreichend kleines $|z|$ und $\left|\frac{z}{y}\right|$ reguläre Lösungen, insbesondere also B_{00} und $B_0(y)$, algebraisch in z und rational in y (sowie in den übrigen Variablen) sind.

Um dies zu zeigen, nehmen wir $f(t)$ in der einfacheren Gestalt

$$f(t) = 1 - \sum_{\nu=1}^{N} \frac{A_\nu}{a_\nu} e^{-a_\nu t} \qquad (\Re(a_\nu) > 0), \tag{88 a}$$

$$\left(\text{mit } \sum_{\nu=1}^{N} \frac{A_\nu}{a_\nu} = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{N} \frac{A_\nu}{a_\nu^2} = 1 \quad \text{gemäß (1 a, b)}\right)$$

an; die a_ν, A_ν seien so gewählt, daß $f(t)$ reell und monoton ist und daher muß insbesondere zu jedem komplexen a_ν, A_ν auch das konjugiert-komplexe $\bar{a}_\nu, \bar{A}_\nu$ vorhanden sein.

Aus (20 a) folgt dann

$$\varepsilon(z) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{A_\nu}{a_\nu - z}; \tag{88 b}$$

setzt man dies in die für $s = 2$ geltenden Gleichungen (66 a, b) ein, und verschiebt C^* nach $\Re(\xi) = -\infty$, wo ja $B_{10}(\xi)$ nach Früherem gleich $O(1)$ ist, so erhält man

$$(89\,a)\qquad (q-z)\,B_{00} = z\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{1}{2p-2q+a_\nu}-\frac{1}{a_\nu}\right)A_\nu B_{10}\left(-\frac{a_\nu}{2}\right)+1, \qquad \Re(p-q)>0,$$

$$(89\,b)\qquad \left(q-z\,\varepsilon\left(2\left(u+q-p\right)\right)\right)B_{10}(u)+z\left(\varepsilon\left(2\left(u+q-p\right)\right)-1\right)B_{00} = z\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{1}{2p-2q-2u+a_\nu}-\frac{1}{a_\nu}\right)A_\nu B_{10}\left(-\frac{a_\nu}{2}\right), \qquad \Re(p-q-u)>0.$$

Wird nun in (89 b) $u = -\frac{a_1}{2}, \ldots, -\frac{a_N}{2}$ gesetzt, so entstehen, zusammen mit (89 a), $N+1$ lineare Gleichungen für

$$B_{00},\ B_{10}\left(-\tfrac{a_1}{2}\right), \ldots,\ B_{10}\left(-\tfrac{a_N}{2}\right).$$

Bezeichnet $\mathsf{M}(y)$ jetzt die Matrix

$$(90)\quad \mathsf{M}(y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{z}-1, & A_1\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2p-2y+a_1}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A_N\left(\frac{1}{a_N}-\frac{1}{2p-2y+a_N}\right) \\ \varepsilon(2y-2p-a_1)-1, & \frac{y}{z}-\varepsilon(2y-2p-a_1)+A_1\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2p-2y+2a_1}\right), \ldots A_N\left(\frac{1}{a_N}-\frac{1}{2p-2y+a_1+a_N}\right) \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon(2y-2p-a_N)-1, & A_1\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2p-2y+a_1+a_N}\right), \ldots \frac{y}{z}-\varepsilon(2y-2p-a_N)+A_N\left(\frac{1}{a_N}-\frac{1}{2p-2y+2a_N}\right) \end{pmatrix}$$

und werden $M_{0k}(y)$ und $D(y)$ auf *diese* Matrix bezogen, so gelten die Gleichungen (70, 70 a) mit $B_{00}, \ldots, B_{10}\left(-\frac{a_N}{2}\right)$ statt $\beta_0, \ldots, \beta_{N+1}$; durch Rechtsmultiplikation von (90) mit der Spalte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p-y+\frac{a_1}{2}}{p-y+a_1} \\ \vdots \\ \frac{p-y+\frac{a_N}{2}}{p-y+a_N} \end{pmatrix}$$

findet man, daß wieder $D(y) = \|\mathsf{M}(y)\|$ durch $y - z\,\varepsilon(y-p)$ teilbar ist.

Man erkennt leicht, daß auch die weiteren, die Gleichungen (71 a, b) betreffenden Formeln auf den Fall eines $\varepsilon(z)$ gemäß Gleichung (88 b) zu übertragen sind, wobei man unter den y_k diejenigen $N+1$, zunächst als einfach vorausgesetzten, Wurzeln der Determinante von (90) zu verstehen hat, welche für hinreichend kleines $|z|$ gleich $O(z)$ sind. Auch jetzt kann alles ungeändert auf den Fall $s > 2$ übertragen werden, wobei es sich um die Auflösung des linearen Gleichungssystems handelt, dem die $N_1 + 1 = \sum_{\lambda=0}^{s-1} \binom{N+\lambda-1}{\lambda} = \binom{N+s-1}{s-1}$ Größen $B_{\lambda,0}(a_{\lambda'}, \ldots, a_{\lambda'})$ $(a_{\lambda'}, \ldots, a_{\lambda'}$ durchlaufen alle Kombinationen mit Wiederholungen aus $a_1, \ldots, a_N)$ genügen, und unter $\mathsf{M}(y)$ usw. nunmehr die Matrix usw. des letztgenannten Gleichungssystems zu verstehen ist. In diesem Sinne gilt wieder Gleichung (77) mit N_1 statt N, wobei die Wurzeln y_k von $D(y) = 0$ als einfach vorausgesetzt sind; ist eine der uns interessierenden Nullstellen von $D(y)$ mehrfach, z. B.

$$y_k = y_{k+1} = \ldots = y_{k+\varrho},$$

so ist, wie man leicht bestätigt, in (77)

$$\frac{1}{p - y_{k+\nu}} M_{00}(y_{k+\nu}) \quad \text{und} \quad M_{0i}(y_{k+\nu})$$

durch

$$\frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu} \frac{M_{00}(y)}{p-y}\bigg|_{y=y_k} \text{ und } \frac{\partial^\nu M_{0i}(y)}{\partial y^\nu}\bigg|_{y=y_k} \quad (1 \leqq \nu \leqq \varrho)$$

zu ersetzen. Ebenso hat man, um auch den allgemeinen Fall (87) zu umfassen, in (88 b) und den folgenden Gleichungen mehrere Pole a_k zusammenrücken zu lassen, was auf Differentiationen der Endformeln nach gewissen Parametern hinauskommt.

Als Beispiel nehmen wir den Fall der einfachsten Funktion (88 a), nämlich $N = 1$, und daher $a_1 = A_1 = 1$, also

$$f(t) = 1 - e^{-t} \quad (0 \leqq t \leqq \infty), \quad \varepsilon(z) = \frac{1}{1-z}. \tag{91}$$

Für dieses $\varepsilon(z)$ folgt aus (58), wenn noch $p_1 = \ldots = p_{s-1} = -\frac{1}{s}$ gesetzt und $B_{\lambda,0}\left(-\frac{1}{s}, \ldots, -\frac{1}{s}\right) = \beta_\lambda$ geschrieben wird,

$$(q-z)\beta_\lambda = z\left(-1 + \frac{1}{s(p-q)+\lambda+1}\right)\beta_{\lambda+1} + \delta_0^\lambda \quad (0 \leqq \lambda \leqq s-2),$$

$$(q-z)\beta_{s-1} = z\left(-1 + \frac{1}{s(p-q+1)}\right)\sum_{\varrho=0}^{s-1} (-1)^{s-1-\varrho}\binom{s}{\varrho}\beta_\varrho$$

und hieraus

$$(92) \qquad \beta_i = \frac{p-q+\frac{i}{s}}{q(p-q+1)-z}\,\frac{z^{s-i}(z-q)^{i-1}}{q^{s-1}} + \frac{\delta_0^i}{q-z}, \quad 0 \leqq i \leqq s-1$$

und daher (siehe (70))

$$(92\,a) \quad \begin{cases} D(q) = q^{s-1}(q(p-q+1)-z) \\ \qquad\qquad (= (p-q+1)\,q^{s-1}(q-z\,\varepsilon(q-p))); \\ M_{00}(q) = (p-q)\,\frac{q^s-z^s}{q-z} + q^{s-1}; \\ M_{0i}(q) = \left(p-q+\frac{i}{s}\right)z^{s-i}(z-q)^{i-1}, \qquad (1 \leqq i \leqq s-1). \end{cases}$$

Diejenigen $\binom{N+s-1}{s-1} = s$ Nullstellen von $D(y)$, welche für $z \to 0$ $O(z)$ sind, lauten daher

$$(93) \qquad y_0(p,z) = \frac{p+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - z}, \quad y_1 = \ldots = y_{s-1} = 0.$$

Für diese M_{0i} und y_k ergibt die, entsprechend dem eben Ausgeführten, für den Fall mehrfacher Nullstellen von $D(y)$ modifizierte Formel (77) nach elementarer Rechnung

$$(94) \qquad \begin{aligned} &\frac{z}{p-q}B_{00} - B_0(p) = \frac{z}{(p-q)(p-z)} - \frac{z}{p-z}\cdot\frac{z-p\,y_0+q\,y_0-y_0}{q(p-q+1)-z} \\ &\cdot\left\{\sum_{k=0}^{s-1}\frac{\left(p-z+\frac{1}{s}\right)\ldots\left(p-z+\frac{k}{s}\right)}{z^k}\left[\binom{s-1}{k} - \frac{y_0}{z}\,\frac{s-1}{s}\binom{s-2}{k}\right]\right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Wir setzen dies in (57) ein und nehmen darin noch $0 < \Re(C_q) < 1$; verschiebt man sodann C_p nach links, so liefern für $n \to \infty$ wieder nur die Pole $p = q$ (mit dem Residunm 1) und $p = z$ ($y_0(z,z) = z$) Beiträge $O(1)$ zu $\varrho(t)$, und man erhält, mit (79), (80), wenn wieder die Sattelpunktsmethode und -formel benutzt wird, im lim $n = \infty$:

$$\mathsf{P}(t) = 1 - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_q}\frac{e^{s\,t\,(\eta-q)}}{1-q}\,\eta\left(\sum_{k=0}^{s-1}\frac{k!}{(s\,\eta)^k}\left[\binom{s-1}{k} - \frac{s-1}{s}\binom{s-2}{k}\right]\right)^{-1} dq,$$

$$0 < \eta < 1, \qquad t > 0,$$

und hieraus durch Rechtsverschiebung von C_q die bereits bekannte Formel[5])

$$\mathsf{P}(t) = 1 - \frac{e^{-st(1-\eta)}}{\sum_{k=0}^{s-1} \binom{s-1}{k} \frac{(k+1)!}{(s\eta)^{k+1}}}, \tag{95}$$

$$(\eta < 1; \quad s \geqq 1, \quad t \geqq 0; \quad f(t) = 1 - e^{-t}).$$

In den beiden letzten Abschnitten wurde gezeigt, wie $\varrho(t)$ und $\mathsf{P}(t)$ für die beiden Klassen (65a) und (87) von Verteilungsfunktionen $f(t)$ für jedes s in endlich viel Schritten zu gewinnen sind; unter den Fragen, deren Beantwortung noch aussteht, erwähnen wir die, bei uns für die beiden einfachsten Fälle erledigte, nach der Abhängigkeit dieser Funktionen von s bei festgehaltenem $f(t)$ und die Frage nach dem Verhalten von $\mathsf{P}(t)$ für $s \to \infty$, $\eta \to 1$.

[5]) Vgl. z. B. E. C. Molina, Application of the theory of probability to telephone trunking problems ..., Bell Syst. Techn. Journ. 6 (1927), S. 461—494, wo jedoch dem aus (95) für $\mathsf{P}(0)$ folgenden Ausdrucke irrtümlich für beliebiges $f(t)$ Geltung zugesprochen wird.

(Eingegangen am 17. Mai 1933.)

The minima of positive definite Hermitian binary quadratic forms.

By

A. Oppenheim at Singapore.

1. In recent papers Speiser[1]) and Perron[2]) have discussed the minima of positive definite Hermitian binary quadratic forms in variables which are integers in a quadratic field. Speiser obtains precise results for the fields $R(i\sqrt{m})$ in which m is 1 or 3, and Perron obtains precise results for those fields in which m has the values

$$1, 2, 3, 7, 11, 19.$$

By regarding an Hermitian quadratic form in two variables which are integers in a quadratic field as a quadratic form in four rational integral variables, and using the classical theorem of Korkine and Zolotareff on the minima of definite quaternary quadratic forms, it turns out to be possible to obtain a precise result applicable to a fairly large class of values of m, including even fields in which the class-number is greater than unity. This point of view has already been adopted in the corresponding problem for indefinite Hermitian binary quadratic forms[3]).

2. Consider the Hermitian binary quadratic form

$$f = a(x + \bar{\alpha} y)(\bar{x} + \alpha \bar{y}) + \frac{\Delta}{a} y \bar{y} \tag{1}$$

where a, Δ are real, and the bar denotes the conjugate complex number. Its determinant is Δ; it is positive definite if

$$a > 0, \quad \Delta > 0. \tag{2}$$

---

[1]) A. Speiser, Über die Minima Hermitescher Formen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 167 (1932), S. 88—97.

[2]) O. Perron, Über das Minimum positiver Hermitescher Formen, Math. Zeitschr. 36 (1932), S. 148—160. The reference to Speiser's paper is derived from Perron's.

[3]) A. Oppenheim, The lower bounds of indefinite Hermitian quadratic forms, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series 3 (1932), S. 10—14. The results of this paper hold for $R(i)$. I have since obtained results for $R(\sqrt{m})$ for certain classes of values of m.

Let its lower bound, when x, y are integers in $R(i\sqrt{m})$, the pair 0,0 excepted, be L. Since integers in this field are of the form

$$p_1 + p_2(\lambda + \mu i\sqrt{m}) \tag{3}$$

where p_1, p_2 are rational integers and

$$\begin{aligned} &\lambda = \mu = \tfrac{1}{2} && \text{if } m \equiv 3 \pmod 4, \\ &\lambda = 0,\ \mu = 1 && \text{if } m \not\equiv 3 \pmod 4, \end{aligned} \tag{4}$$

it is clear that L is also the lower bound of the quaternary quadratic form

$$\Phi = a(X_1^2 + \mu^2 m X_2^2) + \frac{\Delta}{a}(Y_1^2 + \mu^2 m\, Y_2^2) \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \lambda x_2 + (\alpha_1 + \lambda\alpha_2)(y_1 + \lambda y_2) + \mu^2 m \alpha_2 y_2, \\ X_2 &= x_2 - \alpha_2 y_1 + \alpha_1 y_2, \\ Y_1 &= y_1 + \lambda y_2, \\ Y_2 &= y_2, \\ &(\alpha = \alpha_1 + \alpha_2(\lambda + \mu i\sqrt{m})) \end{aligned}$$

in rational integral variables $x_1, \ldots, y_2$.

The form Φ is positive definite and has determinant $\mu^4 m^2 \Delta^2$ and lower bound (or minimum) L. By the theorem of Korkine and Zolotareff[4]) one of two alternatives must hold: either

$$L^4 = 4\mu^4 m^2 \Delta^2 \quad \text{and} \quad \Phi \sim \Phi_0, \tag{6}$$

where the form Φ_0 is such that its coefficients are rational integral multiples of L, or else

$$L^4 < 4\mu^4 m^2 \Delta^2. \tag{7}$$

The assumption (6) yields, when we consider the coefficients of x_1^2, $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, y_1^2, the conditions

$$\begin{aligned} a &= Lu, \\ 2a(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) &= Lv, \\ 2a\lambda(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) + 2a\mu^2 m\alpha_2 &= Lw, \\ a(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)^2 + a\mu^2 m\alpha_2^2 + \frac{\Delta}{a} &= Lt, \end{aligned} \tag{8}$$

where u, v, w, t are rational integers. If the conditions (8) are satisfied, the remaining coefficients in Φ/L will also be rational integers.

---

[4]) A. Korkine and G. Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives quaternaires, Math. Annalen 5 (1872), S. 581—583.

Conditions (8) and (6) show that the rational integers m, u, v, w, t satisfy the Diophantine equation

$$v^2 + \frac{(w - \lambda v)^2 + 2}{\mu^2 m} = 4 u t. \tag{9}$$

To any set of integers (u, v, w, t) which satisfies (9) corresponds a form Φ/L with rational integral coefficients, definite and with determinant 4. The form Φ/L has therefore minimum unity. The corresponding form f/L also has minimum unity in $R(i\sqrt{m})$.

If for a given value of m, (9) is not solvable, then the alternative (7) must hold in place of (6).

Now the necessary and sufficient condition that the Diophantine equation (9) be solvable is simply that -2 be a quadratic residue of every odd prime divisor of m.

That the condition is necessary is obvious. That it is sufficient may be seen as follows.

I. $m \not\equiv 3 \pmod 4$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$. A rational integer w exists such that $\frac{(w^2+2)}{m}$ is a rational integer congruent to 3 modulo 4. Take v to to be any odd integer.

II. $m \equiv 3 \pmod 4$, $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. A rational integer g exists such that $\frac{(g^2+8)}{m}$ is a rational integer congruent to 0 or 3 modulo 4 according as g is even or odd. Take integers v and w such that

$$2w - v = g.$$

In either case therefore integers v, w exists such that the left hand side of (9) is an integer divisible by 4. Integers u and t can therefore be found to satisfy (9).

In either case write

$$g = \frac{(w - \lambda v)}{\mu} \tag{10}$$

so that g is integral. We obtain

Theorem 1. *Let m be positive and quadratfrei. Let the definite Hermitian binary quadratic form f of determinant $\Delta > 0$ have absolute lower bound (minimum) L, when the variables are integers in $R(i\sqrt{m})$, (0,0) excepted. Then always*

$$L^2 \leqq 2\mu^2 m \Delta. \tag{11}$$

Equality is possible only if every odd prime divisor of m is congruent to 1 or to 3 modulo 8, and equality holds in this case if and only if

$$f/L = u x\bar{x} + \frac{v}{2}(x\bar{y} + \bar{x}y) + \frac{ig}{2\sqrt{m}}(x\bar{y} - \bar{x}y) + t y\bar{y} \tag{12}$$

where u, v, g, t are rational integers which satisfy the Diophantine equation

$$v^2 + \frac{g^2 + 2\mu^{-2}}{m} = 4ut \tag{13}$$

and the congruence

$$g\mu + v\lambda \equiv 0 \pmod 1 \tag{14}$$

λ and μ being defined by (4).

In the case of (positive) definite Hermitian forms the lower bound is the minimum. Consequently there are integers p, q of the field such that

$$f(p, q, \bar{p}, \bar{q}) = L.$$

When the class number of the field is unity, L is *properly* represented by f, i. e. the integers p, q have greatest common divisor unity; integers r, s in the field exist such that

$$ps - qr = 1.$$

The transformation

$$x = pX + rY, \quad y = qX + sY$$

will then carry f into an *equivalent* form in which the coefficient of $X\bar{X}$ is L. Thus if the class number is unity we may suppose in the set of forms (12) that

$$u = 1, \quad v = 0 \text{ or } 1, \quad -\mu m < g \leqq \mu m.$$

Theorem 1 now yields Speiser's results and Perron's results for

$$m = 1, 2, 3, 11, 19,$$

and new information in many other cases, e. g., $m = 43, 67, 163$ where it happens that the class number is unity. The theorem however applies also when the class number is greater than unity, e. g. $m = 6, 17, 22$.

When the class-number exceeds unity, it may happen that L is not properly represented by f. I cannot find an example of this in the case of definite Hermitian forms, but indefinite Hermitian forms in $R(\sqrt{10})$ may be used to illustrate the point. The form

$$F = 3x\tilde{x} - \tfrac{1}{2}(x\tilde{y} + \tilde{x}y) - \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\,(x\tilde{y} - \tilde{x}y) - 7y\tilde{y}$$

has absolute minimum 2 when x, y are integers in $R(\sqrt{10})$. It cannot however represent ± 2 properly. Actually $F = 2$ for $x = \sqrt{10}$, $y = 2$; and the representation is not proper.

3. We have seen that when L is represented properly by f, the leading coefficient of f and therefore also of Φ may be taken to be L. In this case it is possible to avoid the use of the theorem of Korkine and Zolotareff. For, in Φ put $y_2 = 0$. We obtain a definite ternary

form in x_1, x_2, y_1 of determinant $\mu^2 m \Delta L$ and minimum L, since $a = L$ is a value of this ternary form. Consequently by the classical theorem of Gauss,

$$L^3 \leqq 2\mu^2 m \Delta L,$$

and equality holds only if the form is equivalent to a certain form whose coefficients are rational integral multiples of L. In this way Theorem I follows again but the deduction is now valid only when the class-number is unity.

4. Without using the theorem of Gauss, it is possible by elementary arguments to obtain the results for the fields in which

$$m = 1, 2, 3, 7, 11, 19,$$

thus including the field $m = 7$ which was not covered by Theorem 1.

For, with a slight change of notation, we have to consider the following problem: *the form*

$$F = (x + \lambda y + \alpha z)^2 + \mu^2 m (y + \beta z)^2 + D z^2, \tag{1}$$

where α, β are real and $D > 0$ has minimum unity, x, y, z being rational integers not all zero. Determine the minimum value of D and the corresponding values of α and β.

Clearly we may suppose that

$$0 \leqq \beta \leqq \tfrac{1}{2}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \tfrac{1}{2}. \tag{2}$$

I. $m = 1, 2$. By hypothesis

$$\alpha^2 + \mu^2 m \beta^2 + D \geqq 1, \tag{3}$$

$$D \geqq 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\mu^2 m.$$

Hence either

$$D = \frac{3 - m}{4}, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

or else

$$D > \frac{3 - m}{4}.$$

Theorem 2. *For the field $R(i\sqrt{m})$ where $m = 1$ or 2, the minimum L of the positive definite Hermitian form f of determinant Δ is less than or equal to $\left(\frac{4\Delta}{(3-m)}\right)^{\frac{1}{2}}$ and equality holds only if $\frac{f}{L}$ is equivalent properly or improperly to the form*

$$x\bar{x} + \frac{1}{2}(x\bar{y} + \bar{x}y) - \frac{i}{2}\sqrt{m}\,(x\bar{y} - \bar{x}y) + y\bar{y}.$$

This result agrees with that of Perron and of Speiser ($m = 1$). The equivalence is actually proper.

II. $m = 3, 7, 11$. In addition to (3) use

$$(\tfrac{1}{2} - \alpha)^2 + \mu^2 m (1 - \beta)^2 + D \geqq 1. \tag{4}$$

If $D \leqq \frac{3}{4}$, it is legitimate to eliminate β between the inequalities (3) and (4). We obtain

$$m D \geqq m (1 - \alpha^2) - \left(\frac{m+1}{4} - \alpha\right)^2$$

whence

$$16 m D \geqq 14 m - 1 - m^2, \tag{5}$$

equality implying either

$$\alpha = 0, \quad 2 m \beta = m + 1, \tag{6}$$

or

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad 2 m \beta = m - 1, \tag{7}$$

the values of β being derived from (3) and (4).

Since (6) contradicts (2), we thus obtain

Theorem 3. *For the fields $R(i\sqrt{m})$ where $m = 3$, 7 or 11, the minimum L of the positive definite Hermitian form f of determinant Δ is less than or equal to*

$$\left(\frac{16 m \Delta}{14 m - 1 - m^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

If equality holds, than f/L is equivalent properly or improperly to the form

$$x \bar{x} + \frac{1}{2}(x \bar{y} + \bar{x} y) + \frac{i (m-1)}{4\sqrt{m}}(x \bar{y} - \bar{x} y) + y \bar{y}.$$

The cases $m = 3, 11$ agree with Theorem 1. The case $m = 7$ was not covered by Theorem 1. In each case the results can be shown to agree with Perron's and (for $m = 3$) with Speiser's.

III. $m = 11, 15, 19, 23$. Here eliminate β between the inequality (3) and the inequality

$$(\tfrac{1}{2} - 2\alpha)^2 + \mu^2 m (1 - 2\beta)^2 + 4 D \geqq 1. \tag{8}$$

The process is legitimate if we assume that $D \leqq \frac{3}{16}$. We find that

$$4 m D \geqq 4 m (1 - \alpha^2) - \left(\frac{m+1}{4} + 3 - 2\alpha\right)^2$$

whence

$$64 m D \geqq 30 m - m^2 - 81, \tag{9}$$

equality implying that

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{m+9}{4m} \tag{10}$$

from (3) and (8).

We obtain thus

Theorem 4. *For the fields* $R(i\sqrt{m})$ *where* $m = 11$ *or* 19, *the minimum* L *of the positive definite Hermitian form* f *of determinant* Δ *is less than or equal to*

$$\left(\frac{64\,m\,\Delta}{30\,m - m^2 - 81}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

If equality holds then f/L *is equivalent properly or improperly to the form*

$$x\bar{x} + \frac{1}{2}(x\bar{y} + \bar{x}y) + \frac{i(m+9)}{8\sqrt{m}}(x\bar{y} - \bar{x}y) + y\bar{y}.$$

Theorem 4 agrees with Theorem 3 and Theorem 1 for $m = 11$. It also agrees with Theorem 1 and with Perron for $m = 11, 19$.

We observe also that for the fields $R(i\sqrt{m})$ where $m = 15$ or 23, in which the class-number exceeds unity, it is suggested that

$$\frac{L^2}{\Delta} \leqq \frac{20}{3} \ (m = 15), \quad \frac{L^2}{\Delta} \leqq \frac{92}{5} \ (m = 23).$$

The result for $m = 15$ is actually correct for, Professor Perron informs me, a pupil of his has independently obtained the same result. The proof given here cannot be counted complete since we have assumed that L is properly represented. The result for $m = 23$ is certainly not correct. I find here that

$$\frac{L^2}{\Delta} \leqq \frac{83}{828}.$$

IV. $m = 5, 6$. Here use

$$\alpha^2 + m\beta^2 + D \geqq 1, \tag{11}$$

$$4\alpha^2 + m(1 - 2\beta)^2 + 4D \geqq 1, \tag{12}$$

$$(1 - 2\alpha)^2 + m(1 - 2\beta)^2 + 4D \geqq 1. \tag{13}$$

Eliminate β between (11) and (12) if $\alpha \leqq \frac{1}{4}$. Eliminate β between (11) and (13) if $\alpha > \frac{1}{4}$.

We obtain

$$16\,mD \geqq 16\,m(1 - \alpha^2) - (m+3)^2 \geqq 15\,m - (m+3)^2$$

for $0 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{4}$, equality implying that $\alpha = \frac{1}{4}$; and

$$16\,mD \geqq 16\,m(1 - \alpha^2) - (m + 4 - 4\alpha)^2 \geqq 8\,m - m^2 - 4$$

for $\frac{1}{4} < \alpha \leqq \frac{1}{2}$, equality implying that $\alpha = \frac{1}{2}$.

It appears that

$$80\,D \geqq 11\ (m = 5), \quad 12\,D \geqq 1\ (m = 6),$$

equality yielding

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{m+2}{4\,m}; \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{7}{20}\ (m = 5).$$

The theorem suggested for $R(i\sqrt{6})$ agrees with Theorem 1. It is suggested also that for $R(i\sqrt{5})$

$$\frac{L^2}{\Delta} \leqq \frac{80}{11}. \tag{14}$$

This result is in fact correct for Professor Perron's pupil has independently obtained the same limit. He has also independently considered the cases $m = 43, 67, 163$ (in which the class-number is unity) and his results agree with those furnished by Theorem 1.

It should be noted that this method of investigation which leads to Theorem 2, 3, 4 is very similar to Perron's method. It does however avoid geometrical considerations.

[Note added in proof: I find that the method of § 4 can be modified so as to include the case when L is not properly represented.]

(Eingegangen am 27. Mai 1933.)

Zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen.

Von

I. J. Schoenberg in Cambridge, Mass.

Das Problem der Abzählung der reellen Wurzeln einer reellen algebraischen Gleichung ist längst durch den Sturmschen Satz oder auch durch Hermites Methode der quadratischen Formen vollständig gelöst. Vor diesen Lösungen gab es hauptsächlich nur die Regel von Descartes, den Satz von Budan und Fourier und die von Jacobi auf ein endliches Intervall übertragenen Regel von Descartes, welche alle nur obere Schranken für die Wurzelanzahl geben. Aber auch nach der vollständigen Lösung des Problems hat anscheinend das Interesse der Mathematiker an den ungenauen Sätzen nicht nachgelassen. Es seien die Namen von Sylvester und Laguerre und in neuerer Zeit Runge, A. Hurwitz, Fejér, D. R. Curtiss, Fekete, Pólya, Szegö und Obreschkoff genannt.

In dieser Arbeit werden nicht weitere Sätze dieser Art aufgestellt, sondern ein von Felix Klein[1]) begonnener Vergleich der Leistungsfähigkeit dieser Sätze auf einem neuen Weg zu einem gewissen Abschluß gebracht. Felix Klein hat nachgewiesen, daß die von der Descartes-Jacobischen Regel gelieferte obere Schranke für die Wurzelanzahl für Gleichungen zweiten Grades nie die Schranke des Budan-Fourierschen Satzes übersteigt. Heinrich Weber, der in seinem Lehrbuch der Algebra (Bd. 1, 2. Auflage, S. 354—357) den geometrischen Beweis von Klein wiedergibt, wirft die Frage auf, ob derselbe Sachverhalt auch für Gleichungen beliebigen Grades gilt. In § 1 wird die Webersche Frage bejahend beantwortet. In § 2 wird in demselben Sinne die Überlegenheit der Descartes-Jacobischen Regel gegenüber einem für die Anwendungen äußerst bequemen Satz von Laguerre nachgewiesen. § 3 bringt die Hauptergebnisse dieser Arbeit; eine Bestimmung der allgemeinsten Polynomenfolge, welche im Sinne der Herren Pólya und Szegö der Descartesschen Regel genügen, zeigt die Überlegenheit der klassischen Regel von Descartes gegenüber einer ganzen Klasse von ähnlichen Sätzen, von denen gewisse Sätze von Runge und Obreschkoff typische Beispiele sind. Ferner gestatten diese

[1]) F. Klein, Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen, Gesammelte Math. Abhandlungen 2, S. 198—208.

Ergebnisse und eine von Herrn Obreschkoff stammende Übertragung der Regel von Descartes auf komplexe Wurzeln alle hier besprochenen Sätze ebenfalls auf komplexe Wurzeln zu übertragen (§ 4).

Im Gegensatz zu Klein ist die hier benutzte Beweismethode analytisch. Da es hier auf Ungleichheitsbeziehungen zwischen den Anzahlen der Zeichenwechsel in verschiedenen linear voneinander abhängenden Zahlenfolgen ankommt, spielen naturgemäß die vom Verfasser schon früher untersuchten sogenannten variationsvermindernden Transformationen eine entscheidende Rolle.

§ 1.

Die Regel von Descartes-Jacobi und der Satz von Budan-Fourier.

1. Es sei

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

eine algebraische Gleichung mit reellen numerischen Koeffizienten, und $N(\alpha, \beta)$ sei die Anzahl ihrer Nullstellen im offenen Intervall (α, β). Ferner sei $V(x)$ die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Nach Budan und Fourier gilt der folgende Satz:

I. *Es ist*

$$N(\alpha, \beta) \leqq V(\alpha) - V(\beta) \tag{2}$$

und es ist, falls $f(\alpha) f(\beta) \neq 0$ *ist, die Differenz beider Seiten eine gerade Zahl*[2]).

Für $\alpha = 0$, $\beta \to +\infty$ folgt aus diesem Satz, als Spezialfall, die sogenannte Regel von Descartes[3])

$$N(0, \infty) \leqq V(0) = v_a, \quad N(0, \infty) \equiv v_a \pmod 2. \tag{3}$$

---

[2]) Ist $x = \beta$ eine k-fache Wurzel der Gleichung (1) ($k \geqq 0$), so ist

$$V(\alpha + 0) = V(\alpha), \quad V(\beta - 0) = V(\beta) + k + 2p \quad (p \geqq 0 \text{ und ganzzahlig}).$$

Aus Satz I folgt

$$N(\alpha, \beta) = \lim_{\varepsilon \to 0} N(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} [V(\alpha + \varepsilon) - V(\beta - \varepsilon) - 2q]$$
$$= V(\alpha) - V(\beta) - k - 2(p + q) \quad (q \geqq 0 \text{ und ganzzahlig}),$$

also

$$N(\alpha, \beta] = N(\alpha, \beta) + k = V(\alpha) - V(\beta) - 2r \quad (r \geqq 0 \text{ und ganzzahlig}).$$

Diese Verschärfung des Budan-Fourierschen Satzes stammt von A. Hurwitz, Math. Annalen 71 (1912), S. 584—591.

[3]) Hier und weiter unten wird folgende bequeme Bezeichnung benutzt: Ist $z_0, z_1, z_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen, so sei v_z die Anzahl ihrer Zeichenwechsel.

Jacobi hat bemerkt, daß man mit der Descartesschen Regel ebenfalls die Aufgabe, $N(\alpha, \beta)$ abzuschätzen, lösen kann[4]). Er setzt $x = \frac{\alpha + \beta y}{1 + y}$. Dem Intervall $\alpha < x < \beta$ entspricht die positive Halbachse $0 < y < +\infty$, und es genügt die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung

$$(4) \qquad (1+y)^n f\left(\frac{\alpha + \beta y}{1+y}\right) \equiv b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$

zu ermitteln. Tatsächlich ist diese Anzahl ebenfalls gleich $N(\alpha, \beta)$ und die Regel von Descartes gibt die Ungleichung[3])

$$(5) \qquad N(\alpha, \beta) \leqq v_b, \quad N(\alpha, \beta) \equiv v_b \pmod 2.$$

Wir setzen die Descartessche Regel, also die Beziehungen (3) und (5), als bekannt voraus. Dann folgt sofort ein Beweis von Satz I, sowie die Beantwortung der in der Einleitung erwähnten Klein-Weberschen Frage aus folgendem

Hilfssatz 1. *Es ist immer*

$$(6) \qquad v_b \leqq V(\alpha) - V(\beta),$$

und es ist, falls $f(\alpha) f(\beta) \neq 0$ *ist, die Differenz beider Seiten eine gerade Zahl.*

Zum Beweis dieses Hilfssatzes setzen wir zunächst

$$(7) \qquad x = \alpha + (\beta - \alpha) z, \quad f(x) = f(\alpha + (\beta - \alpha) z) = f^*(z).$$

$N(\alpha, \beta)$ ist gleich der Anzahl $N^*(0,1)$ der Wurzeln von $f^*(z) = 0$ im Intervall $0 < z < 1$. Ferner folgt aus (4) und (7) sofort

$$V(\alpha) = V^*(0), \quad V(\beta) = V^*(1), \quad v_b = v_{b^*}, \quad f(\alpha) = f^*(0), \quad f(\beta) = f^*(1),$$

und deshalb genügt es, unseren Hilfssatz für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ zu beweisen. Aus (1) folgt in unserer Bezeichnungsweise[3])

$$(8) \qquad V(0) = v_a, \quad V(1) = v_{b'},$$

wobei

$$(9) \qquad \begin{aligned} b'_0 &= a_0, \\ b'_1 &= \binom{n}{1} a_0 + a_1, \\ b'_2 &= \binom{n}{2} a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ b'_{n-1} &= \binom{n}{1} a_0 + \binom{n-1}{1} a_1 + \binom{n-2}{1} a_2 + \ldots + a_{n-1}, \\ b'_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

[4]) C. G. J. Jacobi, Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes, Crelles Journ. 13 (1835), S. 348.

Wir wollen nun das Polynom (4) ausrechnen. Aus

$$(1+y)^n f\left(\frac{y}{1+y}\right) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1}(1+y) + a_2 y^{n-2}(1+y)^2 + \ldots + a_n (1+y)^n$$
$$= b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n$$

folgt

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ b_1 &= a_1 + 2a_2 + \ldots + \binom{n}{1} a_n, \\ b_2 &= a_2 + \ldots + \binom{n}{2} a_n, \\ &\vdots \\ b_n &= a_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus einem sofort ersichtlichen Grund schreiben wir (9) und (10) als eine einzige lineare Transformation

$$\begin{aligned} b_0' &= a_0, \\ b_1' &= \binom{n}{1} a_0 + a_1, \\ &\vdots \\ b_n' &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \\ b_0 &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n, \\ b_1 &= a_1 + \ldots + \binom{n}{1} a_n, \\ &\vdots \\ b_n &= a_n. \end{aligned} \tag{11}$$

Es sei $v_{b',b}$ die Zeichenwechselanzahl der Folge $b_0', \ldots, b_n', b_0, \ldots, b_n$. Die Transformation (11) ist *variationsvermindernd*, d. h. es gilt immer die Ungleichung

$$v_{b',b} \leqq v_a. \tag{12}$$

Der Beweis dieser Behauptung wird später nachgeholt. Man bemerke ferner, daß

$$v_{b'} + v_b \leqq v_{b',b}, \tag{13}$$

und zwar gilt hier das Gleichheitszeichen, wenn $b_n' = b_0 \neq 0$, während die rechte Seite eventuell (um eine Einheit) überwiegt, falls $b_n' = b_0 = 0$. Aus (12) und (13) folgt aber

$$v_{b'} + v_b \leqq v_a$$

und das ist genau die Ungleichung (6) (für $\alpha = 0$, $\beta = 1$), wenn man (8) berücksichtigt. Wenn ferner $f(1) = b_n' = b_0 \neq 0$ und $f(0) = a_n \neq 0$, so ist wegen der besonderen Gestalt von (11) die Differenz $v_a - v_{b',b}$ gerade, also wegen $v_{b',b} = v_{b'} + v_b$, auch $v_a - (v_{b'} + v_b) = V(0) - V(1) - v_b$ eine gerade Zahl.

2. Jetzt werde der Nachweis der variationsvermindernden Eigenschaft der Transformation (11) nachgeholt. Nach einem allgemeinen Satz[5]) genügt es, nachzuweisen, daß alle Minoren sämtlicher Ordnungen der Koeffizientenmatrix von (11) nichtnegativ sind. Matrizen mit dieser Eigenschaft hatte ich a. a. O. *total positiv* genannt.

Wir schicken zunächst einige allgemeine Bemerkungen über total positive Matrizen voraus. Es sei $C = \|c_{ik}\|$ $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ eine total positive Matrix. Man kann an C einige einfache Veränderungen vornehmen, wir wollen sie *elementare Transformationen* nennen, welche C in eine ebenfalls total positive Matrix überführen. Elementare Transformationen sind offenbar: 1. Multiplikation einer Zeile (Spalte) von C mit einer positiven Zahl K. 2. Addition einer mit K (> 0) multiplizierten Zeile (Spalte) zu einer *unmittelbar benachbarten* Zeile (Spalte). 3. Einschiebung einer neuen Zeile (Spalte) die entweder aus lauter Nullen besteht, oder mit einer der unmittelbar benachbarten Zeilen (Spalten) dentisch ist. 4. Streichung einer Zeile (Spalte). 5. Klappung der Matrix um eine der beiden Diagonalrichtungen. 6. Erweiterungen von C von der Art

$$\begin{Vmatrix} K & 0 \\ 0 & c_{ik} \end{Vmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{Vmatrix} c_{ik} & 0 \\ 0 & K \end{Vmatrix} \quad (K > 0).$$

Nach diesen Bemerkungen ist der Beweis der Ungleichung (12) in folgendem Hilfssatz enthalten.

Hilfssatz 2. *Die Matrix*

$$(14)\quad M_n = \begin{Vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \ldots & \binom{n}{2} & \binom{n}{1} & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{1} & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 & 1 & 1 & \binom{n-2}{1} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & 1 & \binom{n-1}{1} & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & \binom{n}{1} & \ldots & \binom{n}{1} & 1 \end{Vmatrix}$$

ist total positiv.

[5]) Siehe I. Schoenberg, Über variationsvermindernde lineare Transformationen, Math. Zeitschr. 32 (1930), S. 321—328. Hier wird nur der folgende Spezialfall des dort bewiesenen Satzes 1 angewendet: *Wenn alle Minoren sämtlicher Ordnungen der Koeffizientenmatrix* $C = \|c_{ik}\|$ *einer linearen Transformation* $y_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k$ $(i = 1, \ldots, m)$ *nichtnegativ sind, dann ist die Transformation variationsvermindernd, d. h. es ist immer* $v_y \leqq v_x$. In der demnächst erscheinenden Baseler Dissertation des Herrn Th. Motzkin findet man u. a. notwendige und hinreichende Bedingungen für variationsvermindernde Transformationen.

Für

$$M_0 = \|1 \quad 1\|,$$

stimmt die Behauptung. Bevor wir den Induktionsschluß ausführen, wollen wir zeigen, *daß man M_n durch elementare Transformationen (der 1. Art) in*

$$(15)\quad M_n' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{1} & \binom{n}{1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \binom{n-1}{2} & \binom{n}{2} & \binom{n}{2} & \binom{n-1}{1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{1} & \binom{n-1}{1} & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

überführen kann und umgekehrt. Mit $\binom{0}{0} = 1$ und $\binom{p}{q} = 0$ für $0 \leqq p < q$ ist in leicht verständlicher Schreibweise

$$(16)\qquad M_n = \left\| \binom{n-i}{n-k} \binom{i}{l} \right\| \qquad (i, k, l = 0, 1, \dots, n),$$

wobei i die $(i+1)$te Zeile, k und l die $(k+1)$te bezüglich $(n+1+l+1)$te Spalte angeben. Alle weiter unten auftretenden sinnlosen Symbole, wie etwa $\frac{1!}{(-1)!}$ sind durch die Null zu ersetzen. Nach (16) ist dann

$$M_n = \left\| \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!} \; \frac{i!}{l!\,(i-l)!} \right\|.$$

Man multipliziere nun die $(k+1)$te Spalte mit $(n-k)!\,k!$ und die $(n+1+l+1)$te Spalte mit $(n-l)!\,l!$ $(k, l = 0, 1, \dots, n)$. Die neue Matrix ist

$$\left\| \frac{(n-i)!\;k!}{(k-i)!} \; \frac{i!\,(n-l)!}{(i-l)!} \right\|.$$

Dividiert man nun die $(i+1)$te Zeile durch $(n-i)!\,i!$ $(i = 0, \dots, n)$, so erhält man

$$\left\| \frac{k!}{i!\,(k-i)!} \; \frac{(n-l)!}{(n-i)!\,(i-l)!} \right\| = \left\| \binom{k}{i} \binom{n-l}{n-i} \right\| = M_n',$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir beweisen ferner: *M_n läßt sich durch elementare Transformationen in M_{n+1} überführen.* Es genügt natürlich von M_n' auszugehen[6]).

[6]) Übersichtlicher wird der Leser die nun folgenden Ausführungen an Hand der für $n = 2$, oder $n = 3$, ausgeschriebenen Matrizen verfolgen.

Man gehe von M_n' zur Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & M_n' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \binom{k}{i} & \binom{n-l}{n-i} \end{matrix} \right\| \tag{17}$$

über. Nun addiere man in der Matrix (17) die erste Spalte zur zweiten, ferner die neue zweite Spalte zur dritten usw., die neue $(n+1)$te Spalte zur $(n+2)$ten. Zuletzt erhält man wegen bekannter Additionseigenschaften der Binomialkoeffizienten die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \binom{k+1}{i+1} & \binom{n-l}{n-i} \end{matrix} \right\|. \tag{18}$$

Man verdoppele nun in (18) die $(n+2)$te Spalte und erhält die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \binom{k+1}{i+1} & \binom{n+1}{i+1} & \binom{n-l}{n-i} \end{matrix} \right\| = \left\| \binom{k'}{i'} \binom{n+1-l'}{n+1-i'} \right\| = M_{n+1}'$$

$$(i', k', l' = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Da nun M_{n+1}' wie oben in M_{n+1} transformiert werden kann, so ist die Behauptung bewiesen. Da wir durchgehend nur elementare Transformationen benutzt haben, so ist der Induktionsschluß vollständig und der Hilfssatz 2 bewiesen.

§ 2.

Ein Satz von Laguerre.

3. Nach Laguerre findet man eine obere Schranke für $N(\alpha, \beta)$ in folgender Weise. Man betrachte die $n+1$-Abschnitte des Ausdruckes

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(\beta-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha),$$

also

$$c_0 = f(\alpha), \quad c_1 = f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{1!} f'(\alpha), \ \ldots, \ c_n = f(\beta). \tag{19}$$

Es gilt der folgende Satz

II[7]). *Es ist*

$$N(\alpha, \beta) \leqq v_c, \tag{20}$$

und es ist, falls $f(\alpha) f(\beta) \neq 0$ *ist, die Differenz beider Seiten eine gerade Zahl.*

Ein Beweis dieses Satzes, sowie der Nachweis der Überlegenheit der Descartes-Jacobischen Regel (5) ist enthalten in folgendem

Hilfssatz 3. *Es ist immer*[8])

$$v_b \leqq v_c, \tag{21}$$

[7]) E. Laguerre, Ouvres 1, S. 10. Auch sein Satz auf S. 77—78 ist im wesentlichen vom ersten nicht verschieden und fällt für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ tatsächlich mit diesem zusammen.

und es ist, falls $f(\alpha) f(\beta) \neq 0$ *ist, die Differenz beider Seiten eine gerade Zahl.*

Zum Nachweis dieses Hilfssatzes bemerke man zunächst, daß (7) und (19)

$$v_b = v_{b^*}, \quad v_c = v_{c^*}, \quad f(\alpha) f(\beta) = f^*(0) f^*(1)$$

ergeben, so daß es wiederum genügt, den Fall $\alpha = 0$, $\beta = 1$ zu betrachten. Für $\alpha = 0$, $\beta = 1$ wird in umgekehrter Reihenfolge

$$(22) \qquad \begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ c_1 &= \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ c_2 &= \quad\quad a_2 + \ldots + a_n, \\ &\vdots \\ c_n &= \quad\quad\quad\quad a_n. \end{aligned}$$

Die Elimination der a_ν aus (10) und (22) ergibt sofort

$$(23) \qquad \begin{aligned} b_0 &= c_0 \\ b_1 &= c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n, \\ b_2 &= c_2 + 2c_3 + \ldots + \binom{n-1}{1} c_n, \\ b_3 &= c_3 + \ldots + \binom{n-1}{2} c_n, \\ &\vdots \\ b_n &= c_n. \end{aligned}$$

Diese Transformation ist aber variationsvermindernd[8]) und damit ist die Ungleichung (21) bewiesen. Falls ferner $f(0) = c_n \neq 0$, $f(1) = c_0 \neq 0$ ist, ist wegen (23) $v_c - v_b$ gerade, und also auch $v_c - N(0,1)$ eine gerade Zahl.

---

[8]) Tatsächlich ist ihre Koeffizientenmatrix total positiv, denn dieselbe ist eine einfache Erweiterung (elementare Transformation 6. Art) einer Teilmatrix der total positiven Matrix (15). Allerdings sei dazu folgendes bemerkt: Wenn C die Matrix einer variationsvermindernden Transformation $(y) = C(x)$ ist, so kann man an C die elementaren Transformationen 1, 2, 3 und 4 anwenden, ohne daß dabei C aufhört, Koeffizientenmatrix einer variationsvermindernden Transformation zu sein. Vgl. Pólya und Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, Bd. 2, 5. Abschnitt. Die Matrix von (23) läßt sich aber sehr einfach durch elementare Transformationen der 2. Art aus der Einheitsmatrix ableiten. Also ist (23) variationsvermindernd und der Umweg über den Satz der Fußnote [5]) ist vermieden. Diesen bequemen Beweis kann ich aber nicht auf die Transformation (11) anwenden. Um vielmehr die Matrix von (11) auf ähnliche Weise aus einfachen Matrizen abzuleiten (siehe Beweis des Hilfssatzes 2), konnte ich die Anwendung der elementaren Transformation 6 nicht vermeiden. Die Transformation 6 auf eine variationsvermindernde Matrix C angewandt, wird aber im allgemeinen keine variationsvermindernde Matrix ergeben.

4. Es sei hier noch auf eine andere Überlegenheit der Regel von Descartes-Jacobi gegenüber den Sätzen von Budan-Fourier und Laguerre hingewiesen. Laguerre (a. a. O., S. 81) schlug folgende Aufgabe vor:

Man bestimme eine obere und untere Schranke von $f(x)$ in (0,1), und er löste dieselbe auf folgende Weise.

Es ist gewiß λ z. B. eine obere Schranke, wenn die Gleichung

$$f^*(x) \equiv f(x) - \lambda' = 0$$

für jedes $\lambda' \geqq \lambda$ keine Wurzel zwischen 0 und 1 hat. Es ist

$$f^*(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n - \lambda'$$

und, um den Laguerreschen Satz II anzuwenden, nach (22)

$$\begin{aligned} c_0^* &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n - \lambda' = c_0 - \lambda', \\ c_1^* &= \quad a_1 + \ldots + a_n - \lambda' = c_1 - \lambda', \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ c_n^* &= \qquad\qquad\quad a_n - \lambda' = c_n - \lambda'. \end{aligned}$$

Es sind also

$$l = \operatorname*{Min}_{\nu} c_\nu, \quad L = \operatorname*{Max}_{\nu} c_\nu$$

brauchbare untere und obere Schranken, denn $v_{c^*} = 0$ für $\lambda' \leqq l$ oder $\lambda' \geqq L$. Laguerre weist a. a. O. darauf hin, daß der Satz von Budan-Fourier für diese Aufgabe im allgemeinen keine Lösung liefert, was sehr leicht einzusehen ist. *Die Regel von Descartes-Jacobi ist zur Lösung dieser Aufgabe ebensogut brauchbar wie der Satz von Laguerre und gibt sogar bessere Schranken als dieser.*

In der Tat, nach (10) ist

$$\begin{aligned} b_0^* &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + \quad a_n - \quad \lambda' = b_0 - \quad \lambda', \\ b_1^* &= \quad a_1 + 2a_2 + \ldots + \binom{n}{1} a_n - \binom{n}{1}\lambda' = b_1 - \binom{n}{1}\lambda', \\ b_2^* &= \qquad a_2 + \ldots + \binom{n}{2} a_n - \binom{n}{2}\lambda' = b_2 - \binom{n}{2}\lambda', \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ b_n^* &= \qquad\qquad\quad a_n - \quad \lambda' = b_n - \quad \lambda', \end{aligned}$$

und man erhält aus demselben Grund wie oben für $f(x)$ in (0,1) die Schranken

$$j = \operatorname*{Min}_{\nu} \frac{b_\nu}{\binom{n}{\nu}}, \quad J = \operatorname*{Max}_{\nu} \frac{b_\nu}{\binom{n}{\nu}}.$$

Es ist immer $l \leqq j \leqq J \leqq L$, also sind die Jacobischen Schranken enger als die Laguerreschen, denn wegen (23) ist

$$b_0 = c_0, \frac{b_1}{\binom{n}{1}} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n}, \quad \frac{b_2}{\binom{n}{2}} = \frac{c_2 + \binom{2}{1} c_3 + \ldots + \binom{n-1}{1} c_n}{1 + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{n-1}{1}},$$

$$\ldots, \quad b_n = c_n.$$

Es sind also die Jacobischen Schranken gleich dem kleinsten und größten von gewissen Mittelwerten von Zahlen, von denen die kleinste und größte die Laguerreschen Schranken sind, und damit sind die Ungleichungen bewiesen.

§ 3.

Die Bestimmung der allgemeinsten der Descartesschen Regel genügenden Polynomenfolgen und die Vorzugsstellung der klassischen Regel von Descartes.

5. Es seien

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) \tag{24}$$

im Intervall $\alpha < x < \beta$ n-mal stetig differentierbare Funktionen. Die Herren Pólya und Szegö sagen, daß diese Funktionenfolge im offenen Intervall (α, β) der Descartesschen Regel genügt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Wenn $c_0, c_1, \ldots, c_n$ irgendwelche reelle Zahlen bedeuten, die nicht sämtlich verschwinden, so soll die Anzahl $N(\alpha, \beta)$ der in (α, β) gelegenen Nullstellen (Vielfachheit inbegriffen) der linearen Kombination

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x) \tag{25}$$

die Anzahl v_c der Zeichenwechsel der Folge $c_0, c_1, \ldots, c_n$ nie übersteigen. Notwendige und hinreichende Bedingungen gibt das folgende wichtige Kriterium.

Kriterium von Pólya und Szegö. *Die Funktionenfolge* (24) *genügt dann und nur dann im Intervall* (α, β) *der Regel von Descartes, falls sie die folgenden Eigenschaften hat: Wenn* $i_0, i_1, \ldots, i_l$ *ganze Zahlen bezeichnen, wobei* $0 \leqq i_0 < i_1 < \ldots < i_l \leqq n$ *ist, dann sollen die Wronskischen Determinanten* $W[\varphi_{i_0}(x), \varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_l}(x)]$ *für* $\alpha < x < \beta$ *nicht verschwinden, und darüber hinaus sollen irgend zwei Wronskische Determinanten mit gleichviel Zeilen gleiches Vorzeichen besitzen*[9]).

Außer dem klassischen Beispiel der Folge $1, x, x^2, \ldots, x^n$ im Intervall $(0, \infty)$ gibt es noch eine beträchtliche Anzahl interessanter Funktionenfolgen, welche in gewissen Intervallen der Regel von Descartes genügen[10]). Ich beschränke mich auf Polynomenfolgen und zitiere die folgenden zwei Sätze von Runge und Obreschkoff.

---

[9]) Pólya und Szegö, a. a. O., Bd. 2. S. 52–53. Für die Anwendungen dieses Kriteriums ist die folgende Bemerkung manchmal nützlich: *Es genügt, die Determinantenbedingungen des Kriteriums nur für konsekutive Zahlen* $i_0 = i, i_1 = i+1, \ldots, i_l = i+l$ *nachzuweisen.* In der Tat, wenn die Determinanten $W[\varphi_i(x), \varphi_{i+1}(x), \ldots, \varphi_{i+l}(x)]$ $(0 \leqq i \leqq i+l \leqq n;\ \alpha < x < \beta)$ ein nur von l abhängendes Vorzeichen haben, so besitzen auch schon alle Determinanten $W[\varphi_{i_0}(x), \varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_l}(x)]$ dasselbe Vorzeichen. Dies folgt leicht durch Induktion in bezug auf l auf Grund des weiter unten angegebenen Hilfssatzes von Herrn Fekete.

[10]) Siehe Pólya und Szegö, a. a. O. S. 52.

III[11]). *Die Polynomenfolge*

$$(26)\quad 1,\ x-\xi_1,\ (x-\xi_1)(x-\xi_2),\ \ldots,\ (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_n)\quad (\xi_\nu \text{ reell})$$

genügt im Intervall $\mu < x < \infty$ $(\mu = \operatorname{Max} \xi_\nu)$ *der Regel von Descartes.*

IV[12]). *Es sei* $p(x)$ *eine im endlichen oder unendlichen Intervall* $x_0 \leqq x \leqq x_1$ *positive Funktion, deren Momente* $\int_{x_0}^{x_1} p(x)\, x^r\, dx\ (r = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ *existieren und*

$$(27)\qquad P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x)$$

seien Polynome, welche den Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen

$$(28)\quad \int_{x_0}^{x_1} p(x)\, P_r(x)\, P_s(x)\, dx = 0\ \ (0 \leqq r < s \leqq n),\ \lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{x^n} > 0$$

genügen. Es sei η_n *(bekanntlich* $< x_1$*) die größte Nullstelle von* $P_n(x)$*. Die Polynomenfolge* (27) *genügt im Intervall* (η_n, ∞) *der Regel von Descartes.*

Zur Aufklärung der Beziehung dieser und ähnlicher Sätze zur klassischen Regel von Descartes ist der folgende Satz von besonderem Interesse.

Hauptsatz. *Eine Polynomenfolge der Gestalt*

$$(29)\quad \begin{aligned} \varphi_0(x) &= a_{00},\\ \varphi_1(x) &= a_{10} + a_{11}x,\\ \varphi_2(x) &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2,\\ &\vdots\\ \varphi_n(x) &= a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + \ldots + a_{nn}x^n \quad (a_{00} > 0,\ a_{11} > 0,\ \ldots,\ a_{nn} > 0) \end{aligned}$$

genügt dann und nur dann im Intervall $(0, \infty)$ *der Regel von Descartes, wenn die Koeffizientenmatrix*

$$(30)\qquad A = \|a_{ij}\| \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n;\ a_{ij} = 0 \text{ für } i < j)$$

total positiv ist.

Daß die Bedingung hinreicht, ist sehr leicht folgendermaßen einzusehen. Es sei

$$(31)\qquad f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\, \varphi_i(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n,$$

---

[11]) Von Runge, siehe Pólya und Szegö, a. a. O. S. 43—44.

[12]) N. Obreschkoff, Über die Wurzeln algebraischer Gleichungen, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung **33** (1924), S. 52—64. Siehe auch M. Marden, A rule of signs involving certain orthogonal polynomials, Annals of Math. (2) **33** (1931), S. 118—124.

also

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_{00}c_0 + a_{10}c_1 + \ldots + a_{n0}c_n,\\
b_1 &= \quad\; a_{11}c_1 + \ldots + a_{n1}c_n,\\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
b_n &= \qquad\qquad\quad a_{nn}c_n.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Wenn man die gewöhnliche Regel von Descartes auf (31) anwendet, so folgt die Ungleichung

$$N(0, \infty) \leqq v_b. \tag{33}$$

Wenn ferner die Matrix (30) total positiv ist, so ist nach dem Satz der Fußnote [5]) die Transformation (32) variationsvermindernd, also

$$v_b \leqq v_c. \tag{34}$$

Aus (33) und (34) folgt aber

$$N(0, \infty) \leqq v_c, \tag{35}$$

und damit ist gezeigt, daß die Polynomenfolge (29) in $(0, \infty)$ der Regel von Descartes genügt[13]).

Wir schieben den etwas schwierigeren Beweis der zweiten Hälfte des Hauptsatzes auf, um zunächst eine interessante Folgerung hervorzuheben. Aus dem Hauptsatz und der Ungleichung (34) fließt sofort der folgende

Zusatz. *Die klassische Regel von Descartes gibt eine bessere obere Schranke für die Nullstellenanzahl (im Sinne* $\leqq$*), als irgendeine ähnliche, mit Hilfe von Polynomen der Gestalt* (29) *gebildete Regel.*

Wenn also $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist, so ist zwar nach Herrn Obreschkoff die Anzahl v_c der Zeichenwechsel in der Folge der Fourierkoeffizienten

$$c_i = \int_{x_0}^{x_1} p(x) f(x) P_i(x)\, dx \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{36}$$

eine obere Schranke von $N(\eta_n, \infty)$, aber die Anzahl $V(\eta_n)$ der Zeichenwechsel in der Folge der Taylorkoeffizienten

$$f(\eta_n), \quad f'(\eta_n), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(\eta_n)$$

ist ebenfalls eine solche obere Schranke und sogar eine bessere, denn nach (34) ist

$$V(\eta_n) \leqq v_c.$$

6. Der Beweis der zweiten Hälfte des Hauptsatzes stützt sich auf Hilfssatz 4. Zum Beweis desselben benutzen wir den folgenden

---

[13]) Diese erste Hälfte des Hauptsatzes beweist man leicht auch mit Hilfe des allgemeinen Kriteriums von Pólya und Szegö, doch ziehen wir den obigen Beweis vor, weil er gleichzeitig die an sich wichtige Ungleichung (34) ergibt (siehe den Zusatz).

Hilfssatz von Fekete[14]). *In der Matrix*

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{01} & \gamma_{02} & \cdots & \gamma_{0n} \\ \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{Vmatrix} \quad (n > m+1)$$

seien diejenigen Minoren $(m+1)$*ter Ordnung, die man aus konsekutiven Spalten bilden kann, positiv. Ferner seien, wenn man die erste Zeile streicht, alle Minoren* m*ter Ordnung positiv. Dann sind auch alle Minoren* $(m+1)$*ter Ordnung positiv.*

Dieser bemerkenswerte Hilfssatz ist zur Untersuchung total positiver Matrizen sehr geeignet. Zum Beispiel folgt daraus leicht, durch wiederholte Induktionsschlüsse, der folgende Satz: *Wenn in einer Matrix C diejenigen Minoren (aller möglichen Ordnungen), die man aus konsekutiven Zeilen und Spalten bilden kann, positiv sind, so sind überhaupt sämtliche Minoren von C positiv, also insbesondere C total positiv.* Im Fall einer quadratischen Matrix, in der alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonale verschwinden — wir wollen eine solche Matrix kurz eine *Dreiecksmatrix* nennen —, kann man auf Totalpositivität schon aus Bedingungen in viel geringerer Anzahl schließen. Diese vereinfachten hinreichenden Bedingungen werden im folgenden Hilfssatz aufgestellt.

Hilfssatz 4. *Es sei* $C = \|\gamma_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *eine Dreiecksmatrix (d. h.* $\gamma_{ij} = 0$ *für* $i < j$*), in der diejenigen Minoren aller Ordnungen, die man mit konsekutiven Zeilen und, von der ersten Spalte beginnend, mit konsekutiven Spalten bilden kann, positiv sind. Dann ist die Matrix C total positiv.*

Zur Abkürzung sei ein Minor $m$ter Ordnung durch das Symbol

$$(i_1, i_2, \ldots, i_m;\ j_1, j_2, \ldots, j_m)$$

bezeichnet, wobei i_μ und j_μ in wachsender Reihenfolge die Indizes der Zeilen und Spalten des Minors angeben. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes lauten

$$(37)\quad (i, i+1, \ldots, i+m-1;\ 1, 2, \ldots, m) > 0 \text{ für } 1 \leqq i \leqq i+m-1 \leqq n.$$

Es ist sogar jeder Minor der Gestalt

$$(38)\quad (i_1, i_2, \ldots, i_m;\ 1, 2, \ldots, m) > 0 \text{ für } 1 \leqq i_1 < \ldots < i_m \leqq n \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[14]) M. Fekete, Rendiconti di Palermo **34** (1912), S. 92—93.

In der Tat, wenn (38) für $m-1$ (statt m) schon bewiesen ist, so folgt aus

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{m-1};\ 1, 2, \ldots, m-1) > 0$$

und (37), auch schon (38) auf Grund des Hilfssatzes von Herrn Fekete. Ferner können wir aus (38) auch auf die Ungleichungen

$$(39) \qquad (i_1, i_2, \ldots, i_m;\ p, p+1, \ldots, p+m-1) > 0$$
$$\text{für } p \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqq n \quad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

schließen. In der Tat, aus (37) folgt $\gamma_{ii} > 0$ und, wegen $\gamma_{ij} = 0$ für $i < j$ und (38), ferner

$$0 < (1, 2, \ldots, p-1, i_1, \ldots, i_m;\ 1, 2, \ldots, p-1, p, \ldots, p+m-1)$$
$$= \gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{p-1,\,p-1}(i_1, i_2, \ldots, i_m;\ p, p+1, \ldots, p+m-1),$$

und damit ist (39) schon bewiesen. Aus (38) folgt insbesondere

$$\gamma_{ij} > 0 \text{ für } i \geqq j,$$

denn $0 < (1, 2, \ldots, j-1, i;\ 1, 2, \ldots, j-1, j) = \gamma_{11}\gamma_{22}\cdots\gamma_{j-1,\,j-1}\cdot\gamma_{ij}$.

Man bemerke nun, daß ein Minor Q_m ($m$ter Ordnung) von C gelegentlich auch dann verschwinden kann, wenn man seine positiven Elemente als unabhängige Variable betrachtet. In diesem Fall schreiben wir $Q_m \equiv 0$, sonst aber $Q_m \not\equiv 0$. Es ist offenbar dann und nur dann

$$(40) \qquad Q_m = (i_1, \ldots, i_m;\ j_1, \ldots, j_m) \not\equiv 0,$$

wenn alle Elemente seiner Hauptdiagonale (also auch unterhalb derselben) positiv sind, d. h. $i_\mu \geqq j_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, m$. Die Zahl

$$b = j_m - j_1 + 1$$

wollen wir die *Breite* von Q nennen.

Wir behaupten, daß aus (40) *auch*

$$(41) \qquad Q_m > 0$$

folgt.

Die Behauptung sei für Minoren 1ter, 2ter, ... bis $(m-1)$ter Ordnung schon wahr. Ferner ist wegen (39) die Behauptung auch für Minoren $m$ter Ordnung der Breite m schon bewiesen. Es sei die Behauptung auch für Minoren $m$ter Ordnung und von den Breiten $m, m+1, \ldots, b-1$ schon wahr. Wir nennen den Ausdruck Q_m *zerfällbar*, wenn er die Gestalt

$$Q_m = \begin{vmatrix} Q_r & 0 \\ R & Q_{m-r} \end{vmatrix} = Q_r \cdot Q_{m-r} \qquad (1 \leqq r \leqq m-1)$$

hat. In diesem Fall sind Q_r und Q_{m-r} schon positiv und also auch Q_m. *Es sei also unser Q_m als unzerfällbar vorausgesetzt.*

Unter den Spaltenindizes von Q_m seien $j_1, j_2, \ldots, j_p$ konsekutive Zahlen, also $j_p = j_1 + p - 1$, dagegen $j_{p+1} - j_p > 1$. Es gibt ein

solches p $(1 \leqq p \leqq m-1)$, weil die Breite $b > m$ ist. Aus unseren bisherigen Voraussetzungen und Bemerkungen schließen wir, daß

$$\gamma_{i_r, j_r+1} > 0 \quad \text{für} \quad r = 1, \ldots, p, \tag{42}$$

$$\gamma_{i_s, j_s} > 0 \quad \text{für} \quad s = p+1, \ldots, m. \tag{43}$$

In der Tat, wenn ein Element (42) verschwände, so wäre Q_m zerfällbar, und wenn ein Element (43) verschwände, so würde $Q_m \equiv 0$ folgen.

Man bezeichne mit Q^* die Matrix mit m Zeilen und $m+1$ Spalten die entsteht, wenn man zu Q_m noch die (j_p+1)te Spalte hinzufügt. Ferner seien Q'_m und Q''_m die Minoren von Q^*, die entstehen, wenn man die erste bzw. letzte Spalte von Q^* streicht. Die Elemente der Hauptdiagonale von Q'_m sind genau die positiven Elemente (42) und (43). Also ist $Q'_m \not\equiv 0$. Seine Breite aber ist $b-1$, also ist sogar

$$Q'_m > 0. \tag{44}$$

Wegen der Dreiecksgestalt von C ist a fortiori $Q''_m \not\equiv 0$ und deshalb

$$Q''_m > 0. \tag{45}$$

Es sei nun Q^{**} die Matrix der letzten $m-1$ Zeilen von Q^*. *Ich behaupte, daß sämtliche Minoren Q_{m-1} von Q^{**} positiv sind.* Für Minoren $(m-1)$ter Ordnung folgt aus $Q_{m-1} \not\equiv 0$ auch $Q_{m-1} > 0$. Deswegen und wegen der Dreiecksgestalt von C genügt es, nachzuweisen, daß $Q'_{m-1} \not\equiv 0$, wo Q'_{m-1} der mit den letzten $m-1$ Spalten von Q^{**} gebildete Minor von Q^{**} bedeutet. Es ist aber gewiß $Q'_{m-1} \not\equiv 0$, denn die Elemente seiner Hauptdiagonale sind die positiven Elemente (42) und (43), vom ersten Element γ_{i_1, j_1+1} abgesehen. Auf die Matrix Q^* können wir auf Grund des letzten Ergebnisses und der Ungleichungen (44) und (45) den Hilfssatz von Herrn Fekete anwenden und schließen, daß alle Minoren $m$ter Ordnung von Q^* positiv sind, also insbesondere auch $Q_m > 0$.

7. Jetzt können wir den zweiten Teil des Hauptsatzes in wenigen Worten beweisen. Man setze also voraus, daß die Polynomenfolge (29) in $(0, \infty)$ der Descartesschen Regel genügt und betrachte für irgendein positives x die Wronskische Matrix

$$W(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_0(x) & 0 & 0 & \ldots & 0, \\ \varphi_1(x) & \varphi'_1(x) & 0 & \ldots & 0, \\ \varphi_2(x) & \varphi'_2(x) & \varphi''_2(x) & \ldots & 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x) & \varphi'_n(x) & \varphi''_n(x) & \ldots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{Vmatrix}. \tag{46}$$

Nach dem Kriterium von Pólya und Szegö und den Ungleichungen

$$W[\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \ \ldots, \ \varphi_m(x)] = 1!\,2! \ldots m!\ a_{00} a_{11} \ldots a_{mm} > 0$$

folgt, daß die Dreiecksmatrix $W(x)$ den Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 genügt. Also ist $W(x)$ total positiv. Nach dem Grenzübergang $x \to 0$ ist aus Stetigkeitsgründen auch $W(0)$ und also auch die Matrix (30) total positiv.

8. Zur weiteren Klärung der Verhältnisse dient der folgende merkwürdige Satz

V. *Für irgendeine Polynomenfolge* (29) *gibt es eine (genügend große) Zahl* ξ, *so daß diese Polynomenfolge im Intervall* (ξ, ∞) *der Regel von Descartes genügt.*

Nach dem Kriterium von Pólya und Szegö und dessen Vereinfachung in Fußnote [9]) genügt es, eine Zahl ξ derart zu bestimmen, daß für $x > \xi$ alle Minoren der Wronskischen Matrix (46) mit konsekutiven Zeilen und mit der ersten Spalte beginnenden konsekutiven Spalten positiv sind. Diese Minoren sind gewisse Polynome $\Phi(x)$, deren höchste Glieder identisch sind mit den *entsprechenden* Minoren der folgenden Matrix der höchsten Glieder der Elemente der Matrix (46):

$$(47) \qquad \begin{Vmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11}x & 1!\,a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{22}x^2 & 2\,a_{22}x & 2!\,a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn}x^n, & n\,a_{nn}x^{n-1}, & n(n-1)\,a_{nn}x^{n-2}, & \dots & n!\,a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Wegen $a_{00} > 0$, $a_{11} > 0$, ..., $a_{nn} > 0$ genügt die Folge $a_{00}, a_{11}x, \dots, a_{nn}x^n$ für $x > 0$ der Regel von Descartes, und deshalb sind nach dem Kriterium von Pólya und Szegö die höchsten Glieder jener Polynome $\Phi(x)$ für $x > 0$ positiv. Es gibt also gewiß ein ξ so, daß für $x > \xi$ alle $\Phi(x) > 0$ sind. Der kleinstmögliche Wert der Zahl ξ in Satz V ist offenbar gleich der Größten unter den reellen Wurzeln aller Gleichungen $\Phi(x) = 0$ [15]).

Satz V zeigt deutlich, daß das Interesse der Sätze III und IV nur in der genauen Bestimmung des kleinsten Wertes von ξ liegt, welcher

---

[15]) Man kann den Sachverhalt auch folgendermaßen fassen. Falls in (29) $a_{ij} = 0$ für $i > j$, so genügt die Folge (29) der Regel von Descartes in $(0, \infty)$. Bei beliebigen Werten der a_{ij} für $i > j$ können die „störenden" Glieder $a_{ij}x^j$ $(i > j)$ das Bestehen dieser Regel höchstens auf einer endlichen Strecke verhindern. Dieselbe Tatsache bleibt bestehen, wenn als störende Glieder auch noch etwa Glieder der Gestalt $\Sigma A_i \log(x + \alpha_i) + \Sigma B_i \cos\beta_i x + \Sigma C_i \sin\gamma_i x$ hinzukommen, welche es ebenfalls nicht verhindern können, daß die Minoren $\Phi(x)$ für große x positiv sind.

in beiden diesen Sätzen gleich der größten Wurzel der Gleichung $\varphi_n(x) = 0$ ist [16]).

9. Es ist vielleicht nicht uninteressant, zu zeigen, wie man mit den hier benutzten Hilfsmitteln die Sätze III und IV sehr einfach direkt beweisen kann. Zum Beweis des Satzes IV betrachte man die Wronskische Matrix (46) für $\varphi_i(x) = P_i(x)$. Nach den Ausführungen der vorhergehenden Nummer ist ein Minor der Gestalt

$$Q(x) = \begin{vmatrix} P_r(x) & P_r'(x) & \dots & P_r^{(s)}(x) \\ P_{r+1}(x) & P_{r+1}'(x) & \dots & P_{r+1}^{(s)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{r+s}(x) & P_{r+s}(x) & \dots & P_{r+s}^{(s)}(x) \end{vmatrix} \qquad (0 < r < r+s \leqq n)$$

für genügend großes x gewiß positiv. Der Satz IV ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß der Minor $Q(x)$ sogar für $x > \eta_n$ schon positiv ist [$\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n$ sind die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$]. Zu diesem Zweck betrachte man das Polynom

$$\Phi(x) = c_r P_r(x) + c_{r+1} P_{r+1}(x) + \dots + c_{r+s} P_{r+s}(x). \tag{48}$$

---

[16]) In diesem Zusammenhang ist die folgende, von Herrn Pólya angeregte Frage von Interesse: *Die Polynome $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ der Folge* (29) *sollen lauter reelle und einfache Nullstellen haben, und außerdem sollen die Nullstellen von $\varphi_i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n-1)$ diejenigen von $\varphi_{i+1}(x)$ trennen. Kann man in diesem Fall die Zahl ξ des Satzes* V *bis auf die größte Wurzel η_n der Gleichung $\varphi_n(x) = 0$ herunterdrücken?* Das man diese Frage im allgemeinen verneinend beantworten muß, zeigt, für $n = 4$, das Beispiel der Folge

$$1,\ \left(x+\frac{1}{2}\right),\ (x+1)\left(x+\frac{1}{1000}\right),\ (x+10\,000)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{1001}\right),$$

$$(x+100\,000)(x+1000)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{1003}\right).$$

Hier ist $\eta_4 = -\frac{1}{1003} < 0$, während, wegen des Hauptsatzes, Satz V nur mit einem positiven ξ gelten kann. In der Tat ist in diesem Fall die Matrix (30) nicht total positiv, denn eine einfache Rechnung zeigt, daß der Minor

$$\begin{vmatrix} a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} < 0$$

ist.

Noch unbeantwortet ist die folgende, ebenfalls von Herrn Pólya stammende Fragestellung: *Das Polynom $n$ten Grades $f(x)$ habe lauter reelle einfache Wurzeln $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n$. Genügt die Folge*

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \dots,\ f^{(n)}(x)$$

der Descartesschen Regel schon für $x > \eta_n$?

Wir behaupten: *Das Polynom $\Phi(x)$ hat im Intervall $\eta_1 \leqq x \leqq \eta_n$ mindestens r Nullstellen.* Angenommen, es hat in $[\eta_1, \eta_n]$ weniger als r Nullstellen, etwa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m < r)$, dann ist etwa

$$(49) \qquad \Phi(x) = \prod_{\nu=1}^{m} (x - \alpha_\nu) \cdot \Psi(x) \quad \text{mit} \quad \Psi(x) > 0 \text{ für } \eta_1 \leqq x \leqq \eta_n.$$

Wegen (28) gelten die Gleichungen

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x)\, \Phi(x)\, P_i(x)\, dx = 0 \quad (i = 0, \ldots, r-1)$$

und eine passende lineare Kombination derselben ergibt wegen (49)

$$(50) \qquad \int_{x_0}^{x_1} p(x)\, \Phi(x) \prod_{1}^{m} (x - \alpha_\nu)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} p(x)\, \Psi(x) \prod_{1}^{m} (x - \alpha_\nu)^2\, dx = 0.$$

Der Grad des Polynoms

$$G(x) = \Psi(x) \prod_{1}^{m} (x - \alpha_\nu)^2$$

übertrifft gewiß nicht die Zahl $2n - 1$, und die bekannte Formel der mechanischen Quadratur ergibt

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x)\, \Psi(x) \prod_{1}^{m} (x - \alpha_\nu)^2\, dx = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i G(\eta_i) > 0;$$

denn hier sind $\sigma_i > 0$, $G(\eta_i) \geqq 0$, und mindestens eine dieser letzten Größen ist positiv, wodurch wir einen Widerspruch zur Gleichung (50) erreicht haben.

Wir schließen nun sofort, daß $Q(x) > 0$ für $x > \eta_n$ ist, denn wäre $Q(\bar{x}) = 0$ für ein $\bar{x} > \eta_n$, so gäbe es ein Polynom $\Phi(x)$ $(\not\equiv 0)$ der Form (48), welches in $x = \bar{x}$ eine $(s+1)$-fache Nullstelle hat, die zusammen mit den schon nachgewiesenen r Nullstellen im Intervall $[\eta_1, \eta_2]$, insgesamt $r + s + 1$ Nullstellen von $\Phi(x)$ ergibt; dies ist aber für ein Polynom vom Grad $\leqq r + s$ unmöglich.

Eine ähnliche, aber einfachere Schlußweise beweist auch Satz II; denn das mit den Polynomen (26) gebildete Polynom $\Phi(x)$ hat offenbar mindestens r Nullstellen im Intervall $\operatorname{Min} \xi_\nu \leqq x \leqq \operatorname{Max} \xi_\nu$ (und zwar die Nullstellen $x = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$), und der Beweis des Satzes III wird sofort wie oben zu Ende geführt.

§ 4.

Einige Anwendungen zur Abzählung komplexer Wurzeln.

10. Man verdankt Herrn Obreschkoff (a. a. O. S. 61) den folgenden wichtigen Satz

VI. *Die Folge* $1, x, x^2, \ldots, x^n$ *genügt der Regel von Descartes nicht nur innerhalb des Intervalls* $(0, \infty)$, *sondern sogar innerhalb des Winkels der komplexen Ebene*

$$-\frac{\pi}{n} < \arg x < \frac{\pi}{n}. \tag{51}$$

Damit ist folgendes gemeint: Für eine reelle Gleichung (1) ist die rechte Seite $v_a = V(0)$ der Ungleichung (3) sogar eine obere Schranke für die Anzahl der Wurzeln innerhalb des Winkels (51).

Aus diesem Satz und der Identität (4) folgt sofort Satz

VII. *Die Schranke* v_b *der Descartes-Jacobischen Regel* (5) *ist sogar eine obere Schranke für die Anzahl der Wurzeln von* (1) *innerhalb der Kreislinse*

$$-\frac{\pi}{n} < \arg \frac{x-\alpha}{\beta-x} < \frac{\pi}{n}, \tag{52}$$

von deren Rand man die Strecke $\overline{\alpha\beta}$ *unter dem Winkel* $\frac{n-1}{n}\pi$ *sieht.*

Aus diesem Satz und den Ungleichungen (6) und (21) folgt sofort Satz

VIII. *Die Sätze* I *und* II *von Budan-Fourier und Laguerre geben obere Schranken* $V(\alpha) - V(\beta)$ *bzw.* v_c *für die Anzahl der Wurzeln von* (1) *sogar innerhalb der Kreislinse* (52).

Wenn die Polynomenfolge (29) in $(0, \infty)$ der Descartesschen Regel genügt, so zeigt Satz VI und die Ungleichung (34), daß diese Polynomenfolge der Descartesschen Regel sogar innerhalb des Winkels (51) genügt. Diese Bemerkung läßt sich auf die Sätze III und IV anwenden und ergibt also insbesondere den folgenden Satz

IX. *Die Polynomenfolge* (27) *des Satzes* IV *genügt der Regel von Descartes sogar innerhalb des Winkels*

$$-\frac{\pi}{n} < \arg(x - \eta_n) < \frac{\pi}{n}.$$

(Eingegangen am 1. Juni 1933.)

Über die Koeffizientensummen einiger Klassen von Potenzreihen.

Von

Viktor Levin in Berlin.

§ 1.

Einleitung und Übersicht über die Ergebnisse.

Betrachtet man die Menge aller in $|z| < 1$ regulären Funktionen

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu,$$

und hebt aus ihr durch irgendeine Vorschrift oder Bedingung eine Teilmenge, wir sagen Klasse, $\mathfrak{K}$ heraus, so kann es unter Umständen eintreten, daß die Zahlen $|s_n|$,

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu,$$

eine endliche obere Grenze besitzen, wenn bei festem $n \geqq 0$ $f(z)$ alle Funktionen aus $\mathfrak{K}$ durchläuft. Ist dies der Fall, so bezeichnen wir diese obere Grenze mit $\sigma_n(\mathfrak{K})$.

Ist z. B. $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ die durch die Bedingung

$$(E) \qquad |f(z)| \leqq 1$$

in $|z| < 1$ charakterisierte Klasse, so ist nach einem Ergebnis von Herrn Landau[1])

$$\sigma_n(\mathfrak{E}) = G_n,$$

$$(1,1) \qquad G_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1 \cdot 3 \ldots (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2\nu}\right)^2, \quad n \geqq 1, \quad G_0 = 1.$$

[1]) Vgl. z. B. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., Berlin, 1929, S. 26 ff.

Ist $\sigma_n(\mathfrak{K})$ in n nach oben beschränkt, so setzen wir

$$\bar{\sigma}(\mathfrak{K}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sigma_n(\mathfrak{K}),$$

$$\sigma(\mathfrak{K}) = \operatorname*{Max}_{0\leqq n<\infty}\ \sigma_n(\mathfrak{K}),$$

das letzte, wenn das Maximum existiert.

Sei $k \geqq 0$ und ganz. Mit $\mathfrak{P}_k$ bezeichnen wir die Klasse aller Polynome k-ten Grades $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k$, die in $|z| \leqq 1$ (E) genügen. Trivial ist

$$\sigma_0(\mathfrak{P}_k) = \sigma_n(\mathfrak{P}_k) = 1, \quad n \geqq k = 0, 1, \ldots.$$

In § 2 wird durch eine einfache Rechnung gezeigt:

I. $$\sigma_1(\mathfrak{P}_2) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}1547\ldots$$

und

II. $$\sigma_n(\mathfrak{P}_k) \leqq \operatorname{Min}\{G_n, 1 + G_{k-n-1}\},$$
$$k \geqq 3, \quad 1 \leqq n \leqq k-1,$$

wo G_ν durch $(1, 1)$ erklärt sind. Aus II leiten wir dann in Verschärfung des wegen $\mathfrak{P}_k \subset \mathfrak{E}$ trivialen

$$\varliminf_{k\to\infty} \{\sigma_k(\mathfrak{E}) - \sigma(\mathfrak{P}_k)\} \geqq 0$$

III. $$\varliminf_{k\to\infty} \{\sigma_k(\mathfrak{E}) - \sigma(\mathfrak{P}_k)\} \geqq \frac{1}{\pi}\ln(1 + e^{-\pi})$$

ab.

Sei ferner $p \geqq 1$ und ganz, $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots$ eine Folge reeller positiver Zahlen. Mit $\mathfrak{A}_p(\alpha_\nu)$ bezeichnen wir die durch

$(A_p(\alpha_\nu))$ $$\sum_{\nu=p}^{\infty} \alpha_\nu |a_\nu|^2 \leqq 1$$

und $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(p-1)}(0) = 0$ charakterisierte Klasse. *Es ist*

$$\sigma_n(\mathfrak{A}_p(\alpha_\nu)) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leqq n \leqq p-1 \\ \sqrt{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu}} & \text{für} \quad p \leqq n. \end{cases}$$

Dies ist eine unmittelbare Folge der Schwarzschen Ungleichung; denn es ist für $n \geqq p$

$$|s_n| \leqq \sum_{\nu=p}^{n} |a_\nu| \leqq \left\{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu} \cdot \sum_{\nu=p}^{n} \alpha_\nu |a_\nu|^2\right\}^{1/2} \leqq \sqrt{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu}},$$

also

$$\sigma_n(\mathfrak{A}_p(\alpha_\nu)) \leqq \sqrt{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu}}.$$

Andererseits gehört das Polynom

$$f(z) = \sum_{\mu=p}^{n} \frac{z^\mu}{\alpha_\mu \sqrt{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu}}} \sum_{\mu=p}^{n} \frac{z^\mu}{\alpha_\mu}$$

zu $\mathfrak{A}_p(\alpha_\nu)$, und für dieses $f(z)$ gilt

$$s_n = f(1) = \sqrt{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu}}.$$

Wir bekommen so für $\mathfrak{A}_1(\nu)$, das ist die Klasse aller im Nullpunkte verschwindender $f(z)$, welche die Einheitskreisscheibe auf einen Bereich von nicht größerer Fläche abbilden,

$$\sigma_n(\mathfrak{A}_1(\nu)) = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}};$$

es verdient hervorgehoben zu werden, daß während

$$G_n \sim \frac{1}{\pi} \ln n, \tag{1,2}$$

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}} \sim \sqrt{\ln n}$$

bei wachsendem n ist, so daß $(A_1(\nu))$ in diesem Sinne eine stärkere Einschränkung bedeutet als (E).

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu)$ die Klasse aller $f(z)$, welche (E) und $(A_p(\alpha_\nu))$ genügen, und beweisen in § 3 unter Zugrundelegung des Landauschen Abschätzungsgedankens [1]) den

Satz 1. *Es sei* $n \geqq p \geqq 1$; $\Lambda_\nu^{(n)} = \Lambda_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, *mögen alle komplexen Werte durchlaufen, die den* p *Nebenbedingungen*

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} \Lambda_\nu \Lambda_{\mu-\nu} = 1, \quad \mu = n-p+1, \ldots, n, \tag{NB_p}$$

genügen. Es bedeute dabei $u_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu))$ *die untere Grenze des Ausdrucks*

$$U_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu); \Lambda_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} |\Lambda_\nu|^2 + \left\{ \sum_{\mu=0}^{n-p} \frac{\left| 1 - \sum_{\nu=0}^{\mu} \Lambda_\nu \Lambda_{\mu-\nu} \right|^2}{\alpha_{n-\mu}} \right\}^{1/2};$$

dann ist

$$\sigma_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu)) \leqq u_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu)).$$

Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}^{(p)}$ die Klasse aller $f(z)$, welche (E) und

$$(E^{(p)}) \qquad |f^{(p)}(z)| \leqq 1$$

in $|z| < 1$ genügen, und beweisen analog den

Satz 2. *Es sei* $n \geqq p \geqq 1$; $\Lambda_\nu^{(n)} = \Lambda_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, $\mathsf{M}_\nu^{(n)} = \mathsf{M}_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-p$, *mögen alle komplexen Werte durchlaufen, die den Nebenbedingungen* (NB_p) *und*

$$(NB^{(p)}) \qquad \sum_{\nu=0}^{\mu} \left\{ \Lambda_\nu \Lambda_{\mu-\nu} + \frac{(n-\mu)!}{(n-\mu-p)!} \mathsf{M}_\nu \mathsf{M}_{\mu-\nu} \right\} = 1,$$

$$\mu = 0, 1, \ldots, n-p,$$

genügen. Es bedeute dabei $u_n(\mathfrak{E}^{(p)})$ *die untere Grenze des Ausdrucks*

$$U_n(\mathfrak{E}^{(p)};\ \Lambda_\nu, \mathsf{M}_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} |\Lambda_\nu|^2 + \sum_{\nu=0}^{n-p} |\mathsf{M}_\nu|^2;$$

dann ist

$$\sigma_n(\mathfrak{E}^{(p)}) \leqq u_n(\mathfrak{E}^{(p)}).$$

Am Schluß des § 3 werden noch Zusätze zu diesen Sätzen bewiesen, die sich auf $\sigma_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu))$ bzw. $\sigma_n(\mathfrak{E}^{(p)})$ für $0 \leqq n \leqq p-1$ beziehen.

Die große Allgemeinheit dieser Sätze bringt es mit sich, daß ihre numerische Auswertung in den meisten Fällen ziemlich schwer erscheint. Andererseits sind aber die meisten bekannten Abschätzungen der $\sigma_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu))$ in dem Satz 1 enthalten; die Klassen $\mathfrak{E}^{(p)}$ für $p > 1$ scheinen überhaupt noch nicht behandelt zu sein, und alle bekannten Abschätzungen von $\sigma_n(\mathfrak{E}')$ gelten schon für $\sigma_n(\mathfrak{E}_1(\nu^2))$ (man beachte $\mathfrak{E}' \subset \mathfrak{E}_1(\nu^2)$).

Von den Klassen $\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu)$ fand insbesondere die Klasse $\mathfrak{E}_1(\nu)$, das ist die Klasse aller in $|z| < 1$ regulären und absolut Eins nicht übersteigenden Funktionen, welche die Einheitskreisscheibe auf einen Bereich von nicht größerer Fläche abbilden, Behandlung.

Herr L. Fejér[2]) bewies auf Grund seines Satzes, nach dem in $\mathfrak{E}$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \right| \leqq n+1$$

ist,

$$\sigma_n(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

---

[2]) L. Fejér, Über die Koeffizientensumme einer beschränkten und schlichten Potenzreihe, Acta Mathematica 49 (1926), S. 183—190, wo sich auch weitere Literaturangaben finden.

mit Hilfe der einfachen Rechnung

$$|s_n| = \frac{1}{n+1}\left|\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu\right|$$

$$\leqq 1 + \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} \nu|a_\nu| \leqq 1 + \frac{1}{n+1}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} \nu}.$$

In § 4 werden wir zunächst zeigen, daß diese Abschätzung als der einfachste Spezialfall in dem Satz 1 enthalten ist. Aus ihr folgt weiter

$$\bar{\sigma}(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq 1 + 1/\sqrt{2} = 1{,}7071\ldots.$$

Herr G. Szegö hat diese Abschätzung zu

$$\bar{\sigma}(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq 1{,}6160\ldots$$

verbessert[3] [4]). Im weiteren Verlauf des § 4 beweisen wir nun

IV. *Es bedeute $\varphi(x)$ eine in $0 \leqq x \leqq 1$ definierte reelle und einmal stetig differentiierbare Funktion, die der Nebenbedingung*

$$(NB) \qquad \int_{x=0}^{1} \varphi(x)\,\varphi(1-x)\,dx = 1$$

genügen möge. Es bedeute

$$u_\infty(\mathfrak{E}_1(\nu))$$

die untere Grenze des Ausdrucks

$$U_\infty(\mathfrak{E}_1(\nu);\ \varphi(x)) = \int_{x=0}^{1} \varphi^2(x)\,dx + \left\{\int_{x=0}^{1}\left\{1 - \int_{y=0}^{x} \varphi(y)\,\varphi(x-y)\,dy\right\}^2 \frac{dx}{1-x}\right\}^{1/2},$$

wenn $\varphi(x)$ die Menge aller zugelassenen Funktionen durchläuft; dann ist

$$\bar{\sigma}(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq u_\infty(\mathfrak{E}_1(\nu)).$$

Aus IV werden wir dann die Abschätzung

V. *Sei*

$$a = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{13}{9} - \frac{\pi}{8}};$$

---

[3]) G. Szegö, Zur Theorie der schlichten Abbildungen, Math. Annalen 100 (1928), S. 204 ff.

[4]) Die Fejérsche und die Szegösche Abschätzung zeigen sogar, daß

$$\sigma(\mathfrak{E}_1(\nu)) < 1{,}7071\ldots \quad \text{bzw.} \quad \sigma(\mathfrak{E}_1(\nu)) < 1{,}6160\ldots$$

ist, falls es existiert; die beiden Autoren beziehen übrigens ihre Abschätzung auf die Klasse $\mathfrak{E}_s$ aller in $|z| < 1$ absolut Eins nicht übersteigenden Funktionen, die ebenda schlicht sind, benutzen aber nur Eigenschaften der Klasse $\mathfrak{E}_1(\nu)$.

dann ist

$$\bar{\sigma}(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq 1 + \frac{4-\pi}{8}$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi^2}{768} - \left(\frac{4}{15} + \frac{\pi}{63}\right)a + \frac{32}{45}(7 - 10\ln 2)\,a^2} = 1{,}6049\ldots$$

gewinnen.

Am Schluß des § 4 verschärfen wir die triviale Abschätzung

$$\sigma_n(\mathfrak{E}_1(\nu)) \geqq 1$$

zu

VI. $$\sigma_n(\mathfrak{E}_1(\nu)) \geqq 1 + \frac{G_n - 1}{\sqrt{n}}$$

mit G_n aus (1, 1). Für $n = 2$ haben wir also

$$1 + \frac{25}{64\sqrt{2}} = 1{,}2762\ldots \leqq \sigma_2(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq G_2 = 1{,}3906\ldots.$$

Unter den weiteren Klassen des Typs $\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu)$ verdienen noch die Klassen

(1, 3) $$\mathfrak{E}_p\left\{\left(\frac{\nu!}{(\nu-p)!}\right)^2\right\}$$

besondere Beachtung. Die Klasse (1, 3) umfaßt für $p \geqq 1$ alle $f(z)$ aus $\mathfrak{E}$, für die

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |f^{(p)}(r e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leqq 1$$

ausfällt.

Auf die explizite Aufstellung der aus dem Satz 1 folgenden Abschätzungen für

$$\sigma_n\left\{\mathfrak{E}_p\left[\left(\frac{\nu!}{(\nu-p)!}\right)^2\right]\right\}$$

kann hier jedoch verzichtet werden.

In § 5 wenden wir den Satz 2 auf die Klasse $\mathfrak{E}'$ an, und beweisen die Abschätzungen

VII. $$\sigma_2(\mathfrak{E}') < 1{,}338 < G_2 = \sigma_2(\mathfrak{E}),$$

und für $n \geqq 3$

VIII. $$\sigma_n(\mathfrak{E}') \leqq 1 + \frac{1}{n+1} G_{n-1}.$$

Bezüglich der Abschätzungen von $\sigma_n(\mathfrak{E}')$ nach unten ist außer der trivialen $\sigma_n(\mathfrak{E}') \geqq 1$, $n \geqq 0$, durch Herrn Takahashi [5])

$$\sigma_1(\mathfrak{E}') \geqq 10/9 = 1{,}111\ldots$$

bekannt. Wir verschärfen diese Abschätzung zu

---

[5]) Sh. Takahashi, Über die Grenzen der Abschnitte gewisser Potenzreihen, Japanese Journal of Mathematics 7 (1930), S. 55 ff.

IX. *Es bedeute für* $n \geqq 1$

$$S(n) = \left\{\frac{\sqrt{4n^2+4n+9}-3}{2(n+1)}\right\}^n \frac{(2n^2+5n+3)\sqrt{4n^2+4n+9}-(4n^3+12n^2+15n+7)}{2(n+1)^2}.$$

Dann ist für ungerades n

$$\sigma_n(\mathfrak{E}') \geqq 1 + S(n),$$

und für gerades n

$$\sigma_n(\mathfrak{E}') \geqq 1 + \tfrac{1}{2} S(n-1).$$

Speziell folgt aus IX für $n = 1$

$$\sigma_1(\mathfrak{E}') \geqq 1 + \frac{71 - 17\sqrt{17}}{8} = 1{,}113\ldots.$$

Aus VIII folgt mit Rücksicht auf (1, 2)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\ln n}(\sigma_n(\mathfrak{E}') - 1) \leqq \frac{1}{\pi};$$

aus IX folgt als Gegenstück dazu

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2(\sigma_n(\mathfrak{E}') - 1) \geqq \frac{2}{e},$$

wenn n über die ungeraden Zahlen läuft, und

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, n^2(\sigma_n(\mathfrak{E}') - 1) \geqq \frac{1}{e},$$

wenn n über die geraden Zahlen läuft.

Über $\sigma_1(\mathfrak{E}')$ sagt der Satz 2 nichts als das triviale

$$\sigma_1(\mathfrak{E}') \leqq \sigma_1(\mathfrak{E}) = G_1 = 1 + \tfrac{1}{4} = 1{,}25$$

aus. In § 6 werden wir nun unter Anwendung einer geometrischen Betrachtung

X. $$\sigma_1(\mathfrak{E}') \leqq \operatorname*{Max}_{\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{2\pi}{3}} \left\{2\cos(\pi-\varphi) + 2\frac{\pi-\varphi}{\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi\varphi}{2(\pi-\varphi)}}{\sin\varphi}\right\} = 1{,}21\ldots$$

zeigen. Ferner deuten wir eine noch bessere Abschätzung für $\sigma_1(\mathfrak{E}')$ nach oben an, die

XI. $$\sigma_1(\mathfrak{E}') \leqq 1{,}19\ldots$$

liefert.

In § 7 betrachten wir die Klassen $\mathfrak{S}_k$, $k = 2$ und 3, wo $\mathfrak{S}_k$ alle in $|z| < 1$ regulären, schlichten und normierten Funktionen

$$f(z) = z + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu,\ a_1 = 1,\ a_\nu = 0, \quad \text{wenn } \nu \not\equiv 1 \pmod{k},$$

umfaßt. Für $\mathfrak{S}_2$, die Klasse aller normierten, schlichten und ungeraden Funktionen $f(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \ldots$, haben kürzlich die Herren Littlewood und Paley [6]) [7]) den lange vermuteten Satz

$$a_n = O(1)$$

bewiesen. Daraus folgt, daß $\sigma_n(\mathfrak{S}_2) = O(n)$ ist. Wir zeigen genauer [15])

XII. $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sigma_n(\mathfrak{S}_2)}{n} \leqq \operatorname*{Min}_{0<\varepsilon} \frac{\sqrt{e^{2\varepsilon}-1}}{2\varepsilon} = 1{,}24\ldots.$$

Andererseits gilt für $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Ferner zeigen wir [15])

XIII. $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sigma_n(\mathfrak{S}_3)}{n^{2/3}} \leqq \operatorname*{Min}_{0<\varepsilon} \frac{\sqrt{e^{2\varepsilon}-1}}{3^{1/6}\,\varepsilon^{2/3}} = 1{,}68\ldots.$$

Andererseits gilt für $f(z) = z(1-z^3)^{-2/3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|s_n|}{n^{2/3}} = \frac{1}{3}.$$

§ 2.

Die Klassen $\mathfrak{P}_k$.

1. Es sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ ein Polynom aus $\mathfrak{P}_2$; da es zu jedem solchen $f(z)$ ein $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$ aus $\mathfrak{P}_2$ gibt, so daß $|b_0 + b_1| = |a_0| + |a_1|$ ist, dürfen für die Bestimmung von $\sigma_1(\mathfrak{P}_2)$ a_0 und a_1 als reell und nicht negativ vorausgesetzt werden. Sei also

$$\alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0, \quad \gamma \geqq 0, \quad 0 \leqq c < 2\pi,$$
$$f(z) = \alpha + \beta z + \gamma e^{ic} z^2.$$

Aus Symmetriegründen folgt weiter, daß für dasjenige $f(z)$, für welches $\alpha + \beta$ ein Maximum wird (ein solches existiert), $c = \pi$ sein muß, so daß es für unseren Zweck

$$f(z) = \alpha + \beta z - \gamma z^2$$

aus $\mathfrak{P}_2$ zu betrachten genügt.

Für $z = e^{i\varphi}$ wird $|f(z)|^2 = \Phi(\varphi)$ mit

(2, 1) $$\Phi(\varphi) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta(\alpha - \gamma)\cos\varphi - 2\alpha\gamma\cos 2\varphi,$$

[6]) Littlewood und Paley, A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients, The Journal of the London Math. Soc. 7 (1932), S. 167—169.

[7]) Vgl. eine in der Mathematischen Zeitschrift im Anschluß an diese Arbeit erscheinende Note, wo das Littlewood-Paleysche Resultat verallgemeinert wird.

so daß

$$1 = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \varphi < 2\pi} \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi_0)$$

mit $\sin \varphi_0 = 0$ oder $\cos \varphi_0 = \beta(\alpha - \gamma)/4\alpha\gamma$ gilt. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle.

1. Fall.

(2, 2) $$|\beta(\alpha - \gamma)| \geqq 4\alpha\gamma.$$

Hier kann $\alpha = \gamma$ ausgeschlossen werden, denn dann ist wegen (2, 2) $\alpha = \gamma = 0$. Es ergibt sich, daß wenn $\operatorname{sgn}(\alpha - \gamma) = +1$

$$\varphi_0 = 0,$$

und wenn $\operatorname{sgn}(\alpha - \gamma) = -1$

$$\varphi_0 = \pi$$

ist. Die erste Möglichkeit liefert

$$\sqrt{\Phi(\varphi_0)} = \alpha + \beta - \gamma = 1, \quad \gamma = \alpha + \beta - 1,$$

also

$$\alpha \leqq \tfrac{1}{2}(1 - \beta + \sqrt{1 - \beta}), \quad \alpha + \beta \leqq \beta + \tfrac{1}{2}(1 - \beta + \sqrt{1 - \beta}) \leqq \tfrac{9}{8}.$$

Die zweite Möglichkeit liefert analog

$$\sqrt{\Phi(\varphi_0)} = -\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \gamma = \alpha - \beta + 1,$$

also

$$\alpha \leqq \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 - \beta} - 1 + \beta), \quad \alpha + \beta \leqq \beta + \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 - \beta} - 1 + \beta) \leqq \tfrac{25}{24} < \tfrac{9}{8}.$$

2. Fall.

(2, 3) $$|\beta(\alpha - \gamma)| < 4\alpha\gamma.$$

Hier ist $\cos \varphi_0 = \beta(\alpha - \gamma)/4\alpha\gamma$, also

$$\Phi(\varphi_0) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \frac{\beta^2(\alpha - \gamma)^2}{4\alpha\gamma} + 2\alpha\gamma = (\alpha + \gamma)^2 + \beta^2 \frac{(\alpha + \gamma)^2}{4\alpha\gamma} = 1,$$

$$\beta^2 = \frac{4\alpha\gamma}{(\alpha + \gamma)^2}\{1 - (\alpha + \gamma)^2\},$$

(2, 4) $$\alpha + \beta = \alpha + \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\alpha + \gamma}\sqrt{1 - (\alpha + \gamma)^2}.$$

Setzt man mit $\lambda > 0$ (der Fall $\lambda = 0$ ist ohne Interesse wegen des folgenden $\alpha = \gamma = 0$) $\gamma = \lambda\alpha$, und sucht dann das Maximum der rechten Seite von (2, 4) als Funktion von α, so rechnet man nach, daß dieses für

$$\alpha = \frac{1}{(1 + \lambda)\sqrt{1 + 4\lambda}}$$

angenommen wird, und gleich

$$\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{1+\lambda}$$

ist. Wir haben also

$$\alpha+\beta \leqq \frac{\sqrt{1+4\lambda}}{1+\lambda} \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Da $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}15\ldots > 1{,}125 = \frac{9}{8}$ ist, bekommen wir $\sigma_1(\mathfrak{P}_2) \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$, oder, da

$$f(z) = \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} z - \frac{1}{3\sqrt{3}} z^2$$

zu $\mathfrak{P}_2$ gehört und $\alpha+\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ besitzt,

$$\sigma_1(\mathfrak{P}_2) = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

womit I bewiesen ist.

2. Mit dem Polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k$ gehört auch

$$z^k \bar{f}(z^{-1}) = \bar{a}_k + \bar{a}_{k-1} z + \ldots + \bar{a}_0 z^k$$

zu $\mathfrak{P}_k$. Denn mit $\zeta = e^{i\varphi}$ ist

$$|\zeta^k \bar{f}(\zeta^{-1})| = |\bar{f}(\zeta^{-1})| = |\bar{f}(\bar{\zeta})| = |f(\zeta)| \leqq 1.$$

Deshalb ist mit $1 \leqq n \leqq k-1$

$$\begin{aligned} |a_0 + \ldots + a_n| &\leqq |f(1)| + |a_{n+1} + \ldots + a_k| \\ &\leqq 1 + |\bar{a}_k + \ldots + \bar{a}_{n+1}| \leqq 1 + G_{k-n-1}, \end{aligned}$$

aber auch

$$|a_0 + \ldots + a_n| \leqq G_n,$$

so daß

$$\begin{gathered} \sigma_n(\mathfrak{P}_k) \leqq \operatorname{Min}\{G_n, 1 + G_{k-n-1}\}, \\ 1 \leqq n \leqq k-1, \end{gathered}$$

d. h. II folgt.

3. Da nun G_n mit wachsendem n monoton wächst, so folgt aus II

(2, 5) $$\sigma(\mathfrak{P}_k) \leqq G_{N+1},$$

wo $N = N(k)$ die größte ganze Zahl von der Art ist, daß

$$G_N \leqq 1 + G_{k-N-1},$$

(2, 6) d. h. $$\sum_{\mu=k-N}^{N} g_\mu^2 \leqq 1, \quad g_\mu = \frac{1 \cdot 3 \ldots (2\mu-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2\mu},$$

ausfällt (vgl. (1, 1)). Es ist offenbar für $k > 1$

$$N(k) \leqq k - 1,$$

d. h.

$$\frac{N(k)}{k} < 1.$$

Es sei

$$L = \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{N(k)}{k},$$

und k_ν eine Folge von k-Werten derart, daß

$$L = \lim_{\nu \to \infty} \frac{N(k_\nu)}{k_\nu}$$

ist. Zunächst ist $L < 1$; denn wäre $L = 1$, d. h. $N(k_\nu) = k_\nu - o(k_\nu)$, so wäre nach (1, 2)

$$\frac{G_{N(k_\nu)}}{G_{k_\nu - N(k_\nu) - 1}} \backsim \frac{\ln N(k_\nu)}{\ln\left(k_\nu - N(k_\nu) - 1\right)} = \frac{\ln\left(k_\nu - o(k_\nu)\right)}{\ln\left(o(k_\nu) - 1\right)},$$

und dies geht mit ν gegen ∞, was (2, 6) widerspricht.

Um L angebbar kleiner als Eins abzuschätzen, beachten wir, daß wegen

$$g_\mu = \frac{(2\mu)!}{2^{2\mu}(\mu!)^2} > \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} e^{-\frac{1}{6\mu}},$$

$$\begin{aligned} G_{N(k_\nu)} - G_{k_\nu - N(k_\nu) - 1} = \sum_{\mu = k_\nu - N(k_\nu)}^{N(k_\nu)} g_\mu^2 &> \frac{1}{\pi} \sum_{\mu = k_\nu - N(k_\nu)}^{N(k_\nu)} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{3\mu}} \\ &> \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{3k_\nu(1 - N(k_\nu)/k_\nu)}} \sum_{\mu = k_\nu - N(k_\nu)}^{N(k_\nu)} \frac{1}{\mu} \\ &> \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{3k_\nu(1 - N(k_\nu)/k_\nu)}} \ln \frac{N(k_\nu) + 1}{k_\nu - N(k_\nu)} \end{aligned}$$

ist, also

$$1 \geqq \lim_{\nu \to \infty} \{G_{N(k_\nu)} - G_{k_\nu - N(k_\nu) - 1}\} \geqq \frac{1}{\pi} \ln \frac{L}{1 - L},$$

d. h.

(2, 7)
$$L \leqq \frac{e^\pi}{1 + e^\pi}.$$

Nun ist nach (2, 5)

$$\sigma_k(\mathfrak{E}) - \sigma(\mathfrak{P}_k) = G_k - \sigma(\mathfrak{P}_k) \geqq G_k - G_{N(k)+1},$$

also

(2, 8)
$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} \{\sigma_k(\mathfrak{E}) - \sigma(\mathfrak{P}_k)\} &\geqq \lim_{k \to \infty} \{G_k - G_{N(k)} - g_{N(k)+1}^2\} \\ &= \lim_{k \to \infty} \{G_k - G_{N(k)}\}, \end{aligned}$$

und wegen

$$G_k - G_{N(k)} = \sum_{\mu = N(k)-1}^{k} g_\mu^2 > \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{3(N+1)}} \ln \frac{k+1}{N(k)+1},$$

$$\varliminf_{k \to \infty} \{G_k - G_{N(k)}\} \geqq \frac{1}{\pi} \varliminf_{k \to \infty} \ln \frac{1+1/k}{N(k)/k + 1/k} \tag{2, 9}$$

$$\geqq \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{L} \geqq \frac{1}{\pi} \ln (1 + e^{-\pi}),$$

nach (2, 7); aus (2, 8) und (2, 9) folgt aber III.

§ 3.

Beweis von Satz 1, Satz 2 und der Zusätze.

1. Beweis von Satz 1. Es möge $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ in $\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu)$ liegen. Sei $n \geqq p$, $x_p, \ldots, x_n$ beliebige komplexe Zahlen; dann ist

$$a_0 + \ldots + a_{p-1} + a_p x_p + \ldots + a_n x_n$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{0<|z|=r<1} f(z) \left\{ \frac{1}{z} + \ldots + \frac{1}{z^p} + \frac{x_p}{z^{p+1}} + \ldots + \frac{x_n}{z^{n+1}} + y_0 + y_1 z + \ldots + y_k z^k \right\} dz,$$

mit beliebigen $k \geqq 0$ und komplexen $y_0, \ldots, y_k$. Weiter folgt in bekannter Weise, wenn $z = re^{i\varphi}$, $\zeta = e^{i\varphi}$ gesetzt wird, unter Beachtung von (E) und nach dem Grenzübergang $r \to 1$

$$|a_0 + \ldots + a_{p-1} + a_p x_p + \ldots + a_n x_n|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |x_n + \ldots + x_p \zeta^{n-p} + \zeta^{n-p+1} + \ldots + \zeta^n + y_0 \zeta^{n+1} + \ldots + y_k \zeta^{n+k+1}| \, d\varphi. \tag{3, 1}$$

Wir setzen nun

$$x_n + \ldots + x_p \zeta^{n-p} + \zeta^{n-p+1} + \ldots + \zeta^n + y_0 \zeta^{n+1} + \ldots + y_k \zeta^{n+k+1} = \{\Lambda_0 + \Lambda_1 \zeta + \ldots + \Lambda_n \zeta^n\}^2.$$

Die $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^{(n)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, bestimmen sich aus

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} \Lambda_\nu \Lambda_{\mu-\nu} = x_{n-\mu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, n-p, \tag{3, 2}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} \Lambda_\nu \Lambda_{\mu-\nu} = 1, \quad \mu = n-p+1, \ldots, n. \tag{NB_p}$$

Dabei müssen wir noch voraussetzen, daß die $x_p, \ldots, x_n$ so gewählt sind, daß (NB_p) erfüllt werden kann (was stets möglich ist, wie man sich leicht überzeugt). Es muß also $k = n - 1$ gesetzt werden, und die

$y_0, \ldots, y_k$ drücken sich in bestimmter Weise durch die A_ν, also durch $x_p, \ldots, x_n$ aus, was uns aber weiter nicht interessiert.

Mit diesem Ansatz wird nun

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} |x_n + \ldots + x_p \zeta^{n-p} + \zeta^{n-p+1} + \ldots + \zeta^n + y_0 \zeta^{n+1} + \ldots + y_k \zeta^{n+k+1}|\, d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} |A_0 + A_1 \zeta + \ldots + A_n \zeta^n|^2\, d\varphi = \sum_{\nu=0}^{n} |A_\nu|^2,$$

und wir bekommen unter der gemachten Voraussetzung über die $x_p, \ldots, x_n$ mit Rücksicht auf (3, 1)

$$(3, 3) \qquad |a_0 + \ldots + a_{p-1} + a_p x_p + \ldots + a_n x_n| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |A_\nu|^2.$$

Andererseits folgt aus $(A_p(\alpha_\nu))$

$$|a_p(1-x_p) + \ldots + a_n(1-x_n)| \leqq \sum_{\nu=p}^{n} |1-x_\nu| \cdot |a_\nu|$$
$$\leqq \left\{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{|1-x_\nu|^2}{\alpha_\nu} \cdot \sum_{\nu=p}^{n} \alpha_\nu |a_\nu|^2\right\}^{1/2} \leqq \left\{\sum_{\nu=p}^{n} \frac{|1-x_\nu|^2}{\alpha_\nu}\right\}^{1/2},$$

und wenn die x_ν mit Hilfe von (3, 2) durch $A_0, \ldots, A_n$ ausgedrückt werden,

$$(3, 4) \qquad |a_p(1-x_p) + \ldots + a_n(1-x_n)| \leqq \left\{\sum_{\mu=0}^{n-p} \frac{|1 - \sum_{\nu=0}^{\mu} A_\nu A_{\mu-\nu}|^2}{\alpha_{n-\mu}}\right\}^{1/2}.$$

Aus

$$(3, 5) \qquad |s_n| \leqq |a_0 + \ldots + a_{p-1} + a_p x_p + \ldots + a_n x_n| + |a_p(1-x_p) + \ldots + a_n(1-x_n)|$$

(3, 3) und (3, 4) folgt die Behauptung des Satzes 1.

2. Beweis von Satz 2. Es möge mit $p \geqq 1$ $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ der Klasse $\mathfrak{E}^{(p)}$ angehören. Setzen wir für $\nu \geqq p$

$$(3, 6) \qquad \alpha_\nu = \frac{\nu!}{(\nu-p)!},$$

so ist für $n \geqq p$

$$a_p(1-x_p) + \ldots + a_n(1-x_n)$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{0<|z|=r<1} f^{(p)}(z) \left\{\frac{1-x_p}{\alpha_p}\frac{1}{z} + \ldots + \frac{1-x_n}{\alpha_n}\frac{1}{z^{n-p+1}} + y_0 + \ldots + y_k z^k\right\} dz,$$

bei beliebigen $k \geqq 0$ und $y_0, \ldots, y_k$, und unter Berücksichtigung von $(E^{(p)})$ nach dem Grenzübergang $r \to 1$ mit $\zeta = e^{i\varphi}$ weiter

$$(3,7) \qquad |a_p(1-x_p) + \ldots + a_n(1-x_n)|$$
$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left| \frac{1-x_n}{\alpha_n} + \ldots + \frac{1-x_p}{\alpha_p}\zeta^{n-p} + y_0\zeta^{n-p+1} + \ldots + y_k\zeta^{n-p+k+1} \right| d\varphi.$$

Wir setzen nun, analog wie beim Beweis des Satzes 1,

$$\frac{1-x_n}{\alpha_n} + \ldots + \frac{1-x_p}{\alpha_p}\zeta^{n-p} + y_0\zeta^{n-p+1} + \ldots + y_k\zeta^{n-p+k+1}$$
$$= \{\mathsf{M}_0 + \mathsf{M}_1\zeta + \ldots + \mathsf{M}_{n-p}\zeta^{n-p}\}^2.$$

Die $\mathsf{M}_\nu = \mathsf{M}_\nu^{(n)}$ bestimmen sich dabei aus

$$(3,8) \qquad \sum_{\nu=0}^{\mu} \mathsf{M}_\nu \mathsf{M}_{\mu-\nu} = \frac{1-x_{n-\mu}}{\alpha_{n-\mu}}, \quad \mu = 0, \ldots, n-p.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left| \frac{1-x_n}{\alpha_n} + \ldots + \frac{1-x_p}{\alpha_p}\zeta^{n-p} + y_0\zeta^{n-p+1} + \ldots + y_k\zeta^{n-p+k+1} \right| d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} |\mathsf{M}_0 + \mathsf{M}_1\zeta + \ldots + \mathsf{M}_{n-p}\zeta^{n-p}|^2\, d\varphi = \sum_{\nu=0}^{n-p} |\mathsf{M}_\nu|^2,$$

und also nach (3, 7)

$$|a_p(1-x_p) + \ldots + a_n(1-x_n)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-p} |\mathsf{M}_\nu|^2;$$

daraus, aus (3, 3) und (3, 5) folgt

$$(3,9) \qquad |s_n| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} |\Lambda_\nu|^2 + \sum_{\nu=0}^{n-p} |\mathsf{M}_\nu|^2.$$

Ferner folgt aus (3, 8)

$$x_{n-\mu} = 1 - \alpha_{n-\mu} \sum_{\nu=0}^{\mu} \mathsf{M}_\nu \mathsf{M}_{\mu-\nu}, \quad \mu = 0, \ldots, n-p,$$

und also mit Rücksicht auf (3, 2)

$$(NB^{(p)}) \qquad \sum_{\nu=0}^{\mu} \{\Lambda_\nu \Lambda_{\mu-\nu} + \alpha_{n-\mu}\mathsf{M}_\nu \mathsf{M}_{\mu-\nu}\} = 1, \quad \mu = 0, \ldots, n-p.$$

Aus (3, 9), (NB_p) und $(NB^{(p)})$ folgt nun mit Rücksicht auf (3, 6) der Satz 2.

3. Zusätze zu Satz 1 und Satz 2. Die beiden Sätze enthalten Aussagen über $\sigma_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu))$ bzw. $\sigma_n(\mathfrak{E}^{(p)})$ für $n \geqq p$. Über $\sigma_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu))$ für $0 \leqq n \leqq p-1$ können wir im allgemeinen nur das triviale

$$(3,10) \qquad \sigma_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu)) \leqq \sigma_n(\mathfrak{E}) = G_n.$$

aussagen. Nur in dem Falle, wenn

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu}$$

konvergiert, können wir eine unter Umständen schärfere Abschätzung für $\sigma_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu))$, $0 \leqq n \leqq p-1$, gewinnen.

Zu dem Zweck beachten wir, daß mit $|z| = r < 1$

$$|a_0 + a_1 z + \ldots + a_{p-1} z^{p-1}| \leqq |f(z)| + \sum_{\nu=p} |a_\nu| r^\nu$$

$$\leqq 1 + \left\{ \sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu} \sum_{\nu=p}^{\infty} \alpha_\nu |a_\nu|^2 r^{2\nu} \right\}^{1/2}$$

ist, und also nach dem Grenzübergang $r \to 1$

$$|a_0 + a_1 z + \ldots + a_{p-1} z^{p-1}| \leqq 1 + \sqrt{\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu}} \tag{3, 11}$$

in $|z| \leqq 1$ gilt. Nach der Abschätzung II, und mit Rücksicht auf (3, 10) folgt also der

Zusatz zu Satz 1. *Ist*

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu}$$

konvergent, und bedeutet für $\nu \geqq 0$ G_ν *die Zahl aus* (1, 1), $G_{-1} = 0$, *so ist für* $0 \leqq n \leqq p-1$

$$\sigma_n(\mathfrak{E}_p(\alpha_\nu)) \leqq \operatorname{Min}\left\{ G_n, \left(1 + \sqrt{\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu}}\right)(1 + G_{p-n-2}) \right\}.$$

Da für die α_ν aus (3, 6)

$$\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{1}{\alpha_\nu} = \sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{(\nu-p)!}{\nu!}$$

für $p > 1$ konvergent ist, erhalten wir analog den

Zusatz zu Satz 2. *Bedeutet für* $\nu \geqq 0$ G_ν *die Zahl aus* (1, 1), $G_{-1} = 0$, *so ist für* $p \geqq 2$, $0 \leqq n \leqq p-1$

$$\sigma_n(\mathfrak{E}^{(p)}) \leqq \operatorname{Min}\left\{ G_n, \left(1 + \sqrt{\sum_{\nu=p}^{\infty} \frac{(\nu-p)!}{\nu!}}\right)(1 + G_{p-n-2}) \right\}.$$

§ 4.

Die Klasse $\mathfrak{E}_1(\nu)$.

1. Mit $p = 1$, $\alpha_\nu = \nu$ wird

$$(4,1) \qquad U_n(\mathfrak{E}_1(\nu); \Lambda_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} |\Lambda_\nu|^2 + \left\{ \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{|1 - \sum_{\nu=0}^{\mu} \Lambda_\nu \Lambda_{\mu-\nu}|^2}{n-\mu} \right\}^{1/2}.$$

Der Ansatz $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, der (NB_1) befriedigt, liefert

$$u_n(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq 1 + \left\{ \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\left(1 - \frac{\mu+1}{n+1}\right)^2}{n-\mu} \right\}^{1/2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

d. h. die Fejérsche Abschätzung[8]).

Für $n = 1$ bekommt man nach der Elimination von Λ_1 mit Hilfe von (NB_1)

$$U_1(\mathfrak{E}_1(\nu); \Lambda_\nu) = |\Lambda_0|^2 + \frac{1}{4|\Lambda_0|^2} + |1 - \Lambda_0^2|.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $u_1(\mathfrak{E}_1(\nu)) = 1 + \frac{1}{4}$ ist, also

$$\sigma_1(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq 1 + \tfrac{1}{4}.$$

Es ist sogar

$$\sigma_1(\mathfrak{E}_1(\nu)) = 1 + \tfrac{1}{4},$$

weil $f(z) = (1 + 2z)(2 + z)^{-1}$ zu $\mathfrak{E}_1(\nu)$ gehört und $s_1 = 1 + \frac{1}{4}$ besitzt[9]).

Für $n = 2$ bekommt man nach der Elimination von Λ_2 mit Hilfe von (NB_1)

$$U_2(\mathfrak{E}_1(\nu); \Lambda_\nu) = |\Lambda_0|^2 + |\Lambda_1|^2 + \frac{|1 - \Lambda_1^2|^2}{4|\Lambda_0|^2} + \sqrt{\frac{1}{2}|1 - \Lambda_0^2|^2 + |1 - 2\Lambda_0\Lambda_1|^2}.$$

Der Ansatz $\Lambda_0 = 1$, $\Lambda_1 = \frac{1}{2}$ liefert sofort $u_2(\mathfrak{E}_1(\nu)) \leqq 1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{64} = G_2$[10]).

---

[8]) Man kann auch mit komplizierteren Ansätzen für Λ_ν die Rechnung bis zu einem numerischen Ergebnis durchführen, doch wollen wir auf die Wiedergabe dieser Rechnungen verzichten, da diese Ergebnisse nur um ein Unbedeutendes besser ausfallen.

[9]) Daß $\sigma_1(\mathfrak{E}_1(\nu)) = 1 + \frac{1}{4}$ ist, folgt schon natürlich aus dem Landauschen Ergebnis.

[10]) Es ist aber $\sigma_2(\mathfrak{E}_1(\nu)) < G_2$, denn die in $\mathfrak{E}$ liegende Funktion

$$f(z) = \frac{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}z + z^2}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2}$$

für die $s_2 = G_2$ ist, liegt nicht in $\mathfrak{E}_1(\nu)$, weil das von ihr entworfene Bild des Einheitskreises die Fläche 2π besitzt, wie man aus $|f(e^{i\varphi})| = 1$ und der leicht zu verifizierenden Tatsache entnimmt, daß $f(z) = w$ jeden Wert aus $|w| < 1$ in $|z| < 1$ genau zweimal annimmt.

2. Wenn es auch schwierig erscheint, für $n \geqq 2$ aus dem Satz 1 eine wesentlich neue numerische Abschätzung für $\sigma_n(\mathfrak{E}_1(\nu))$ zu gewinnen, so gibt uns dieser doch ein Mittel in die Hand, die Abschätzung von $\bar{\sigma}(\mathfrak{E}_1(\nu))$ nach oben etwas zu verbessern.

Zu dem Zweck machen wir mit einer in $0 \leqq x \leqq 1$ definierten reellen und einmal stetig differentiierbaren Funktion $\varphi(x)$[11]) den Ansatz

$$\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} \varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)\varphi\left(1-\frac{\nu}{n}\right)\right\}^{1/2}},$$

der (NB_1) befriedigt.

Mit diesem Ansatz geht (4, 1) über in

$$U_n(\mathfrak{E}_1(\nu);\Lambda_\nu) = \frac{\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\varphi^2\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)\varphi\left(1-\frac{\nu}{n}\right)} + \left\{\frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{1}{1-\frac{\mu}{n}}\left(1-\frac{\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{\mu}\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)\varphi\left(\frac{\mu}{n}-\frac{\nu}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\varphi\left(\frac{\nu}{n}\right)\varphi\left(1-\frac{\nu}{n}\right)}\right)^2\right\}^{1/2},$$

und bei $n \to \infty$ geht

$$U_n(\mathfrak{E}_1(\nu);\Lambda_\nu) \to J_\varphi$$

mit

$$J_\varphi = \frac{\int_{x=0}^{1}\varphi^2(x)\,dx}{\int_{x=0}^{1}\varphi(x)\,\varphi(1-x)\,dx} + \left\{\int_{x=0}^{1}\left(1-\frac{\int_{y=0}^{x}\varphi(y)\,\varphi(x-y)\,dy}{\int_{y=0}^{1}\varphi(y)\,\varphi(1-y)\,dy}\right)^2\frac{dx}{1-x}\right\}^{1/2}$$

Zur Bestimmung der unteren Grenze von J_φ, wenn $\varphi(x)$ die Menge aller zugelassenen Funktionen durchläuft, genügt es, $\varphi(x)$ die Nebenbedingung

$$(NB) \qquad \int_{x=0}^{1}\varphi(x)\,\varphi(1-x)\,dx = 1$$

---

[11]) Es genügen auch weniger einschränkende Voraussetzungen über $\varphi(x)$, die aber, wie eine einfache Überlegung lehrt, die zu entwickelnde Abschätzung nicht verbessern.

aufzuerlegen, und die untere Grenze von

$$(J) \qquad U_\infty(\mathfrak{E}_1(\nu);\ \varphi(x))$$

$$= \int_{x=0}^{1} \varphi^2(x)\,dx + \left\{ \int_{x=0}^{1} \left(1 - \int_{y=0}^{x} \varphi(y)\,\varphi(x-y)\,dy \right)^2 \frac{dx}{1-x} \right\}^{1/2}$$

zu suchen. Damit ist die Abschätzung IV bewiesen.

Die Lösung des isoperimetrischen Variationsproblems IV scheint mit großen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Wir beschränken uns daher auf den Ansatz $\varphi(x) = a - b\sqrt{x}$, $a > b > 0$. Die Nebenbedingung (NB) liefert

$$(4,2) \qquad a^2 - \frac{4ab}{3} + \frac{\pi}{8} b^2 = 1.$$

Ferner wird mit Rücksicht auf (4, 2)

$$(4,3) \qquad \int_{x=0}^{1} \varphi^2(x)\,dx = a^2 - \frac{4ab}{3} + \frac{b^2}{2} = 1 + \frac{4-\pi}{8} b^2,$$

und

$$\int_{y=0}^{x} \varphi(y)\,\varphi(x-y)\,dy = a^2 x - \frac{4ab}{3} x\sqrt{x} + \frac{\pi}{8} b^2 x^2,$$

also

$$\int_{x=0}^{1} \left(1 - \int_{y=0}^{x} \varphi(y)\,\varphi(x-y)\,dy\right)^2 \frac{dx}{1-x}$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(1 - a^2 x + \frac{4ab}{3} x\sqrt{x} - \frac{\pi}{8} b^2 x^2\right) \frac{dx}{1-x},$$

oder wenn man die Eins des Integranden durch die linke Seite von (4, 2) ersetzt, weiter

$$= \int_{x=0}^{1} \left(1 - \frac{4ab}{3} \frac{x}{1+\sqrt{x}} + \frac{\pi}{8} b^2 x\right)^2 (1-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4ab}{15} + \frac{\pi}{24} b^2 + \frac{32}{45}(7 - 10\ln 2)\,a^2 b^2 - \frac{\pi}{63} ab^3 + \frac{\pi^2}{768} b^4,$$

woraus und aus (4, 3) und (J) mit Rücksicht auf (4, 2) für $b = 1$ die Abschätzung V entsteht [12]).

---

[12]) Diese Abschätzung kann noch etwas verbessert werden, wenn man statt $b = 1$ $b = 1{,}03$ setzt; man bekommt dann $\bar{\sigma}(\mathfrak{E}_1(\nu)) < 1{,}60478$.

3. Nach Landau liegt für $n \geqq 1$

$$f(z) = \frac{\frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} + \ldots + \frac{1}{2} z^{n-1} + z^n}{1 + \frac{1}{2} z + \ldots + \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n} z^n}$$

in $\mathfrak{E}$ und besitzt $s_n = G_n = \sigma_n(\mathfrak{E})$. Da nun die Gleichung $f(z) = a$ für jedes a höchstens n Wurzeln in $|z| < 1$ besitzt und ebenda $|f(z)| \leqq 1$ gilt, muß die Fläche des von $f(z)$ entworfenen Bildes von $|z| < 1$ kleiner oder gleich $n\pi$ sein. Daraus folgt, daß

$$g(z) = (\sqrt{n} - 1)/\sqrt{n} + f(z)/\sqrt{n}$$

zu $\mathfrak{E}_1(\nu)$ gehört, und ein

$$s_n = 1 + \frac{G_n - 1}{\sqrt{n}}$$

besitzt, womit VI bewiesen ist.

§ 5.

Die Klasse $\mathfrak{E}'$.

1. Mit $p = 1$ geht Satz 2 über in $\sigma_n(\mathfrak{E}') \leqq u_n(\mathfrak{E}')$, wo $u_n(\mathfrak{E}')$ die untere Grenze von

$$U_n(\mathfrak{E}'; \Lambda_\nu, \mathsf{M}_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} |\Lambda_\nu|^2 + \sum_{\nu=0}^{n-1} |\mathsf{M}_\nu|^2,$$

wenn Λ_ν und M_ν alle komplexen Zahlen durchlaufen, die (NB_1) und

$$(NB') \qquad \sum_{\nu=0}^{\mu} \{\Lambda_\nu \Lambda_{\mu-\nu} + (n-\mu)\, \mathsf{M}_\nu \mathsf{M}_{\mu-\nu}\} = 1, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

genügen.

Setzt man hierin $n = 2$ und eliminiert mit Hilfe der Nebenbedingungen Λ_2, M_0 und M_1, so wird

$$U_2(\mathfrak{E}'; \Lambda_\nu, \mathsf{M}_\nu) = |\Lambda_0|^2 + |\Lambda_1|^2 + \frac{|1 - \Lambda_1^2|^2}{4\,|\Lambda_0|^2} + \frac{|1 - \Lambda_0^2|}{2} + \frac{|1 - 2\Lambda_0\Lambda_1|^2}{2\,|1 - \Lambda_0^2|}.$$

Die Annahme $\Lambda_0 = 0{,}7071$, $\Lambda_1 = 0{,}5993$ zeigt VII [13]).

2. Setzt man $\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^{(n)} = 1/\sqrt{n+1}$, so ist (NB_1) erfüllt. Die Bedingungen (NB') geben

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} \left\{\frac{1}{n+1} + (n-\mu)\, \mathsf{M}_\nu \mathsf{M}_{\mu-\nu}\right\} = 1,$$

[13]) Vgl. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, Jahrg. 32, S. 53—59, wo sich weitere Abschätzungen der $\sigma_n(\mathfrak{E}')$ befinden.

oder

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} \mathsf{M}_\nu \mathsf{M}_{\mu-\nu} = \frac{1-\frac{\mu+1}{n+1}}{n-\mu} = \frac{1}{n+1}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Mit $\sqrt{n+1}\,\mathsf{M}_\nu = \mathsf{M}_\nu^*$ gehen diese Gleichungen über in

$$\sum_{\nu=0}^{\mu} \mathsf{M}_\nu^* \mathsf{M}_{\mu-\nu}^* = 1.$$

Es ist also $\mathsf{M}_0^* = 1$, $\mathsf{M}_1^* = \frac{1}{2}$, und für $1 < \mu \leqq n-1$

$$\mathsf{M}_\mu^* = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \mathsf{M}_\nu^* \mathsf{M}_{\mu-\nu}^*\right).$$

Durch Schluß von μ auf $\mu+1$ überzeugt man sich durch eine einfache Rechnung, daß

$$\mathsf{M}_\mu^* = \frac{1.3 \ldots (2\mu-1)}{2.4 \ldots 2\mu}, \quad \mu \geqq 1,$$

ist. Also folgt aus diesem Ansatz (vgl. (1.1))

$$u_n(\mathfrak{E}') \leqq 1 + \frac{1}{n+1} G_{n-1},$$

woraus VIII folgt.

3. Wir betrachten die einparametrige Schar von Funktionen

$$f_\gamma(z) = 1 + \frac{(1-\gamma)^2}{1+\gamma} \frac{z-1}{\gamma z+1}, \quad 0 \leqq \gamma \leqq 1.$$

Man rechnet nach, daß $f_\gamma(z)$ in $\mathfrak{E}'$ liegt, und ein

$$s_n = 1 - (-\gamma)^n \frac{(1-\gamma)^2}{1+\gamma}$$

besitzt. Für ungerades n ist also

$$s_n = 1 + \gamma^n \frac{(1-\gamma)^2}{1+\gamma}.$$

Sucht man das Maximum von $\gamma^n(1-\gamma)^2(1+\gamma)^{-1}$ in $0 \leqq \gamma \leqq 1$, so findet man, daß es für

$$\gamma = \gamma_n = \frac{\sqrt{4n^2+4n+9}-3}{2(n+1)}$$

angenommen wird, und gleich $S(n)$ aus IX ist. Beachten wir ferner, daß

$$f(z) = \tfrac{1}{2} + \frac{z f_{\gamma_n}(z)}{2}$$

zu $\mathfrak{E}'$ gehört, und für ungerades n $s_n = 1 + \frac{1}{2} S(n)$ besitzt, so ergibt sich die Behauptung IX.

§ 6.

Abschätzungen von $\sigma_1(\mathfrak{E}')$ nach oben.

1. Es gehöre $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$ zu $\mathfrak{E}'$. Da es ein $g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots$ aus $\mathfrak{E}'$ mit $|b_0 + b_1| = |a_0| + |a_1|$ gibt, so darf man $a_0 = \alpha$ und $a_1 = \beta$ als reell und $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 < \beta \leqq 1$ voraussetzen. Wegen $(\mathfrak{E}')$ ist, wenn

$$F(z) = \int_{\zeta=0}^{z} f'(\zeta)\, d\zeta$$

gesetzt wird, in $|z| < 1$ $|F(z)| \leqq 1$.

Da nun $f(z) = \alpha + F(z)$ zu $\mathfrak{E}'$ gehört, muß das von $F(z)$ entworfene Bild des Einheitskreises $|z| < 1$ in dem Kreisbogenzweieck $ABCD$ (vgl. Fig. 1) liegen. Es ist $AE = O\,O_1 = \alpha$, $OE = O_1 A = 1$. Der Winkel $EOB = \varphi$ variiert wegen $0 \leqq \alpha \leqq 1$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{2\pi}{3}$:

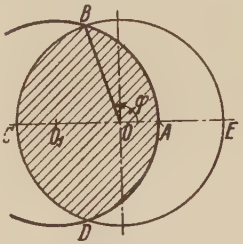


Fig. 1.

$$\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{2\pi}{3} \tag{6, 1}$$

Da der Winkel des Kreisbogenzweiecks gleich $2(\pi - \varphi)$ ist, bildet die Funktion

$$w_1(w) = \left\{\frac{w - e^{i\varphi}}{w - e^{-i\varphi}}\right\}^{\frac{\pi}{2(\pi-\varphi)}}$$

dieses Kreisbogenzweieck der w-Ebene auf eine w_1-Halbebene ab, deren Begrenzungsgerade durch den Nullpunkt geht. Da ferner

$$\arg w_1(-1) = \frac{\pi}{\pi - \varphi} \arg(1 + e^{i\varphi}) = \frac{\pi\varphi}{2(\pi - \varphi)}$$

ist, bildet die Funktion

$$w_2(w) = e^{-\frac{\pi\varphi i}{2(\pi-\varphi)}} w_1(w) = e^{-\frac{\pi\varphi i}{2(\pi-\varphi)}} \left\{\frac{w - e^{i\varphi}}{w - e^{-i\varphi}}\right\}^{\frac{\pi}{2(\pi-\varphi)}}$$

dieses Kreisbogenzweieck auf die obere w_2-Halbebene ab. Die Funktion

$$w_3(w) = \frac{w_2(w) - w_2(0)}{w_2(w) - \overline{w_2(0)}}$$

bildet also dieses Kreisbogenzweieck auf den Einheitskreis $|w_3| < 1$ ab, und die Funktion

$$w_3(F(z)) = W(z) = \frac{e^{-\frac{\pi\varphi i}{2(\pi-\varphi)}} \left\{\frac{F(z) - e^{i\varphi}}{F(z) - e^{-i\varphi}}\right\}^{\frac{\pi}{2(\pi-\varphi)}} - e^{\frac{\pi\varphi i}{2(\pi-\varphi)}}}{e^{-\frac{\pi\varphi i}{2(\pi-\varphi)}} \left\{\frac{F(z) - e^{i\varphi}}{F(z) - e^{-i\varphi}}\right\}^{\frac{\pi}{2(\pi-\varphi)}} - e^{-\frac{\pi\varphi i}{2(\pi-\varphi)}}} \tag{6, 2}$$

schließlich den Einheitskreis $|z| < 1$ auf einen in $|W| < 1$ gelegenen Bereich ab.

Nun ist wegen $F(z) = \beta z + \ldots$

$$W(z) = e^{\frac{\pi\varphi i}{2(\pi-\varphi)}} \frac{\pi\beta \sin\varphi}{2(\pi-\varphi)\sin\frac{\pi\varphi}{2(\pi-\varphi)}} \cdot z + \ldots. \tag{6, 3}$$

Es folgt

$$\frac{\pi\beta\sin\varphi}{2(\pi-\varphi)\sin\frac{\pi\varphi}{2(\pi-\varphi)}} \leqq 1,$$

oder

$$\beta \leqq 2\frac{\pi-\varphi}{\pi} \frac{\sin\frac{\pi\varphi}{2(\pi-\varphi)}}{\sin\varphi}. \tag{6, 4}$$

Andererseits entnimmt man der Fig. 1 die Beziehung

$$\alpha = 2\cos(\pi-\varphi), \tag{6, 5}$$

so daß aus (6, 4) und (6, 5)

$$\alpha + \beta \leqq 2\cos(\pi-\varphi) + 2\frac{\pi-\varphi}{\pi} \frac{\sin\frac{\pi\varphi}{2(\pi-\varphi)}}{\sin\varphi} \tag{6, 6}$$

folgt. Aus (6, 6) und (6, 1) folgt nun die Abschätzung X.

2. Zur Verschärfung von X beachten wir, daß da $f'(z) = \beta + \ldots$ in $|z| < 1$ absolut Eins nicht übersteigt, nach dem Schwarzschen Lemma

$$|f'(z)| \leqq \frac{|z|+\beta}{1+\beta|z|}.$$

Infolgedessen ist in $|z| < 1$ mit

$$\mu = \mu(\beta) = \frac{1}{\beta} - \frac{1-\beta^2}{\beta^2}\ln(1+\beta) \tag{6, 7}$$

$$|F(z)| \leqq \mu. \tag{6, 8}$$

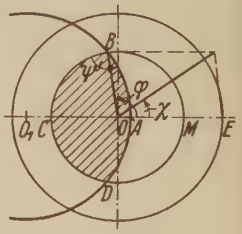


Fig. 2.

Da $f(z) = \alpha + F(z)$ zu $\mathfrak{E}'$ gehört, muß das von $F(z)$ entworfene Bild des Einheitskreises $|z| < 1$ in das Kreisbogenzweieck $ABCD$ (vgl. Fig. 2) fallen. Hier ist $AE = O_1O = \alpha$, $OM = \mu$, $OE = O_1A = 1$. Bezeichnet man mit φ den Winkel EOB, mit ψ den Winkel des Kreisbogenzweiecks, und setzt $\chi = \arg(1+\mu e^{i\varphi})$, so erkennt man, wie bei (6, 3) daß die Funktion

$$W(z) = \frac{e^{-\frac{2\pi\chi i}{\psi}}\left\{\frac{F(z)-\mu e^{i\varphi}}{F(z)-\mu e^{-i\varphi}}\right\}^{\frac{\pi}{\psi}} - e^{\frac{2\pi}{\psi}(\varphi-\chi)i}}{e^{-\frac{2\pi\chi i}{\psi}}\left\{\frac{F(z)-\mu e^{i\varphi}}{F(z)-\mu e^{-i\varphi}}\right\}^{\frac{\pi}{\psi}} - e^{-\frac{2\pi}{\psi}(\varphi-\chi)i}} \tag{6, 9}$$

den Einheitskreis $|z| < 1$ auf einen Teilbereich von $|W| < 1$ abbildet.

Nun ist wegen $F(z) = \beta z + \ldots$, nach (6, 9)

$$W(z) = \frac{\pi \beta \sin \varphi}{\mu \psi \sin \frac{2\pi}{\psi}(\varphi - \chi)} e^{\frac{2\pi}{\psi}(\varphi - \chi) i} . z + \ldots .$$

Wir erhalten also die Ungleichung

$$\frac{\pi \sin \varphi}{\psi \sin \frac{2\pi}{\psi}(\varphi - \chi)} \leqq \frac{\mu}{\beta}, \tag{6, 10}$$

wobei, wie man der Fig. 2 entnimmt,

$$\psi = \pi - \varphi + \arcsin(\mu \sin(\pi - \varphi)), \tag{6, 11}$$

$$\chi = \operatorname{arctg} \frac{\mu \sin \varphi}{1 + \mu \cos \varphi}$$

gilt.

Für $\varphi = 0$ ist (6, 10), wenn man unter dem Wert deren linken Seite für $\varphi = 0$ den Grenzwert $\varphi \to 0$ versteht, für jedes $0 < \beta \leqq 1$ richtig. Andererseits folgt aus $F(0) = 0$, daß (6, 10) für $\varphi = \varphi_0$ sicher für alle $0 < \beta \leqq 1$ falsch ist, wo φ_0 den Wert von φ bedeutet, wenn der Punkt A mit 0 zusammenfällt (vgl. Fig. 2). Daraus folgt, daß es mindestens ein $\varphi = \varphi^* = \varphi^*(\beta) < \varphi_0$ gibt, für das in (6, 10) das Gleichheitszeichen gilt. Es kann aber nur ein solches φ^* geben. Denn im entgegengesetzten Falle müßte es zwei Werte von φ, φ_1 und φ_2 geben, so daß $\varphi_1 < \varphi_2$ ist, und (6, 10) für φ_1 falsch und für φ_2 richtig ist; daraus würde aber folgen, daß das F-Bild von $|z| < 1$ in einem Kreisbogenzweieck enthalten ist, in einem diesen umfassenden aber nicht.

Die Bedingung (6, 10) besagt also $\varphi \leqq \varphi^*(\beta)$, also, nach (6, 11) und mit Rücksicht darauf, daß ψ bei festem β eine fallende Funktion von φ ist,

$$\psi \geqq \pi - \varphi^* + \arcsin(\mu \sin(\pi - \varphi^*)),$$

$$\cos(\pi - \psi) \geqq \cos\{\varphi^* - \arcsin(\mu \sin(\pi - \varphi^*))\}. \tag{6, 12}$$

Nun ist, wie aus der Fig. 2 abgeleitet werden kann,

$$\alpha^2 = 1 + \mu^2 - 2\mu \cos(\pi - \psi),$$

also nach (6, 12)

$$\alpha^2 \leqq 1 + \mu^2 - 2\mu \cos\{\varphi^* - \arcsin(\mu \sin(\pi - \varphi^*))\},$$

und

$$\alpha + \beta \leqq \beta + \sqrt{1 + \mu^2 - 2\mu \cos\{\varphi^* - \arcsin(\mu \sin(\pi - \varphi^*))\}} = \mathsf{B}(\beta),$$

$$\sigma_1(\mathfrak{E}') \leqq \operatorname*{Max}_{0 < \beta \leqq 1} \mathsf{B}(\beta).$$

Eine nicht ganz einfache Rechnung, auf die hier wegen ihrer Langwierigkeit verzichtet werden muß, zeigt nun

$$\operatorname*{Max}_{0 < \beta \leqq 1} \mathsf{B}(\beta) \leqq 1, 19, \ldots,$$

so daß XI behauptet werden kann.

§ 7.

Die Klassen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$.

1. Es liege $f(z) = z + a_3 z^3 + \ldots$ in $\mathfrak{S}_2$. Dann gibt es bekanntlich ein zu $\mathfrak{S}_1$ gehörendes $g(z)$, so daß

$$f(z) = \sqrt{g(z^2)} \tag{7, 1}$$

ist. Es ist

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0<|z|=r<1} f(z) \left\{\frac{1}{z} + \ldots + \frac{1}{z^{n+1}}\right\} dz,$$

also mit Rücksicht auf (7, 1)

$$\begin{aligned} |s_n| &\leqq \frac{1}{2\pi r^n} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} |g(r^2 e^{2i\varphi})|^{1/2} |1 + \ldots + r^n e^{ni\varphi}| \, d\varphi \\ &\leqq r^{-n} \sqrt{\frac{1 - r^{2(n+1)}}{1 - r^2}} \left\{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} |g(r^2 e^{2i\varphi})| \, d\varphi\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{7, 2}$$

Für $g(z)$ aus $\mathfrak{S}_1$ gilt[14])

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\psi=0}^{2\pi} |g(\varrho e^{i\psi})| \, d\psi \leqq \frac{\varrho}{1-\varrho},$$

also

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} |g(r^2 e^{2i\varphi})| \, d\varphi \leqq \frac{r^2}{1-r^2},$$

womit aus (7, 2)

$$\sigma_n(\mathfrak{S}_2) \leqq (1-r)^{-1} r^{-n+1} (1+r)^{-1} (1 - r^{2(n+1)})^{1/2}$$

folgt. Setzt man hierin mit $\varepsilon > 0$ für genügend großes n $r = 1 - \varepsilon/n$, so bekommt man

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sigma_n(\mathfrak{S}_2)}{n} \leqq \frac{\sqrt{e^{2\varepsilon} - 1}}{2\varepsilon},$$

und also XII[15]).

---

[14]) Vgl. z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 2. Aufl. Berlin 1931, S. 79—80.

[15]) Nach einer Bemerkung von Herrn Landau gilt sogar

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\operatorname{Max}(|a_1| + \ldots + |a_n|)}{n} \leqq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}} \operatorname*{Min}_{0<\varepsilon} \frac{\sqrt{e^{2\varepsilon} - 1}}{2\sqrt{2}\,\varepsilon} = 0{,}78\ldots;$$

2. Es liege $f(z) = z + a_4 z^4 + \dots$ in $\mathfrak{S}_3$. Dann ist

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0<|z|=r<1} f(z) \left\{ \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^{n+1}} \right\} dz,$$

und also nach bekannten Abschätzungsmethoden

$$(7,3) \qquad |s_n| \leqq r^{-n} \sqrt{\frac{1-r^{2(n+1)}}{1-r^2}} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \right\}^{1/2}.$$

Nun ist bekanntlich

$$(7,4) \qquad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = \frac{2}{\pi} \int\limits_{\varrho=0}^{r} \frac{A(\varrho)}{\varrho} d\varrho,$$

---

dies folgt aus

$$\overline{\lim_{r\to 1}} (1-r^2) \operatorname{Max} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{2\nu+1}|^2 r^{4\nu+2} \right\} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$$

(vgl. E. Landau, Über schlichte Funktionen, Math. Zeitschr. 30 (1929), S. 635—638) in Verbindung mit

$$\begin{aligned}
(1-r)^2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{[n/2]} |a_{2\nu+1}| \right\}^2 &= (1-r)^2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{[n/2]} |a_{2\nu+1}| \, r^{2\nu+1} \, r^{-2\nu-1} \right\}^2 \\
&\leqq (1-r)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{2\nu+1}|^2 r^{4\nu+2} \sum_{\nu=0}^{[n/2]} r^{-4\nu-2} \\
&= r^2 \frac{r^{-4\{[n/2]+1\}} - 1}{1-r^4} (1-r)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{2\nu+1}|^2 r^{4\nu+2} \\
&= r^2 \frac{r^{-4\{[n/2]+1\}} - 1}{(1+r)(1+r+r^2+r^3)} (1-r^2) \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{2\nu+1}|^2 r^{4\nu+2},
\end{aligned}$$

woraus ja mit

$$r = 1 - \frac{\varepsilon}{n}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \frac{\operatorname{Max} \sum_{\nu=0}^{[n/2]} |a_{2\nu+1}|}{n} \right\}^2 \leqq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{8\varepsilon^2}$$

folgt.

Auf ähnliche Weise kann auch die im Text folgende Abschätzung zu

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sigma_n(\mathfrak{S}_3)}{n^{2/3}} \leqq \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)}} \operatorname{Min}_{0<\varepsilon} \frac{\sqrt{e^{2\varepsilon} - 1}}{3^{2/3} \varepsilon^{2/3}} = 0{,}89\dots$$

verschärft werden.

wo $A(\varrho)$ den Flächeninhalt des f-Bildes von $|z| \leqq \varrho$ bedeutet. Nach dem Verzerrungssatz gilt aber $A(\varrho) \leqq \pi \varrho^2 (1-\varrho^3)^{-4/3}$ für $f(z)$ aus $\mathfrak{S}_3$, womit aus (7, 4)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leqq 2 \int_{\varrho=0}^{r} \frac{\varrho\, d\varrho}{(1-\varrho^3)^{4/3}} < 2r \int_{\varrho=0}^{r} \frac{d\varrho}{(1-\varrho^3)^{4/3}}$$
$$= 2r^2 (1-r^3)^{-1/3}$$

folgt. Dies in (7, 3) eingesetzt liefert

$$\sigma_n(\mathfrak{S}_3) < \sqrt{2}(1-r)^{-2/3} r^{-n+1} (1+r)^{-1/2} (1-r^{2(n+1)})^{1/2} (1+r+r^2)^{-1/6},$$

woraus mit $r = 1 - \varepsilon/n$, $\varepsilon > 0$, n genügend groß,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sigma_n(\mathfrak{S}_3)}{n^{2/3}} \leqq 3^{-1/6} \varepsilon^{-2/3} \sqrt{e^{2\varepsilon} - 1},$$

und also XIII, folgt.

(Eingegangen am 12. Juli 1933.)

Über das Minimum positiver Hermitescher Formen.

Von

Hannskarl Oberseider in München.

Einleitung.

Ist a und c je eine reelle positive und b eine komplexe Zahl[1]), die so gewählt sind, daß

$$\Delta = ac - b\bar{b} > 0,$$

so ist die Hermitesche Form

$$F(x, y) = a x \bar{x} + b x \bar{y} + \bar{b} \bar{x} y + c y \bar{y}$$

mit der Determinante Δ positiv definit.

Läßt man die Variablen einer Hermiteschen Form $F(x, y)$ alle Paare ganzer Zahlen $\neq (0, 0)$ eines imaginären quadratischen Zahlkörpers durchlaufen, so besitzen die erhaltenen Werte der Form ein Minimum. Den Beweis findet man in einer Abhandlung von Herrn Perron, „Über das Minimum positiver Hermitescher Formen", Math. Zeitschr. **36** (1932), S. 148–160[2]).

Man kann nun Formen angeben, deren Minimum m bei gegebener Determinante beliebig klein ist, z. B. kleiner oder gleich δ. Man braucht nur als Koeffizienten a von $x\bar{x}$ das gegebene kleine δ und die übrigen Koeffizienten entsprechend der Determinante zu wählen, so nimmt die Form für das Paar $1, 0$ den Wert $a = \delta$ an, das Minimum kann also nicht größer sein.

Es liegt nun andererseits nahe, nach einer oberen Schranke des Minimums bezüglich eines gegebenen Körpers zu fragen. In der genannten Abh. wird diese Frage für eine Reihe von Körpern der Klassenzahl 1 beantwortet. Es erhebt sich die weitere Frage, ob man allgemein, für jeden imaginären quadratischen Körper eine obere Schranke für das Minimum angeben kann. In der vorliegenden Arbeit wird in den beiden ersten

---

[1]) Konjugiert-komplexe Zahlen seien in üblicher Weise durch Überstreichen kenntlich gemacht.

[2]) Im folgenden zitiert mit „Abh."

Kapiteln je ein spezieller Körper, nämlich $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ mit der Klassenzahl 1 und $\mathfrak{K}(i\sqrt{5})$ mit der Klassenzahl 2 behandelt. Für beide Körper wird auch (in den §§ 3 und 7) nachgewiesen werden, daß die gefundenen Schranken die bestmöglichen sind, ähnlich, wie es in der genannten Abh. für alle dort behandelten Körper geschieht. In Kapitel III wird das Ergebnis für weitere spezielle Körper auf gleiche Art, aber in gekürzter Form hergeleitet, nämlich für $\mathfrak{K}(i\sqrt{67})$, $\mathfrak{K}(i\sqrt{163})$, beide mit der Klassenzahl 1 und für $\mathfrak{K}(i\sqrt{15})$ mit der Klassenzahl 2. Im letzten Kapitel werden für eine Reihe weiterer Körper die auf analoge Art gewonnenen Resultate mitgeteilt und mit einem kürzlich von Herrn Oppenheim gefundenen Satz verglichen.

Kapitel I.

Der Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$.

§ 1.

Zurückführung auf einen Hilfssatz.

Wenn wir in diesem Kapitel beweisen, daß das Minimum bezüglich $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ einer Hermiteschen Form $F(x, y)$ mit der Determinante Δ stets kleiner oder gleich $\sqrt{\frac{43}{2}\Delta}$ ist, so kann das in zwei Schritten geschehen. Der eine ist der, zu zeigen, daß es zu jeder gegebenen Form $F(x, y)$ im Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ zwei ganze Zahlen x_0 und y_0 gibt, die nicht beide Null sind, so daß $F(x_0, y_0) \leqq \sqrt{\frac{43}{2}\Delta}$. Der zweite Schritt ist der Nachweis, daß es auch Formen gibt, deren Minimum genau gleich $\sqrt{\frac{43}{2}\Delta}$ ist. Dieser Nachweis wird in § 3 gebracht werden.

Es sei nun $F(x, y)$ eine gegebene Hermitesche Form und $F_1(x, y)$ eine dazu *äquivalente* Form, die also durch eine Einheitstransformation

$$x \to \alpha x + \beta y, \quad y \to \gamma x + \delta y$$

mit der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ aus $F(x, y)$ hervorgeht. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind hierbei ganze Zahlen des Körpers. Beide Formen besitzen dann gleiche Determinante und gleiches Minimum. Haben wir also für die Form $F_1(x, y)$ ein Paar ganzer Zahlen x_1, y_1 gefunden, so daß

$$F_1(x_1, y_1) \leqq \sqrt{\frac{43}{2}\Delta},$$

so gibt es auch ein Paar x_0, y_0, so daß

$$F(x_0, y_0) \leqq \sqrt{\frac{43}{2}\Delta}.$$

Wir wollen nun statt der gegebenen Form $F(x, y)$ die zu ihr äquivalente betrachten, die ihr Minimum für das Paar $1, 0$ annimmt. Ist zunächst $F(\alpha, \gamma) = m$ das Minimum von $F(x, y)$, so sind α, γ sicher relativ prim; hätten sie nämlich den Teiler $\varrho \neq \pm 1$ gemein[3]), so wäre

$$F(\alpha, \gamma) = \varrho\,\bar{\varrho}\,F\left(\frac{\alpha}{\varrho}, \frac{\gamma}{\varrho}\right),$$

also ergäbe sich für die ganzen Zahlen $\frac{\alpha}{\varrho}, \frac{\gamma}{\varrho}$ der Funktionswert $\frac{m}{\varrho\,\bar{\varrho}} < m$, m wäre also nicht das Minimum. Somit existieren zwei ganze Zahlen β, δ, so daß

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

die Form

$$F_1(x, y) = F(\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y)$$

ist dann die gesuchte Transformierte; denn es ist

$$F_1(1, 0) = F(\alpha, \gamma) = m.$$

Der Koeffizient von $x\bar{x}$ in der Form $F_1(x, y)$ ist m. Es folgt nun für jedes von $0, 0$ verschiedene Paar ganzer Zahlen x, y aus der Ungleichung

$$m \leqq F_1(x, y) = m\,x\bar{x} + n\,x\bar{y} + \bar{n}\,\bar{x}\,y + p\,y\bar{y}$$

die Beziehung

$$m \leqq m\,|\,x + \xi\,y\,|^2 + \frac{\Delta}{m}\,|\,y\,|^2,$$

wobei ξ eine gewisse komplexe Zahl bedeutet ($\xi = \bar{n} : m$). *Wenn wir nun,* was in § 2 für beliebig gegebenes ξ durchgeführt wird, *ein Paar ganzer Zahlen x_1, y_1 angeben können,* so daß

$$(1) \qquad |\,x_1 + \xi\,y_1\,|^2 \leqq 1 - \frac{2\,|\,y_1\,|^2}{43} \qquad \text{mit} \quad y_1 \neq 0,$$

so folgt

$$m \leqq m\left(1 - \frac{2\,|\,y_1\,|^2}{43}\right) + \frac{\Delta}{m}\,|\,y_1\,|^2$$

oder

$$\frac{2m}{43}\,|\,y_1\,|^2 \leqq \frac{\Delta}{m}\,|\,y_1\,|^2$$

und, da $m > 0$, $\Delta > 0$, $y_1 \neq 0$,

$$m \leqq \sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta},$$

die gesuchte Abschätzung des Minimums m der Form $F(x, y)$. Es handelt sich also nur noch darum, ein Paar ganzer Zahlen x_1, y_1 zu finden, das die Ungleichung (1) erfüllt.

---

[3]) Man beachte, daß die Klassenzahl gleich 1, also jedes Ideal ein Hauptideal ist.

§ 2.

Hilfssatz.

Wir beweisen nun den Hilfssatz:

Zu jeder komplexen Zahl ξ existiert im Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ ein Paar ganzer Zahlen x, y mit $0 < |y| \leqq 3$, so daß die Ungleichung gilt:

$$|x + \xi y|^2 \leqq 1 - \frac{2|y|^2}{43},$$

und zwar gilt stets das Kleinerzeichen, außer für Zahlen ξ, die sich von $\left(\frac{1}{2} + \frac{11i}{2\sqrt{43}}\right)$ oder $-\left(\frac{1}{2} + \frac{11i}{2\sqrt{43}}\right)$ um eine ganze Zahl des Körpers unterscheiden.

Beweis: Zum Beweis betrachten wir die Darstellung der komplexen Zahlen in der Zahlenebene. Den ganzen Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ entsprechen Punkte, die ein (nicht achsenparalleles) Parallelgitter bilden. Wir legen durch diese Punkte ein Parallelogrammnetz mit Maschen (Parallelogramme), die die Ecken g, $g+1$, $g+\omega$, $g+(1+\omega)$ besitzen, wobei ω die ganze Zahl $\frac{1+i\sqrt{43}}{2}$ bedeute. (Man vgl. Fig. 1, die die Hälfte einer solchen Masche, für $g = 0$, darstellt!) Jede komplexe Zahl ξ liegt innerhalb oder auf dem Rand einer solchen Masche.

Liegt nun ξ in der *unteren* Hälfte einer Masche, so sei

$$\xi_1 = \xi - g;$$

liegt ξ in der *oberen* Hälfte, so sei

$$\xi_1 = (g + 1 + \omega) - \xi = h - \xi.$$

Die so bestimmte Zahl ξ_1 liegt dann innerhalb oder auf dem Rand des Parallelogramms der Fig. 1 mit den Ecken $0, 1, \frac{\omega}{2}, 1 + \frac{\omega}{2}$. Wenn dann für alle Punkte $\xi (= \xi_1)$ dieses Parallelogramms[4]) der Hilfssatz bewiesen ist, so folgt seine Gültigkeit ohne weiteres für jedes andere ξ. Sind nämlich x_1, y_1 die zu ξ_1 gehörigen ganzen Zahlen des Hilfssatzes, so daß also

$$|x_1 + \xi_1 y_1|^2 \leqq 1 - \frac{2|y_1|^2}{43},$$

---

[4]) Für den Beweis des Hilfssatzes genügt es sogar, sich auf den vierten Teil einer Masche, etwa auf das Rechteck mit den Ecken

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad i\frac{\sqrt{43}}{4}, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{43}}{4},$$

zu beschränken. Vgl. auch unsere Behandlung des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{15})$, Kapitel III, § 10.

und wählt man[5])

$$\text{für } \xi = g + \xi_1\colon \quad x = x_1 - g\,y_1, \quad y = y_1,$$
$$\text{für } \xi = h - \xi_1\colon \quad x = x_1 + h\,y_1, \quad y = -\,y_1,$$

dann ist

$$|x + \xi\,y| = |(x_1 - g\,y_1) + (g + \xi_1)\cdot y_1| = |x_1 + \xi_1\,y_1|$$

bzw.

$$|x + \xi\,y| = |(x_1 + h\,y_1) - (h - \xi_1)\cdot y_1| = |x_1 + \xi_1\,y_1|.$$

Das angegebene Paar x, y leistet für ξ dasselbe, wie x_1, y_1 für ξ_1; denn man erhält dann für ξ:

$$|x + \xi\,y|^2 = |x_1 + \xi_1\,y_1|^2 \leqq 1 - \frac{2\,|y_1|^2}{43} = 1 - \frac{2\,|y|^2}{43},$$

also die Aussage des Hilfssatzes. —

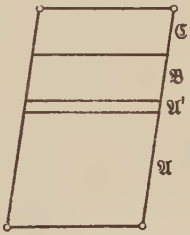


Fig. 1.

Hiernach genügt es, den Hilfssatz für solche ξ zu beweisen, die innerhalb oder auf dem Rand des Parallelogramms der Fig. 1 liegen.

Wir teilen, wie Fig. 1 zeigt, unser Parallelogramm durch Parallelen zur reellen Achse in vier kleinere Parallelogramme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$ und zwar sei die Höhe von $\mathfrak{A}$ gleich $\frac{11}{2\sqrt{43}}$, von $\mathfrak{A}'$ gleich $\frac{1}{2\sqrt{43}}$, von $\mathfrak{B}$ gleich $\frac{7}{3\sqrt{43}}$, von $\mathfrak{G}$ gleich $\frac{29}{12\sqrt{43}}$.

Der Streifen $\mathfrak{A}'$ (siehe Fig. 2) wird durch die Geraden EF und EF_1 in die Trapeze $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ und das Dreieck $\mathfrak{B}_1$ zerlegt. Hierbei sei

$$E = \frac{1}{2} + \frac{11}{2\sqrt{43}}\,i, \quad F = \frac{\sqrt{5} + 6\,i}{\sqrt{43}}, \quad F_1 = 1 - \overline{F} = 1 - \frac{\sqrt{5} - 6\,i}{\sqrt{43}}.$$

Für die Zuordnung der durch die Teilung entstandenen Randpunkte setzen wir fest:

Punkt E gehöre zum Gebiet $\mathfrak{A}$, Punkt F und F_1 zu $\mathfrak{B}_1$; die Punkte der Strecke EF zu $\mathfrak{A}_1$, die der Strecke EF_1 zu $\mathfrak{A}_2$. Für die Randpunkte zwischen den übrigen Gebieten ist eine besondere Festsetzung nicht nötig.

Gebiete $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Liegt nun ξ im Gebiet $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}_2$, so ist sein Abstand vom Punkt $x = 0$ oder $x = 1$ kleiner oder gleich dem des Punktes E von 0 und 1. Somit gilt[6])

$$|x - \xi|^2 \leqq |0 - E|^2 = |1 - E|^2 = \frac{1}{4} + \frac{121}{4\cdot 43} = \frac{41}{43}.$$

---

[5]) Für Hermitesche Formen bedeutet dies eine Äquivalenztransformation mit der Determinante ± 1.

[6]) Für die nicht zu $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gehörenden Punkte F und F_1 gilt ebenfalls $|0 - F|^2 = |1 - F_1|^2 = \frac{41}{43}$.

Für alle Werte ξ aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ liefert das Paar

$$x = 0, \quad y = 1 \quad \text{oder} \quad x = 1, \quad y = -1$$

die Beziehung

$$|x + \xi y|^2 \leqq \frac{41}{43} = 1 - \frac{2 \cdot |y|^2}{43}.$$

Das Gleichheitszeichen wird nur für $\xi = E$ benötigt.

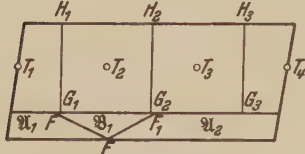


Fig. 2.

Gebiet $\mathfrak{B}_1$. In Fig. 2 sind die Punkte

$$T_1 = \frac{\omega}{3} = \frac{1 + i\sqrt{43}}{6}, \quad T_2 = \frac{1+\omega}{3} = \frac{3 + i\sqrt{43}}{6},$$

$$T_3 = \frac{2+\omega}{3} = \frac{5 + i\sqrt{43}}{6}, \; T_4 = \frac{3+\omega}{3} = \frac{7 + i\sqrt{43}}{6}$$

verzeichnet. Ist zunächst $\xi = F$ oder $\xi = F_1$, so ist sein Abstand von T_2 kleiner als der des Punktes E von T_2; denn

$$\left|\frac{1+\omega}{3} - E\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{43}}{6} - \frac{11}{2\sqrt{43}}\right)^2 = \frac{(43-33)^2}{36 \cdot 43} = \frac{1}{9} \cdot \frac{25}{43},$$

$$\left|\frac{1+\omega}{3} - F\right|^2 = \left|\frac{1+\omega}{3} - F_1\right|^2 = \frac{154}{9 \cdot 43} - \sqrt{\frac{5}{43}} < \frac{154}{9 \cdot 43} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{25}{43}.$$

Somit ist auch der Abstand eines jeden anderen Punktes ξ aus $\mathfrak{B}_1$ von Punkt T_2 kleiner als der Abstand $E\,T_2$, d. h. $\left|\frac{1+\omega}{3} - \xi\right|^2 < \frac{1}{9} \cdot \frac{25}{43}$. Das Paar

$$x = 1 + \omega, \quad y = -3$$

liefert also

$$|x + \xi y|^2 < \frac{25}{43} = 1 - \frac{2 \cdot |y|^2}{43}.$$

Gebiet $\mathfrak{B}$. Die Mittelsenkrechten der Strecken $T_1\,T_2$, $T_2\,T_3$, $T_3\,T_4$ schneiden die untere Randlinie des Gebietes $\mathfrak{B}$ in G_1, G_2, G_3, die obere in H_1, H_2, H_3. Die Abstände dieser Punkte von den nächstgelegenen Punkten T_i sind alle einander gleich, da die Punkte T_i auf einer „Mittelparallelen" des Parallelogramms $\mathfrak{B}$ liegen. Alle anderen Punkte ξ des Gebietes haben vom nächstgelegenen Punkt T_i einen kleineren Abstand. Nun ist z. B. $G_1 = \frac{1}{3} + \frac{6}{\sqrt{43}}\,i$, wir erhalten daher

$$|T_i - \xi|^2 \leqq |T_1 - G_1|^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{43}}{6} - \frac{6}{\sqrt{43}}\right)^2 = \frac{23}{9 \cdot 43} < \frac{1}{9} \cdot \frac{25}{43}.$$

Die Paare ganzer Zahlen

$$x = 3 \cdot T_i, \qquad y = -3,$$

wo also x eine der Zahlen ω, $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, liefern also

$$|x+\xi y|^2 < \frac{25}{43} = 1 - \frac{2|y|^2}{43}.$$

Gebiet $\mathfrak{C}$. In Fig. 3 sind die Punkte $S_1 = \frac{\omega}{2}$, $S_2 = \frac{1+\omega}{2}$, $S_3 = \frac{2+\omega}{2}$ verzeichnet. Die Mittelsenkrechten der Strecken $S_1 S_2$ und $S_2 S_3$ schneiden die untere Randlinie in den Punkten K_1 und K_2. Die Abstände dieser Punkte von den jeweils nächstgelegenen Punkten S_i sind alle gleich. Alle anderen Punkte ξ des Gebietes $\mathfrak{C}$ haben vom nächstgelegenen Punkte S_i einen kleineren Abstand. Nun ist z. B. $K_1 = \frac{1}{2} + \frac{25}{3\cdot\sqrt{43}}\,i$; wir erhalten daher

$$|S_i - \xi|^2 \leqq |S_1 - K_1|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{43}}{4} - \frac{25}{3\sqrt{43}}\right)^2 = \frac{307}{36\cdot 43} < \frac{1}{4}\cdot\frac{35}{43}.$$

Die Paare ganzer Zahlen

$$x = 2\cdot S_i, \qquad y = -2,$$

d. h. $x = \omega$ oder $1+\omega$ oder $2+\omega$, liefern also

$$|x+\xi y|^2 < \frac{35}{43} = 1 - \frac{2\cdot|y|^2}{43}.$$

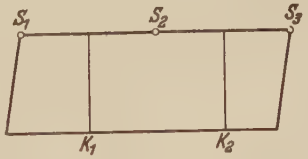


Fig. 3.

Wir sind nun zu dem Ergebnis gelangt, daß sich zu jeder Zahl ξ des betrachteten Parallelogramms (Fig. 1) und damit auch für jedes andere ξ ein Paar von ganzen Zahlen x, y mit $y \neq 0$ angeben läßt, so daß Formel (1) erfüllt wird:

$$|x+\xi y|^2 \leqq 1 - \frac{2|y|^2}{43},$$

wie es im Hilfssatz behauptet wurde. Hierbei gilt für alle Zahlen ξ das Kleinerzeichen, außer für diejenigen ξ, die sich von E oder $-E$ um eine ganze Zahl g unterscheiden[7]); für diese haben wir nur die Gleichheit erfüllen können.

§ 3.

Nachweis, daß die gefundene Abschätzung die bestmögliche ist.

Mit dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Hilfssatz ist der erste der zu Beginn von § 1 genannten zwei Schritte abgeschlossen. Es bleibt

[7]) Man vergleiche die Zurückführung auf das behandelte Parallelogramm zu Anfang dieses Paragraphen.

nun noch zu zeigen, daß es für das Minimum m positiver Hermitescher Formen keine bessere als die schon gefundene Abschätzung

$$m \leqq \sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}$$

gibt. Zu diesem Nachweis ist es nur nötig, eine Form anzugeben, die gerade das Minimum $m = \sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}$ besitzt.

Hat eine Form das Minimum m, ist sie also gemäß § 1 eigentlich oder uneigentlich äquivalent zu der Form

$$F(x, y) = m\,|x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m}\,|y|^2,$$

so kann $\sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}$ nur dann das Minimum sein, wenn $\xi + E$ oder $\xi - E$ ganz ist. Anderenfalls folgt nach dem Hilfssatz $m < \sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}$. Wir betrachten also die Form

$$\sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}\cdot\left|x + \left(g + \frac{1}{2} \pm \frac{11\,i}{2\sqrt{43}}\right) y\right|^2 + \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}}\,|y|^2;$$

g bedeute hierbei eine beliebige ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(i\sqrt{43})$. Die Äquivalenztransformation

$$x \to x - \left(g + \frac{1 \pm i\sqrt{43}}{2}\right)\cdot y, \quad y \to y$$

mit der Determinante $+1$ liefert die Formen

$$\sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}\cdot\left|x \mp \frac{16\,i}{\sqrt{43}}\,y\right|^2 + \sqrt{\frac{2\,\Delta}{43}}\cdot|y|^2$$

oder umgeformt

$$\sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}\cdot\left[x\,\bar{x} \pm \frac{16\,i}{\sqrt{43}}\,x\,\bar{y} \mp \frac{16\,i}{\sqrt{43}}\,\bar{x}\,y + 6\cdot y\,\bar{y}\right]. \tag{2}$$

Die beiden durch das Vorzeichen der mittleren Glieder unterschiedenen Formen sind uneigentlich äquivalent, da sie durch die Transformation

$$x \to -x, \qquad y \to y,$$

mit der Determinante -1, ineinander übergehen.

Für $x = 1$, $y = 0$ erhalten wir den Wert $\sqrt{\frac{43}{2}\,\Delta}$; kleiner können die Formen aber nicht werden. Um dies einzusehen, verfahren wir nach der genannten Abhandlung[8]):

[8]) A. a. O., S. 159.

Setzt man für x, y irgendwelche ganze Zahlen aus $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$, so geht die Größe in der Klammer nach Multiplikation mit $i\sqrt{43}$ in eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ über. Die Klammergröße hat also die Gestalt

$$\frac{p+q\cdot\frac{1+i\sqrt{43}}{2}}{i\sqrt{43}},$$

wobei p und q ganze rationale Zahlen sind. Da der Ausdruck reell ist, muß $2p+q=0$ sein; für die Klammergröße ergibt sich dann der Wert $-p$; sie ist also eine ganze rationale Zahl und da sie für $(x, y) \neq (0,0)$ nur positiv sein kann, ist sie $\geqq 1$. Es ist also $\sqrt{\frac{43}{2}\Delta}$ das Minimum der Formen (2) und aller zu ihnen äquivalenten Formen. Weitere Formen mit dem Minimum $\sqrt{\frac{43}{2}\Delta}$ gibt es nach dem Bewiesenen nicht.

Um nun noch zu untersuchen, ob die beiden uneigentlich äquivalenten Formen (2) auch eigentlich äquivalent sind oder nicht, kann man ebenso verfahren wie in der genannten Abhandlung[9]). Man findet, daß beide Formen nicht eigentlich äquivalent sind.

Wir kommen zu dem Ergebnis:

Alle positiven Hermiteschen Formen mit der Determinante Δ, die bezüglich des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind zu der Form

$$\sqrt{\frac{43}{2}\Delta}\left(x\bar{x}+\frac{16i}{\sqrt{43}}x\bar{y}-\frac{16i}{\sqrt{43}}\bar{x}y+6\,y\bar{y}\right),$$

haben für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ das Minimum $\sqrt{\frac{43}{2}\Delta}$. Alle anderen positiven Hermiteschen Formen der Determinante Δ besitzen ein kleineres Minimum.

Kapitel II.

Der Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{5})$.

§ 4.

Transformationen und Einteilung der Formen.

Sei

$$a\,x\bar{x}+b\,x\bar{y}+\bar{b}\,\bar{x}y+c\,y\bar{y}=a\left|x+\frac{\bar{b}}{a}y\right|^2+\frac{\Delta}{a}|y|^2$$

eine positive Hermitesche Form, die bezüglich des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{5})$ das Minimum m besitze. Läßt man die Variablen der Form alle Paare ganzer

[9]) A. a. O., S. 155 f.

Zahlen x, y, die *keinen Idealteiler* gemein haben, durchlaufen, so müssen diese Funktionswerte ebenfalls ein Minimum besitzen. Dieses nennen wir zum Unterschied von dem Minimum m das „Hilfsminimum" und bezeichnen es mit m_0. Es gilt

$$m \leqq m_0. \tag{3}$$

Wir betrachten nun, ähnlich wie im vorigen Kapitel, statt der gegebenen Form eine aus ihr transformierte Form, die also gleiche Determinante und gleiches Minimum wie die gegebene Form besitzt.

Wird durch $x = \alpha$ und $y = \gamma$ das soeben definierte Hilfsminimum m_0 der gegebenen Form dargestellt, so gibt es, da ja α und γ nach Definition keinen gemeinsamen Idealteiler besitzen, zwei ganze Zahlen β und δ des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{5})$, so daß $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Die Transformation

$$x \to \alpha x + \beta y, \qquad y \to \gamma x + \delta y$$

liefert dann eine äquivalente Form, die für $x = 1$, $y = 0$ den Wert m_0 annimmt. Der Koeffizient von $x\bar{x}$ ist m_0; die neue Form sei

$$m_0 x\bar{x} + b_1 x\bar{y} + \bar{b}_1 \bar{x} y + c_1 y\bar{y} = m_0 \left| x + \frac{\bar{b}_1}{m_0} y \right|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2.$$

Wir führen noch eine weitere Transformation[10]) durch. Die ganzen Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{5})$ bilden ein orthogonales Netz. Rechnet man zu jeder Rechtecksmasche jeweils den unteren und den linken Rand hinzu, von den vier Eckpunkten jedoch nur den links unten befindlichen, so liegt $\frac{\bar{b}_1}{m_0}$ in einer eindeutig bestimmten Rechtecksmasche mit dem zugehörigen Eckpunkt g, die in Fig. 4 dargestellt ist. Zeichnet man durch den Mittelpunkt dieses Rechtecks Parallelen zu den Seiten und trifft für die Randpunkte der entstandenen Teilgebiete dieselbe Zuordnung wie oben, so liegt $\frac{\bar{b}_1}{m_0}$ in einem der gezeichneten vier Rechtecke, die entsprechend der Figur mit I, II, III, IV bezeichnet werden mögen. Wir setzen nun

Fig. 4.

$$\frac{\bar{b}_1}{m_0} = g + \xi, \quad g + 1 - \bar{\xi}, \quad g + 1 + i\sqrt{5} - \xi, \quad g + i\sqrt{5} + \bar{\xi},$$

je nachdem $\frac{\bar{b}_1}{m_0}$ im Rechteck I, II, III, IV liegt. Die so definierte Zahl ξ liegt dann stets im Teilrechteck I der zu $g = 0$ gehörigen Masche, aller-

[10]) Eine entsprechende Transformation wurde auch im vorigen Kapitel zu Beginn des § 2 für den dortigen Hilfssatz durchgeführt.

dings unter Einschluß aller Randpunkte. Wir transformieren jetzt unsere Form

$$m_0 \left| x + \frac{\bar{b}_1}{m_0} y \right|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2 = m_0 \left| \bar{x} + \frac{b_1}{m_0} \bar{y} \right|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |\bar{y}|^2,$$

falls $\frac{\bar{b}_1}{m_0}$ in I liegt, mittels

$$x \to x - g y, \quad y \to y$$

mit der Determinante $+1$,

falls $\frac{\bar{b}_1}{m_0}$ in II liegt, mittels

$$\bar{x} \to x, \quad \bar{y} \to y$$

und dann

$$x \to x + (\bar{g} + 1) \cdot y, \quad y \to -y$$

mit der Determinante -1,

falls $\frac{\bar{b}_1}{m_0}$ in III liegt, mittels

$$x \to x + (g + 1 + i\sqrt{5}) \cdot y, \quad y \to -y$$

mit der Determinante -1,

falls $\frac{\bar{b}_1}{m_0}$ in IV liegt, mittels

$$\bar{x} \to x, \quad \bar{y} \to y$$

und dann

$$x \to x + (-\bar{g} + i\sqrt{5}) \cdot y, \quad y \to y$$

mit der Determinante $+1$.

In allen Fällen erhält man entsprechend der jeweiligen Definition der Zahl ξ die Form

$$m_0 |x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2,$$

wobei ξ eine Zahl aus dem Rechteck $0, \frac{1}{2}, \frac{\omega}{2}, \frac{1+\omega}{2}$ ist. Die angewandte Transformation $\bar{x} \to x$, $\bar{y} \to y$ läßt, wie unmittelbar einzusehen, die Determinante der Form ungeändert. Ebenso ändert sich nichts an der Gesamtmenge von Werten, deren die Form fähig ist. Insbesondere bleibt das Minimum m erhalten. Da $\bar{x}$ und $\bar{y}$ keinen Idealteiler gemein haben, falls x und y keinen gemeinsamen Idealteiler besitzen, ändert sich auch das Hilfsminimum m_0 nicht. Dies gilt auch von den übrigen durchgeführten Äquivalenztransformationen. Sind nämlich

$$x = \alpha x_1 + \beta y_1, \quad y = \gamma x_1 + \delta y_1$$

die Transformationsgleichungen und besitzt das Paar x_1, y_1 einen gemeinsamen Idealteiler, so ist dieser auch in den linearkombinierten Ausdrücken $\alpha x_1 + \beta y_1$ und $\gamma x_1 + \delta y_1$ enthalten, d. h. auch dem Paar x, y gemeinsam. Das gleiche gilt für die Umkehrtransformationen. Die

Wertemengen der beiden Formen für *teilerfremde* Paare x, y sind also identisch. Schließlich sei noch bemerkt, daß die kleinste Zahl m_0 aus dieser Menge bei der neuen Form ebenfalls für $x = 1$, $y = 0$ auftritt.

Wir können unsere Betrachtungen auf Formen

$$F(x, y) = m_0 |x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2$$

beschränken, für die m_0 das oben definierte Hilfsminimum, Δ die Determinante und ξ eine komplexe Zahl aus dem angegebenen Rechteck ist.

Wir teilen nun dieses Rechteck in zwei Gebiete, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, ein. Zu diesem Zweck zeichnen wir um den Punkt $\frac{i\sqrt{5}}{2}$ einen Kreis vom Radius $\sqrt{\frac{9}{80}}$ (vgl. Fig. 5), der den oberen Rand im Punkt G schneide. Um den Punkt 0 zeichnen wir einen Kreis vom Radius $\sqrt{\frac{69}{80}}$, der den ersten Kreis im Punkt

Fig. 5.

$$E = \frac{1}{4} + \frac{2i}{\sqrt{5}}$$

und den rechten Rand im Punkt

$$F = \frac{1}{2} + \frac{7i}{4\sqrt{5}}$$

schneidet. Nun enthalte das

Gebiet $\mathfrak{A}$: alle Punkte des Rechtecks, die *innerhalb* eines der gezeichneten Kreise liegen, sowie Punkt E und F;

Gebiet $\mathfrak{B}$: alle übrigen Punkte des Rechtecks. — Die Trennungslinie GEF gehört also mit Ausnahme der Punkte E und F zum Gebiet $\mathfrak{B}$.

Wir unterscheiden im folgenden die Formen, je nachdem der Koeffizient ξ im Gebiet $\mathfrak{A}$ oder im Gebiet $\mathfrak{B}$ liegt.

§ 5.

Abschätzung des Minimums von Formen einer besonderen Klasse (Gebiet $\mathfrak{A}$).

Betrachten wir nun diejenigen Formen, für die ξ im Gebiet $\mathfrak{A}$ liegt, so kommen wir sehr schnell zu einer Abschätzung des Minimums m.

Liegt ξ innerhalb des Kreises um 0, so ist

$$|0 - \xi|^2 < \frac{69}{80}.$$

Setzen wir $x = 0$, $y = -1$, so erhalten wir

$$|x + \xi y|^2 < \frac{69}{80} = 1 - \frac{11\,|y|^2}{80}.$$

Liegt ξ innerhalb des Kreises um $\frac{i\sqrt{5}}{2}$, so ist

$$\left|\frac{i\sqrt{5}}{2} - \xi\right|^2 < \frac{9}{80}.$$

Für $x = i\sqrt{5}$, $y = -2$ erhalten wir dann

$$|x + \xi y|^2 < 4 \cdot \frac{9}{80} = 1 - \frac{11\,|y|^2}{80}.$$

Für die Punkte $\xi = E$ und $\xi = F$ ergibt sich

$$|x + \xi y|^2 = 1 - \frac{11\,|y|^2}{80},$$

wobei $x = 0$, $y = -1$. Somit nimmt unsere Form

$$m_0\,|x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m_0}\,|y|^2$$

für $x = 0$, $y = -1$ oder für $x = i\sqrt{5}$, $y = -2$ einen Wert w an, für den

$$w \leqq m_0\left(1 - \frac{11 \cdot |y|^2}{80}\right) + \frac{\Delta}{m_0}\,|y|^2 \tag{4}$$

gilt. Das Gleichheitszeichen wird nur für $\xi = E$ und $\xi = F$ benötigt. Da die angegebenen Wertepaare x, y jeweils relativprim sind, so muß $m_0 \leqq w$ sein. Also gilt erst recht

$$m_0 \leqq m_0\left(1 - \frac{11\,|y|^2}{80}\right) + \frac{\Delta}{m_0}\,|y|^2$$

oder

$$m_0 \leqq \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}.$$

Wegen (3) erhalten wir hieraus

$$m \leqq \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta},$$

die gesuchte Abschätzung des Minimums m. Gleichheit kann nur eintreten, wenn $\xi = E$ oder $\xi = F$. Anderenfalls existiert ein Paar relativprimer x, y, nämlich $x = 0$, $y = -1$ oder $x = i\sqrt{5}$, $y = -2$, so daß in (4) das Kleinerzeichen gilt, woraus sich $m_0 < \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$ also erst recht $m < \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$ ergibt. — Die Untersuchung des Falles $m = \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$ wird in § 7 durchgeführt werden.

§ 6.

Abschätzung des Minimums der übrigen Formen (Gebiet $\mathfrak{B}$).

Die Methode, mit der wir im vorigen Paragraphen die Abschätzung des Minimums erhielten, war wesentlich die nämliche, wie bei Körpern der Klassenzahl 1 (vgl. Kap. I). Die noch zu behandelnden Formen verlangen eine abgeänderte Methode, da hier nicht mehr durchwegs das Hilfsminimum m_0 kleiner oder gleich $\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$ ist. Wir werden aber dennoch für das (eigentliche) Minimum m die nämliche Schranke wie in § 5 finden.

Es werde zunächst, um gleichzeitig einen Einblick in die Besonderheit der einzelnen Formen zu geben, die Form

$$F(x, y) = a \cdot \left| x + \frac{1 + i\sqrt{5}}{2} \cdot y \right|^2 + \frac{\Delta}{a} |y|^2$$

betrachtet.

Für $x = 1$, $y = 0$ nimmt die Form den Wert a an. Einen kleineren Wert kann die Form für *relativprime* Paare aber nicht annehmen, denn der Zähler im Ausdruck

$$\left| \frac{2x + (1 + i\sqrt{5}) \cdot y}{2} \right|^2$$

kann für relativprime Paare $\neq (0, 0)$ weder 0 noch ± 1 werden. Der Ausdruck wird also stets größer oder gleich 1. Das Hilfsminimum unserer Form ist also

$$m_0 = a.$$

Man erkennt, da a eine willkürliche positive Zahl ist, *daß es bei beliebig gegebener Determinante Δ Formen mit beliebig großem Hilfsminimum $m_0 = a$ gibt.*

Schließlich untersuchen wir noch das Minimum m selbst. Ist $m_0 < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$, so folgt aus (3) sofort: $m < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$. Ist dagegen $m_0 \geqq \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$, so nimmt die Form für das (nicht relativprime) Paar $x = 1 + i\sqrt{5}$, $y = -2$ folgenden Wert an:

$$m_0 \left| (1 + i\sqrt{5}) - 2 \cdot \frac{1 + i\sqrt{5}}{2} \right|^2 + \frac{\Delta}{m_0} \cdot 4 = \frac{4\Delta}{m_0} \leqq \frac{4\Delta}{\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}} < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}.$$

Es ist also stets

$$m < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}.$$

Wenn wir nun alle übrigen Formen (mit ξ aus $\mathfrak{B}$)

$$m_0 |x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2$$

behandeln, können und wollen wir den Punkt $\xi = \frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ aus dem Gebiet $\mathfrak{B}$ ganz ausschließen[11]).

Um nun für diese Formen eine Abschätzung des Minimums zu erhalten, werden wir einen unmittelbaren, aber etwas mühsamen Weg wählen. Wir werden nämlich (von dem trivialen Fall $m_0 < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$ abgesehen) zeigen, daß für alle unsere Formen

$$F(1 + i\sqrt{5}, -2) < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$$

ist. *Das Minimum der Formen ist dann jedenfalls kleiner als* $\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$, eine Schranke, die wir auch bei den schon behandelten Formen erhielten. — Für die Abschätzungen unterscheiden wir drei Fälle, entsprechend der Größe des Hilfsminimums m_0.

I. Ist zunächst $m_0 < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$, *so erhalten wir sofort* aus (3) $m \leqq m_0$ *die gesuchte Abschätzung*

$$m < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}.$$

II. Bezeichnen wir mit ϱ den Abstand des Punktes ξ vom Punkt $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$, so ist

für $E = \frac{1}{4} + \frac{2i}{\sqrt{5}}$: $\varrho^2 = \left|\left(\frac{1}{4} + \frac{2i}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1+i\sqrt{5}}{2}\right|^2 = \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{9}{80}$,

für $F = \frac{1}{2} + \frac{7i}{4\sqrt{5}}$: $\varrho^2 = \left|\left(\frac{1}{2} + \frac{7i}{4\sqrt{5}}\right) - \frac{1+i\sqrt{5}}{2}\right|^2 = \left(\frac{7-10}{4\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{80}$.

Punkt G hat von $\frac{i\sqrt{5}}{2}$ den Abstand $\sqrt{\frac{9}{80}}$ (vgl. § 4); also ist

für G: $\varrho = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{80}} < \sqrt{\frac{9}{80}}$; $\varrho^2 < \frac{9}{80}$.

---

[11]) Aber auch für die jetzt noch zu behandelnden Formen kann $m_0 > \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$ ausfallen. So ist z. B. für die Form $\sqrt{15\Delta} \cdot \left|x + \frac{5+7i\sqrt{5}}{15} y\right|^2 + \frac{\Delta}{\sqrt{15\Delta}} |y|^2$:

$$m_0 = \sqrt{15\Delta} > \sqrt{\frac{80}{11}\Delta} \quad \text{und} \quad m = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{15\Delta} < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}.$$

Das ganze Gebiet $\mathfrak{B}$ liegt sonach innerhalb eines Kreises um $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ vom Radius $\sqrt{\frac{9}{80}}$. Es gilt daher für alle Punkte aus $\mathfrak{B}$:

$$0 < \varrho < \sqrt{\frac{9}{80}}. \tag{5}$$

Man beachte, daß wir den Punkt $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ mit $\varrho = 0$ ausgeschlossen haben und daß die Punkte E und F mit $\varrho = \sqrt{\frac{9}{80}}$ nicht zu unserem Gebiet $\mathfrak{B}$ gehören!

Wir betrachten nun Formen mit

$$\sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta} \leqq m_0 \leqq \frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\frac{11}{80}\,\Delta}.$$

Daß tatsächlich $\sqrt{\frac{80}{11}} < \frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\frac{11}{80}}$, erkennt man aus der Ungleichung (5). — Setzen wir

$$m_0 = C_0\sqrt{\Delta},$$

so ist

$$\sqrt{\frac{80}{11}} \leqq C_0 \leqq \frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\frac{11}{80}}. \tag{6}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} F(1+i\sqrt{5}, -2) &= C_0\sqrt{\Delta}\,|(1+i\sqrt{5}) - 2\xi|^2 + \frac{\sqrt{\Delta}}{C_0}\,|-2|^2, \\ &= 4\sqrt{\Delta}\left(C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0}\right). \end{aligned}$$

Wir werden nun diesen Wert für jedes ϱ, das der Ungleichung (5) genügt, soweit ξ in $\mathfrak{B}$ liegt, abschätzen. Zu jedem Radius ϱ haben wir unter all den Werten C_0, die unserer Bedingung (6) genügen, denjenigen zu bestimmen, für den

$$C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0}$$

seinen größten Wert annimmt. Das ist der Fall für die Grenzen des C_0-Bereichs. Für $C_0 = \sqrt{\frac{80}{11}}$ wird

$$C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0} = \sqrt{\frac{80}{11}}\,\varrho^2 + \sqrt{\frac{11}{80}}.$$

Für $C_0 = \frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\frac{11}{80}}$ wird ebenfalls

$$C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0} = \sqrt{\frac{11}{80}} + \varrho^2\sqrt{\frac{80}{11}}.$$

In beiden Fällen ist dann

$$F(1+i\sqrt{5},\,-2) = 4\sqrt{\Delta}\left(\sqrt{\frac{11}{80}} + \varrho^2\sqrt{\frac{80}{11}}\right) < 4\sqrt{\Delta}\left(\sqrt{\frac{11}{80}} + \frac{9}{80}\sqrt{\frac{80}{11}}\right)$$

$$= 4\sqrt{\Delta}\cdot\frac{20}{80}\sqrt{\frac{80}{11}} = \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}\,.$$

Für das Minimum der Form $F(x, y)$ ist daher

$$m < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}.$$

III. Sei schließlich

$$m_0 > \frac{1}{\varrho^2}\cdot\sqrt{\frac{11}{80}\Delta},$$

oder, wenn wir wieder C_0 durch $m_0 = C_0\sqrt{\Delta}$ einführen:

(7) $$C_0 > \frac{1}{\varrho^2}\cdot\sqrt{\frac{11}{80}}.$$

Es ist dann wieder

$$F(1+i\sqrt{5},\,-2) = 4\sqrt{\Delta}\cdot\left(C_0\,\varrho^2 + \frac{1}{C_0}\right).$$

Wir haben zu zeigen, daß dieser Ausdruck kleiner als $\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$ ist. Weil dann

$$F(1+i\sqrt{5},\,-2) < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta},$$

gilt für das Minimum der Form erst recht

$$m < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}.$$

Damit ist dann, wie in § 5, auch für jede der in diesem Paragraphen zu behandelnden Formen *die gesuchte obere Schranke, nämlich* $\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$, *gefunden.*

Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, daß

$$4\sqrt{\Delta}\cdot\left(C_0\,\varrho^2 + \frac{1}{C_0}\right) < \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$$

oder

(8) $$\left(C_0\,\varrho^2 + \frac{1}{C_0}\right) < \sqrt{\frac{5}{11}}.$$

Unser erstes Ziel wird nun sein, für C_0 eine — allerdings von der Lage des Punktes ξ abhängige — obere Schranke zu finden; dann erst werden wir die Formel (8) beweisen können. Haben wir nämlich einen Wert C, so daß $C_0 \leqq C$, so gilt

$$C_0\,\varrho^2 + \frac{1}{C_0} \leqq C\cdot\varrho^2 + \frac{1}{C},$$

da der Ausdruck

$$C_0 \varrho^2 + \frac{1}{C_0}$$

für wachsendes $C_0 > \frac{1}{\varrho}$ stets zunimmt. Das einzige Minimum, das bei $C_0 = \frac{1}{\varrho}$ liegt, gehört nicht zu unseren Werten C_0, da wegen (5):

$$\frac{1}{\varrho} < \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\sqrt{9}}{\varrho\sqrt{80}} < \frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\frac{11}{80}},$$

die Bedingung (7) also nicht erfüllt ist.

Wir wenden uns jetzt dem ersten Schritt zu, die Werte C_0 abzuschätzen. Hierzu unterteilen wir unser Gebiet $\mathfrak{B}$ in drei Teilgebiete $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$, wie es Fig. 6 veranschaulicht:

Zeichnet man zunächst in Fig. 5 die Diagonale OM, wenn

$$M = \frac{1 + i\sqrt{5}}{2},$$

so zerfällt $\mathfrak{B}$ in zwei Teile, deren einer ganz innerhalb eines

Kreises vom Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $\frac{i\sqrt{5}}{2}$

liegt, während der zweite ganz innerhalb des

Kreises vom Radius $\frac{\sqrt{5}}{10}$ um Punkt $P = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} i\sqrt{5}$

liegt. Beide Kreise, sowie Punkt P sind in Fig. 6 eingezeichnet. Daß beide Gebiete ganz umschlossen werden, erkennt man daraus, daß beide Kreise die Diagonale OM in $M = \frac{1 + i\sqrt{5}}{2}$ und $Q = \frac{1 + i\sqrt{5}}{3}$, also außerhalb des Gebietes $\mathfrak{B}$ schneiden; es ist nämlich

für den ersten Kreis: $\left| \frac{i\sqrt{5}}{2} - \frac{1 + i\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{1}{2}$

und $\left| \frac{i\sqrt{5}}{2} - \frac{1 + i\sqrt{5}}{3} \right| = \frac{1}{2}$,

für den zweiten Kreis: $\left| \left(\frac{1}{2} + \frac{2i\sqrt{5}}{5} \right) - \frac{1 + i\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{10}$

und $\left| \left(\frac{1}{2} + \frac{2i\sqrt{5}}{5} \right) - \frac{1 + i\sqrt{5}}{3} \right| = \frac{\sqrt{5}}{10}$.

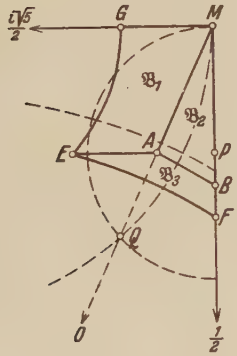
Der Abstand MQ ist $\frac{1}{\sqrt{6}} > \sqrt{\frac{9}{80}}$.

Schneidet man nun von beiden Teilen durch den Streckenzug EAB für $A = \frac{2}{5}(1 + i\sqrt{5})$, $B = \frac{4 + 3i\sqrt{5}}{8}$ das Gebiet $\mathfrak{B}_3$ heraus, so erhält man die gezeichnete Einteilung[12]). Es gilt dann für alle Punkte ξ aus dem

(9)
$$\text{Gebiet } \mathfrak{B}_1: \quad \left|\frac{i\sqrt{5}}{2} - \xi\right|^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$\text{Gebiet } \mathfrak{B}_2: \quad \left|\left(\frac{1}{2} + \frac{2i\sqrt{5}}{5}\right) - \xi\right|^2 < \left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)^2 = \frac{1}{20},$$
$$\text{Gebiet } \mathfrak{B}_3: \quad |0 - \xi|^2 < 1.$$

Die Richtigkeit der letzten Ungleichung erkennt man daraus, daß die Absolutwerte von E, A und B, also auch die aller anderen Punkte aus $\mathfrak{B}_3$, kleiner als 1 sind; denn es ist

$$|E|^2 = \frac{1}{16} + \frac{4}{5} = \frac{69}{80} < 1,$$
$$|A|^2 = \frac{4}{25} + \frac{4}{5} = \frac{24}{25} < 1,$$
$$|B|^2 = \frac{45}{64} + \frac{1}{4} = \frac{61}{64} < 1.$$



$\xi = u + vi\sqrt{5}$,
$E = \frac{1}{4} + \frac{2}{5}i\sqrt{5}$,
$F = \frac{1}{2} + \frac{7}{20}i\sqrt{5}$,
$A = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}i\sqrt{5}$,
$B = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}i\sqrt{5}$,
$M = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{5}$,
$P = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}i\sqrt{5}$,
$Q = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i\sqrt{5}$.

Fig. 6.

Der Kreis vom Radius 1 um den Nullpunkt ist in der Fig. 6 eingetragen. Wir ordnen nun jeder Zahl ξ aus $\mathfrak{B}$ eine positive Zahl C zu, vermöge der Gleichungen

(10)
$$\left|\frac{i\sqrt{5}}{2} - \xi\right|^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{C^2} \quad \text{für alle } \xi \text{ aus } \mathfrak{B}_1,$$
$$\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}i\sqrt{5}\right) - \xi\right|^2 = \frac{1}{20} - \frac{1}{C^2} \quad \text{für alle } \xi \text{ aus } \mathfrak{B}_2,$$
$$|\xi|^2 = 1 - \frac{1}{C^2} \quad \text{für alle } \xi \text{ aus } \mathfrak{B}_3.$$

[12]) Die Punkte auf den Geraden AM, AE, AB rechnen wir zu beiden an sie anliegenden Teilgebieten.

Diese Definitionen der Zahlen C sind möglich, wie sich aus obigen Ungleichungen (9) ergibt[13]). Setzen wir nun

$$\begin{aligned} x &= i\sqrt{5}, & y &= -2 && \text{für Punkte aus } \mathfrak{B}_1, \\ x &= -4 + i\sqrt{5}, & y &= -2i\sqrt{5} && \text{für Punkte aus } \mathfrak{B}_2, \\ x &= 0, & y &= -1 && \text{für Punkte aus } \mathfrak{B}_3, \end{aligned}$$

so können wir die Gleichungen (10) umformen zu

$$\left|\frac{x}{y} + \xi\right|^2 = \frac{1}{|y|^2} - \frac{1}{C^2}$$

oder

$$|x + \xi y|^2 = 1 - \frac{|y|^2}{C^2}.$$

Da nun aber die angegebenen Paare x, y keinen Idealteiler gemein haben, gilt für diese Paare x, y die Beziehung

$$m_0 \leqq m_0 |x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2$$

oder

$$m_0 \leqq m_0 \left(1 - \frac{|y|^2}{C^2}\right) + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2$$

oder, da $y \neq 0$,

$$m_0^2 \leqq C^2 \cdot \Delta$$

und daraus

$$m_0 \leqq C\sqrt{\Delta} \quad \text{oder} \quad C_0 \leqq C,$$

womit die zunächst gesuchte Abschätzung für m_0 und C_0 gefunden ist.

Um nun die Formel (8) zu beweisen, formen wir die Definitionsgleichungen (10) für die Zahlen C etwas um. Setzen wir

$$\xi = u + i\sqrt{5} \cdot v,$$

wobei u und v reelle Zahlen sind, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= u^2 + 5 \cdot v^2, \\ \varrho^2 &= \left|\frac{1 + i\sqrt{5}}{2} - (u + i\sqrt{5} \cdot v)\right|^2 \\ &= \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(v - \frac{1}{2}\right)^2, \\ \left|\frac{i\sqrt{5}}{2} - \xi\right|^2 &= \left|\frac{i\sqrt{5}}{2} - (u + i\sqrt{5} \cdot v)\right|^2 \\ &= u^2 + 5\left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \varrho^2 + u - \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

[13]) Durch die Gleichungen (10) werden *den* Zahlen ξ, die auf den Trennungsgeraden der einzelnen Gebiete $\mathfrak{B}_i$ liegen, zwei bzw. drei Werte C zugeordnet, je nachdem man ξ zu dem einen oder anderen Gebiet $\mathfrak{B}_i$ rechnet. Nähere Ausrechnung ergibt jedoch, daß diese Werte jeweils *übereinstimmen*, was sich zum Teil auch unten noch ergeben wird.

$$\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\,i\sqrt{5}\right)-\xi\right|^2=\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\,i\sqrt{5}\right)-(u+i\sqrt{5}\cdot v)\right|^2$$
$$=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+5\left(\frac{2}{5}-v\right)^2$$
$$=\varrho^2+v-\frac{9}{20}.$$

Es ergibt sich also aus (10)

für Punkte in $\mathfrak{B}_1$: $\frac{1}{C^2}=\frac{1}{4}-\left(\varrho^2+u-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-u-\varrho^2$

$$C=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-u-\varrho^2}}\,^{14}),$$

für Punkte in $\mathfrak{B}_2$: $\frac{1}{C^2}=\frac{1}{20}-\left(\varrho^2+v-\frac{9}{20}\right)=\frac{1}{2}-v-\varrho^2$

$$C=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-v-\varrho^2}},$$

für Punkte in $\mathfrak{B}_3$: $\frac{1}{C^2}=1-|\xi|^2$

$$C=\frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\quad\text{mit}\quad|\xi|^2=u^2+5\,v^2.$$

Da nun, wie wir oben auf Grund unserer Bedingung (7) zeigten,

$$C_0\,\varrho^2+\frac{1}{C_0}\leqq C\,\varrho^2+\frac{1}{C},$$

so ist Formel (8) bewiesen, wenn wir

$$C\,\varrho^2+\frac{1}{C}<\sqrt{\frac{5}{11}}$$

für alle Zahlen ξ aus $\mathfrak{B}$ beweisen.

Gebiet $\mathfrak{B}_1$. Liege ξ in $\mathfrak{B}_1$. Dann ist

$$C\,\varrho^2+\frac{1}{C}=\frac{\varrho^2}{\sqrt{\frac{1}{2}-u-\varrho^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}-u-\varrho^2}=\frac{\frac{1}{2}-u}{\sqrt{\frac{1}{2}-u-\varrho^2}}.$$

Betrachten wir alle Punkte mit gleichem Realteil u, so ist unser Ausdruck am größten für Punkte mit möglichst großem Abstand ϱ (von M). Alle diese Punkte (für die einzelnen Werte von u) liegen, wie man aus Fig. 6 erkennt, auf den Geraden EA und AM.

Für Punkte auf EA ist $\frac{1}{4}<u\leqq\frac{2}{5}$, $v=\frac{2}{5}$. Ferner ist

$$\varrho^2=u^2-u-\frac{3}{10}$$

---

14) Der Radikand ist zufolge der Ungleichungen (9) positiv, die Wurzel also reell. Sie sei, wie die folgenden Wurzeln, positiv genommen.

und

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\frac{1}{2} - u}{\sqrt{\frac{1}{5} - u^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als $\sqrt{\frac{5}{11}}$, *falls*

$$\sqrt{11}\left(\frac{1}{2} - u\right) < \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{5} - u^2}.$$

Da $\left(\frac{1}{2} - u\right)$ positiv für alle betrachteten u, so ist die Ungleichung erfüllt, *wenn*

$$11 \cdot \left(\frac{1}{4} - u + u^2\right) < 1 - 5 \cdot u^2$$

oder

$$\frac{7}{4} - 11u + 16u^2 = -(4u - 1)\left(\frac{7}{4} - 4u\right) < 0$$

für alle betrachteten u erfüllt ist. Dies ist der Fall, da beide Faktoren, $(4u - 1)$ und $\left(\frac{7}{4} - 4u\right)$, in unserem u-Intervall positiv sind.

Für Punkte auf AM ist

$$\frac{2}{5} \leqq u = v < \frac{1}{2},$$

also

$$\varrho^2 = \frac{3}{2} - 6u + 6u^2$$

und

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\frac{1}{2} - u}{\sqrt{-1 + 5u - 6u^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als $\sqrt{\frac{5}{11}}$, *falls*

$$\sqrt{11}\left(\frac{1}{2} - u\right) < \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1 + 5u - 6u^2}$$

oder

$$11 \cdot \left(\frac{1}{4} - u + u^2\right) < -5 + 25u - 30u^2$$

oder

$$\frac{31}{4} - 36u + 41u^2 = -\left(\frac{1}{2} - u\right)\left(41u - \frac{31}{2}\right) < 0.$$

Dies trifft zu, da beide Faktoren, $\left(\frac{1}{2} - u\right)$ und $\left(41u - \frac{31}{2}\right)$, für alle unsere u positiv sind.

Gebiet $\mathfrak{B}_2$. Liege ξ in $\mathfrak{B}_2$. Dann ist

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\varrho^2}{\sqrt{\frac{1}{2} - v - \varrho^2}} + \sqrt{\frac{1}{2} - v - \varrho^2} = \frac{\frac{1}{2} - v}{\sqrt{\frac{1}{2} - v - \varrho^2}}.$$

Halten wir v fest, so wird dieser Ausdruck am größten für großes ϱ. Wir haben daher nur die Punkte der Geraden BA und AM zu betrachten.

Für Punkte auf BA ist $\frac{3}{8} \leqq v \leqq \frac{2}{5}$; ferner ist $u = 2 - 4v$, also $\varrho^2 = \frac{7}{2} - 17v + 21v^2$, und daher

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\frac{1}{2} - v}{\sqrt{-3 + 16v - 21v^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als $\sqrt{\frac{5}{11}}$, *falls*

$$\sqrt{11} \cdot \left(\frac{1}{2} - v\right) < \sqrt{5} \cdot \sqrt{-3 + 16v - 21v^2}$$

oder

$$11 \cdot \left(\frac{1}{4} - v + v^2\right) < -15 + 80v - 105v^2$$

oder

$$116v^2 - 91v + \frac{71}{4} < 0.$$

Dies trifft zu: Für $v = \frac{3}{8}$ erhalten wir $-\frac{1}{16}$, für $v = \frac{2}{5}$ kommt $-\frac{9}{100}$. Für die dazwischenliegenden Werte v wird der Ausdruck ebenfalls negativ, da er für sehr große und sehr kleine positive v positiv wird, seine beiden Nullstellen also außerhalb unseres v-Bereiches liegen.

Für Punkte auf AM ist $u = v$, der Ausdruck $C\varrho^2 + \frac{1}{C}$ nimmt, wie kurze Ausrechnung zeigt, für diese Punkte den gleichen Wert

$$\frac{\frac{1}{2} - v}{\sqrt{\frac{1}{2} - v - \varrho^2}} = \frac{\frac{1}{2} - u}{\sqrt{\frac{1}{2} - u - \varrho^2}}$$

an, wie oben, als wir diese Punkte zum Gebiet $\mathfrak{B}_1$ rechneten (vgl. Anm. 13); es ist also auch hier

$$\frac{\frac{1}{2} - v}{\sqrt{\frac{1}{2} - v - \varrho^2}} < \sqrt{\frac{5}{11}}.$$

Gebiet $\mathfrak{B}_3$. Liege ξ in $\mathfrak{B}_3$. Dann ist

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\varrho^2}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} + \sqrt{1 - |\xi|^2}.$$

Halten wir $|\xi|$ fest, so wird der Ausdruck am größten für großes ϱ. Wir haben daher nur die Punkte der Geraden FB und BA zu betrachten.

Für Punkte auf FB ist $u = \frac{1}{2}$, $\frac{7}{20} < v \leqq \frac{3}{8} < \frac{23}{60}$; ferner

$$|\xi|^2 = \frac{1}{4} + 5v^2,$$

$$\varrho^2 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2} - v\right)^2,$$

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{2 - 5v}{\sqrt{\frac{3}{4} - 5v^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als $\sqrt{\frac{5}{11}}$, *falls*

$$\sqrt{11} \cdot (2 - 5v) < \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{4} - 5v^2}$$

oder

$$11 \cdot (4 - 20v + 25v^2) < \frac{15}{4} - 25v^2$$

oder

$$\frac{161}{4} - 220v + 300v^2 = -\left(v - \frac{7}{20}\right) \cdot \left(\frac{23}{60} - v\right) \cdot 300 < 0.$$

Dies trifft zu, da beide Faktoren, $\left(v - \frac{7}{20}\right)$ und $\left(\frac{23}{60} - v\right)$, für alle v positiv sind.

Für Punkte auf BA ist $u = 2 - 4v$ mit $\frac{3}{8} \leqq v \leqq \frac{2}{5}$, also

$$\varrho^2 = \frac{7}{2} - 17v + 21v^2,$$

$$|\xi|^2 = 4 - 16v + 21v^2,$$

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{1 + \varrho^2 - |\xi|^2}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} = \frac{\frac{1}{2} - v}{\sqrt{-3 + 16v - 21v^2}}.$$

Daß dieser Wert für alle Punkte auf BA kleiner als $\sqrt{\frac{5}{11}}$ ist, haben wir schon oben gezeigt.

Die Richtigkeit der Formel (8) ist damit für alle ξ aus $\mathfrak{B}$ nachgewiesen.

§ 7.

Nachweis, daß die gefundene Abschätzung die bestmögliche ist.

Für das Minimum Hermitescher Formen haben wir in den beiden letzten Paragraphen bezüglich $\mathfrak{R}(i\sqrt{5})$ die Abschätzung

$$m \leqq \sqrt{\frac{80}{11}}\, \Delta$$

gefunden. (Siehe S. 603, 605 u. 607). Um nun zu zeigen, daß für m keine kleinere Grenze als $\sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$ existiert, haben wir nur eine spezielle Form mit dem Minimum $m = \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$ anzugeben.

Da wir für alle Formen in § 6 und mit zwei Ausnahmen auch für alle Formen in § 5 die Abschätzung

$$m < \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$$

fanden, werden wir feststellen, bei welchen Formen diese beiden Ausnahmefälle eintreten. Das sind die Formen, die zu

$$m_0 |x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2$$

äquivalent sind, wobei

$$\xi = E = \frac{1}{4} + \frac{2i}{\sqrt{5}} \quad \text{oder} \quad \xi = F = \frac{1}{2} + \frac{7i}{4\sqrt{5}}.$$

Für diese in § 5 behandelten Formen ist

$$m_0 \leqq \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}.$$

Da $m \leqq m_0$, müssen wir, damit $m = \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$ werden kann, auch

$$m_0 = \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$$

setzen. Wir erhalten also

für $\xi = E$ die Form $F_1(x, y) = \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}\left(\left|x + \frac{5 + 8i\sqrt{5}}{20} \cdot y\right|^2 + \frac{11}{80}|y|^2\right)$,

für $\xi = F$ die Form $F_2(x, y) = \sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}\left(\left|x + \frac{10 + 7i\sqrt{5}}{20} \cdot y\right|^2 + \frac{11}{80}|y|^2\right)$.

Das Minimum dieser Formen ist $\sqrt{\frac{80}{11}\,\Delta}$, wenn die Klammerausdrücke für alle Paare ganzer Zahlen x, y nicht kleiner als 1 werden. Dies ist der Fall für $|y|^2 \geqq 9$, da dann $\frac{11}{80}|y|^2 \geqq \frac{99}{80} > 1$. Ist dagegen $|y|^2 < 9$, also

$$\pm y = 0,\ 1,\ 2,\ i\sqrt{5},\ 1 \pm i\sqrt{5},$$

so wird:

für $y = \pm 1$: $\quad |x + E y|^2 \geqq |0 + E y|^2 = \frac{69}{80}$,

da $x = 0$ die am nächsten bei $E \cdot y$ gelegene ganze Zahl ist;

$$|x + F y|^2 \geqq |0 + F y|^2 = \frac{69}{80},$$

da $x = 0$ die am nächsten bei $F \cdot y$ gelegene ganze Zahl ist.

Entsprechend erhält man

$$\text{für } y = +2: \quad |x+Ey|^2 \geqq |\mp i\sqrt{5}+Ey|^2 = \frac{36}{80},$$

$$|x+Fy|^2 \geqq |\mp(1+i\sqrt{5})+Fy|^2 = \frac{36}{80},$$

$$\text{für } y = \pm i\sqrt{5}: \quad |x+Ey|^2 \geqq |\pm 2+Ey|^2 = \frac{25}{80},$$

$$|x+Fy|^2 \geqq |\pm 2+Fy|^2 = \frac{21}{16} > \frac{25}{80},$$

$$\text{für } y = \pm(1+i\sqrt{5}): \quad |x+Ey|^2 \geqq |\pm(2-i\sqrt{5})+Ey|^2 = \frac{27}{40} > \frac{14}{80},$$

$$|x+Fy|^2 \geqq |\pm(1-i\sqrt{5})+Fy|^2 = \frac{14}{80},$$

$$\text{für } y = \pm(1-i\sqrt{5}): \quad |x+Ey|^2 \geqq |\mp 2+Ey|^2 = \frac{14}{80},$$

$$|x+Fy|^2 \geqq |\mp 2+Fy|^2 = \frac{14}{80}.$$

Setzt man diese Ergebnisse in die Formen $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ ein, so nehmen die in den Klammern stehenden Ausdrücke Werte an, die größer oder gleich folgenden Werten sind:

$$\text{für } |y|^2 = 1: \quad \frac{69}{80} + \frac{11}{80}\cdot 1 = 1,$$

$$\text{für } |y|^2 = 4: \quad \frac{36}{80} + \frac{11}{80}\cdot 4 = 1,$$

$$\text{für } |y|^2 = 5: \quad \frac{25}{80} + \frac{11}{80}\cdot 5 = 1,$$

$$\text{für } |y|^2 = 6: \quad \frac{14}{80} + \frac{11}{80}\cdot 6 = 1.$$

Für $y = 0$ müssen wir $x \neq 0$, also $|x| \geqq 1$ wählen, dann werden die Klammerausdrücke ebenfalls größer oder gleich 1.

Das Minimum der Formen $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ ist also $\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$.

Um nun noch weitere Formen mit dem Minimum $\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$ zu finden, haben wir zu untersuchen, welche Formen auf Grund der Transformationen des § 4 in die soeben behandelten Formen übergehen. Da die zugehörigen Umkehrtransformationen ebenfalls Äquivalenztransformationen mit ganzen Koeffizienten sind, kommen keine weiteren Formen mehr in Frage, als alle zu den beiden gefundenen F_1 und F_2 eigentlich und uneigentlich

äquivalenten Formen[15]). Diese besitzen aber, als äquivalente Formen, das gleiche Minimum und die gleiche Determinante, wie $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$, so daß wir zu dem Ergebnis kommen:

Alle positiven Hermiteschen Formen mit der Determinante Δ, die bezüglich des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{5})$ eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind zu einer der Formen

$$\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}\left(x\bar{x} + \frac{x\bar{y} + \bar{x}y}{4} - \frac{2i}{\sqrt{5}}(x\bar{y} - \bar{x}y) + y\bar{y}\right)$$

$$\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}\left(x\bar{x} + \frac{x\bar{y} + \bar{x}y}{2} - \frac{7i}{4\sqrt{5}}(x\bar{y} - \bar{x}y) + y\bar{y}\right),$$

haben für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{5})$ das Minimum $\sqrt{\frac{80}{11}\Delta}$. Alle anderen positiven Hermiteschen Formen der Determinante Δ besitzen ein kleineres Minimum.

Kapitel III.

Die Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{67})$, $\mathfrak{K}(i\sqrt{163})$ und $\mathfrak{K}(i\sqrt{15})$.

Es mögen in diesem Kapitel in aller Kürze noch einige spezielle Körper behandelt werden. Wir beschränken uns dabei auf die Mitteilung von Tatsachen, ohne die Einzelbeweise und Einzelrechnungen näher durchzuführen.

§ 8.

Der Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{67})$.

Für Körper der Klassenzahl 1 kann man die Betrachtungen, die in § 1 für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{43})$ durchgeführt wurden, wörtlich übertragen; man kommt dann zu dem Ergebnis:

---

[15]) Will man uneigentliche Äquivalenztransformationen ausschließen, so kann man leicht zeigen, daß alle in Frage kommenden Formen eigentlich äquivalent sind zu einer der vier Formen:

$$F_1(x, y) = \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}\left(x\bar{x} + \frac{5 - 8i\sqrt{5}}{20}xy + \frac{5 + 8i\sqrt{5}}{20}xy + y\bar{y}\right)$$

$$F_2(x, y) = \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}\left(x\bar{x} + \frac{10 - 7i\sqrt{5}}{20}x\bar{y} + \frac{10 + 7i\sqrt{5}}{20}\bar{x}y + y\bar{y}\right)$$

$$F_3(x, y) = \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}\left(x\bar{x} + \frac{5 + 8i\sqrt{5}}{20}x\bar{y} + \frac{5 - 8i\sqrt{5}}{20}xy + y\bar{y}\right)$$

$$F_4(x\ y) = \sqrt{\frac{80}{11}\Delta}\left(x\bar{x} + \frac{10 + 7i\sqrt{5}}{20}x\bar{y} + \frac{10 - 7i\sqrt{5}}{20}\bar{x}y + y\bar{y}\right).$$

Für den imaginären Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ von der Klassenzahl 1 ist das Minimum jeder positiven Hermiteschen Form der Determinante Δ kleiner oder gleich $\sqrt{\frac{D}{2}\,\Delta}$, wenn im Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ zu jeder komplexen Zahl ein Paar ganzer Zahlen x, y mit $y \neq 0$ existiert, so daß die Ungleichung gilt

$$|x + \xi y|^2 \leqq 1 - \frac{2|y|^2}{D}.$$

Die Beurteilung, ob diese Abschätzung des Minimums m die bestmögliche ist, bedarf jedoch für die einzelnen Körper noch einer näheren Untersuchung.

Wir wenden uns nun dem Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{67})$ mit der Klassenzahl 1 zu und haben hier zu jeder Zahl ξ ein geeignetes Paar x, y anzugeben. Wir können uns wieder, wie in § 2 auf Zahlen ξ aus dem Parallelogramm der Fig. 7 beschränken mit den Ecken 0, 1, $\frac{\omega}{2}$ und $1 + \frac{\omega}{2}$; für $\omega = \frac{1 + i\sqrt{67}}{2}$.

In Fig. 7 sind die Punkte markiert, die den Zahlen $\frac{x}{-y}$ entsprechen, wobei x und y folgende Zahlen bedeuten:

$$\begin{aligned}
y &= -1 \qquad x = 0,\ 1,\\
y &= -2 \qquad x = \omega,\ 1+\omega,\ 2+\omega,\\
y &= -3 \qquad x = \omega,\ 1+\omega,\ 2+\omega,\ 3+\omega,\\
y &= -4 \qquad x = \omega,\ 1+\omega,\ 2+\omega,\ 3+\omega,\ 4+\omega,\\
y &= -5 \qquad x = 2+\omega,\ 4+2\omega.
\end{aligned}$$

Zeichnet man um diese Punkte Kreise vom Radius $\sqrt{\frac{1}{y^2} - \frac{2}{67}}$, so erkennt man, daß jeder Punkt des Parallelogramms innerhalb oder auf dem Rande eines der gezeichneten Kreise liegt; die Kreise überdecken das ganze Parallelogramm. Für die den Punkten entsprechenden Zahlen gilt daher

$$\left|\xi - \frac{x}{-y}\right| \leqq \sqrt{\frac{1}{y^2} - \frac{2}{67}} \quad \text{oder} \quad |x + \xi y|^2 \leqq 1 - \frac{2|y|^2}{67}.$$

Für Punkte ξ im Kreis um $\frac{x}{-y}$ stellt also x, y ein Zahlenpaar dar, für das die behauptete Ungleichung erfüllt wird.

Es gilt jetzt noch zu zeigen, daß die Kreise tatsächlich das Parallelogramm lückenlos überdecken. Alle Kreise um die Punkte $\frac{x}{-y}$ mit $-y = 1, 2, 3, 4$ überdecken, soweit sie jeweils gleichen Radius haben (ihre Mittelpunkte haben dann gleiches y), je einen Streifen des zu überdeckenden Parallelogramms. Der obere und untere Rand dieser Streifen

setzt sich aus (nach außen konvexen) Kreisbogen zusammen. Der oberste und unterste Streifen (für $y = -1$ und -2) gehört nur zur Hälfte zu unserem Parallelogramm. Wir bezeichnen diese Streifengebiete mit $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_4$, wobei der Index gleich dem Nenner der zugehörigen Mittelpunktswerte $\frac{x}{-y}$ sei.

Die kleinste Breite der Streifen, also der Abstand zweier übereinandergelegener Spitzen ist

für $\mathfrak{G}_1$: $h_1 = \frac{\sqrt{193}}{\sqrt{67}}$
für $\mathfrak{G}_2$: $h_2 = \frac{13}{2\sqrt{67}}$
} nur die Hälfte gehört zu unserem Gebiet.

für $\mathfrak{G}_3$: $h_3 = \frac{\sqrt{129}}{3\sqrt{67}}$,

für $\mathfrak{G}_4$: $h_4 = \frac{\sqrt{73}}{4\sqrt{67}}$.

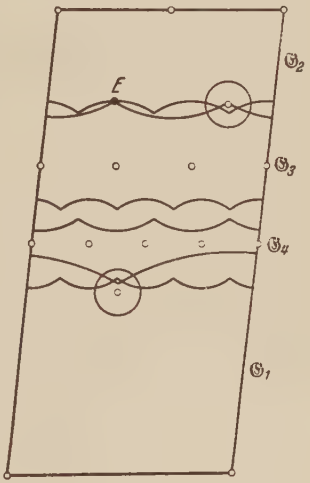


Fig. 7.

Unsere Streifengebiete überlagern sich — mit drei Ausnahmestellen — überall mit ihren oberen und unteren Rändern. Um dies durch Rechnung zu bestätigen, genügt es in der Regel, die Rechnung für die Spitzen auf den einzelnen Rändern durchzuführen. Die den Spitzen zugeordneten komplexen Zahlen sind

$$\frac{x}{-y} + \frac{1}{2y} \pm \frac{i}{2} \cdot h_{-y}.$$

I. Daß zwischen $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_4$ keine Lücke bleibt, erkennt man daraus, daß der untere Rand von $\mathfrak{G}_3$ ganz unterhalb des oberen Randes von $\mathfrak{G}_4$ liegt. Es liegen die Spitzen des letzteren Kreisbogenzuges alle oberhalb derer von $\mathfrak{G}_3$. Für die Imaginärteile dieser Punkte gilt nämlich

$$\frac{\sqrt{67}}{8} + \frac{\sqrt{73}}{8\sqrt{67}} > \frac{\sqrt{67}}{6} - \frac{\sqrt{129}}{6\sqrt{67}}.$$

II. Zwischen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_4$ tritt in der gegenseitigen Überlagerung bei der Stelle mit dem Realteil $\frac{1}{2}$ eine Lücke (Kreisbogenviereck) auf. Diese Lücke läßt sich aber mit dem Kreis $x = 2 + \omega$, $y = -5$ überdecken.

III. Eine ebensolche Lücke finden wir zwischen $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ (Realteil: 1). Auch hier liefert ein Kreis mit $x = 4 + 2\omega$, $y = -5$ die vollständige Überdeckung. Die dritte Ausnahmestelle tritt am Punkt

$$E = \frac{1}{2} + \frac{27}{2\sqrt{67}} i,$$

also auch zwischen $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ auf. Dieser Punkt liegt nur auf dem Rand beider Gebiete. Auch Kreise mit $y = -5$ gehen nur durch ihn hindurch, ohne ihn zu überdecken.

Mit Ausnahme von $\xi = E = \frac{1}{2} + \frac{27\,i}{2\sqrt{67}}$ läßt sich nach dem Gesagten für jedes ξ des betrachteten Parallelogramms die Formel

$$|x + \xi y|^2 < 1 - \frac{2|y|^2}{67}$$

durch eines der angegebenen Wertepaare x, y befriedigen. Nur für $\xi = \frac{1}{2} + \frac{27}{2\sqrt{67}}\,i$ ergibt sich statt einer Ungleichung die Gleichung

$$|x + E y|^2 = 1 - \frac{2|y|^2}{67}.$$

Entsprechend unserer Bemerkung zu Beginn dieses Paragraphen *ist damit unsere Behauptung bewiesen:*

$$m \leqq \sqrt{\frac{67}{2}\,\Delta}.$$

Auch hier ist die gefundene Abschätzung die bestmögliche; die Gleichheit kann sich allenfalls für

$$\xi = E = \frac{1}{2} + \frac{27}{2\sqrt{67}}\,i = \frac{20 + 27\,\omega}{67}$$

und wegen der, wie in § 2, durchgeführten Transformation auch für

$$\xi = g + \left(\frac{1}{2} + \frac{27}{2\sqrt{67}}\,i\right)$$

und

$$\xi = g - \left(\frac{1}{2} + \frac{27}{2\sqrt{67}}\,i\right)$$

ergeben. Die zugehörigen Formen

$$m|x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m}|y|^2$$

transformieren wir mittels der Äquivalenztransformation

$$x \to x + \left(\mp\frac{1 + i\sqrt{67}}{2} - g\right)\cdot y, \quad y \to y$$

und erhalten

$$m\left|x \mp \frac{20\,i}{\sqrt{67}}\,y\right|^2 + \frac{\Delta}{m}|y|^2$$

oder umgeformt

$$\sqrt{\frac{67}{2}\,\Delta}\left(x\bar{x} \pm \frac{20\,i}{\sqrt{67}}\,x\bar{y} \mp \frac{20\,i}{\sqrt{67}}\,\bar{x}y + 6\,y\bar{y}\right).$$

Diese Form hat aber tatsächlich das Minimum $\sqrt{\frac{67}{2}\,\Delta}$. Man überzeugt sich hiervon ebenso, wie es in § 3 für die dort behandelten Formen

geschah. Beide durch Vorzeichen unterschiedene Formen sind uneigentlich äquivalent.

Es gilt dann der Satz:

Alle positiven Hermiteschen Formen mit der Determinante Δ, die bezüglich des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{67})$ eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind zu der Form

$$\sqrt{\frac{67}{2}}\,\Delta\cdot\left(x\bar{x}+\frac{20\,i}{\sqrt{67}}\,x\bar{y}-\frac{20\,i}{\sqrt{67}}\,\bar{x}y+6\,y\bar{y}\right),$$

haben für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{67})$ das Minimum $\sqrt{\frac{67}{2}}\,\Delta$. Alle anderen positiven Hermiteschen Formen der Determinante Δ besitzen ein kleineres Minimum.

§ 9.

Der Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{163})$.

Die Klassenzahl des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{163})$ ist ebenfalls 1. Wir haben also nur, wie im Falle des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{67})$ zu jeder Zahl ξ aus dem Parallelogramm der Fig. 8 mit den Ecken

$$0,\ 1,\ \frac{\omega}{2},\ 1+\frac{\omega}{2},\quad \text{für } \omega=\frac{1+i\sqrt{163}}{2}$$

ein Paar ganzer Zahlen x, y anzugeben, so daß

$$|x+\xi y|^2 \leqq 1-\frac{2\,|y|^2}{163}.$$

Zum Beweis überdecke man, wie im vorigen Paragraphen, das Parallelogramm mit Kreisen vom Radius $\sqrt{\frac{1}{y^2}-\frac{2}{163}}$ um die Punkte $\frac{x}{-y}$, wobei x und y die nachfolgend angegebenen Zahlen bedeuten. Liegt dann ξ in einem Kreise um $\frac{x}{-y}$, so gilt für dieses Paar (x, y) die behauptete Ungleichung. Als Mittelpunkte kann man die in Fig. 8 markierten 59 Punkte wählen. Man erhält sie für:

$y=-1,\ x=0,\quad 1,$

$y=-2,\ x=\omega,\quad 1+\omega,\quad 2+\omega,$

$y=-3,\ x=\omega,\quad 1+\omega,\quad 2+\omega,\quad 3+\omega,$

$y=-4,\ x=\omega,\quad 1+\omega,\quad 2+\omega,\quad 3+\omega,\quad 4+\omega,$

$y=-5,\ x=\omega,\quad 1+\omega,\quad 2+\omega,\quad 3+\omega,\quad 4+\omega,\quad 5+\omega,$

$2\omega,\quad 1+2\omega,\quad 2+2\omega,\quad 3+2\omega,\quad 4+2\omega,\quad 5+2\omega,$

$y=-6,\ x=\omega,\quad 1+\omega,\quad 2+\omega,\quad 3+\omega,\quad 4+\omega,\quad 5+\omega,\quad 6+\omega,$

$$y = -7,\ x = \omega,\ 1+\omega,\ 2+\omega,\ 3+\omega,\ 4+\omega,\ 5+\omega,\ 6+\omega,\ 7+\omega,$$
$$2\omega,\ 1+2\omega,\ 2+2\omega,\ 3+2\omega,\ 4+2\omega,\ 5+2\omega,\ 6+2\omega,\ 7+2\omega,$$
$$3\omega,\ 1+3\omega,\ 2+3\omega,\ 3+3\omega,\ 4+3\omega,\ 5+3\omega,\ 6+3\omega,\ 7+3\omega,$$
$$y = -8,\ x = 1+3\omega,\ 4+3\omega.$$

Durch ebensolche Rechnungen, wie im Falle des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{67})$, kann man bestätigen, daß die Überdeckung des Parallelogramms lückenlos erfolgt. Mit Ausnahme des Punktes

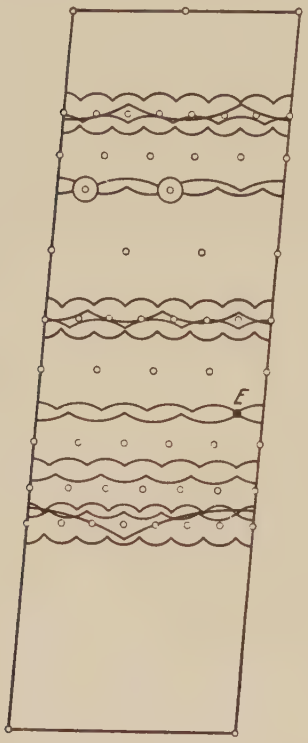


Fig. 8.

$$E = 1 + \frac{18}{\sqrt{163}}\,i,$$

der auf dem Rand der zugehörigen Kreise liegt, liegen alle anderen Punkte im Inneren von mindestens einem solchen Kreise. Wir können somit für jedes ξ ein Paar x, y angeben, so daß

$$\left|\xi - \frac{x}{-y}\right| \leqq \sqrt{\frac{1}{y^2} - \frac{2}{163}}$$

oder

$$|x + \xi y|^2 \leqq 1 - \frac{2|y|^2}{163},$$

w. z. b. w.

Es folgt sofort für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{163})$ *die Abschätzung des Minimums Hermitescher Formen*

$$m \leqq \sqrt{\frac{163}{2}\,\Delta}.$$

Auch für diesen Körper gibt es Formen, deren Minimum gleich dieser Schranke ist. Wir haben nur, wie in § 8, für

$$\xi = g \pm \left(1 + \frac{18}{\sqrt{163}}\,i\right)$$

eine Form mit $a = \sqrt{\frac{163}{2}\,\Delta}$ und der Determinante Δ aufzustellen:

$$\sqrt{\frac{163}{2}\,\Delta}\cdot\left(\left|x + \left(g \pm 1 \pm \frac{18\,i}{\sqrt{163}}\right)y\right|^2 + \frac{2}{163}|y|^2\right).$$

Transformiert man mittels

$$x \to x - (g \pm 1)\cdot y,\quad y \to y,$$

so kommt nach einer Umformung

$$\sqrt{\frac{163}{2}}\,\Delta\cdot\left(x\,\bar{x}\mp\frac{18\,i}{\sqrt{163}}\,x\,\bar{y}\pm\frac{18\,i}{\sqrt{163}}\,\bar{x}\,y+2\,y\,\bar{y}\right).$$

Diese Form hat aber tatsächlich das Minimum $\sqrt{\frac{163}{2}}\,\Delta$. Man überzeugt sich hiervon ebenso, wie es in § 3 für die dort betrachteten Formen geschah. Die beiden durch Vorzeichen unterschiedenen Formen sind uneigentlich äquivalent.

Es gilt der Satz:

Alle positiven Hermiteschen Formen mit der Determinante Δ, die bezüglich des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{163})$ eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind zu der Form

$$\sqrt{\frac{163}{2}}\,\Delta\cdot\left(x\,\bar{x}+\frac{18\,i}{\sqrt{163}}\,x\,\bar{y}-\frac{18\,i}{\sqrt{163}}\,\bar{x}\,y+2\,y\,\bar{y}\right),$$

haben für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{163})$ das Minimum $\sqrt{\frac{163}{2}}\,\Delta$. Alle anderen positiven Hermiteschen Formen der Determinante Δ besitzen ein kleineres Minimum.

§ 10.

Der Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{15})$.

In diesem Paragraphen möge ein Körper der Klassenzahl 2 behandelt werden, der Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{15})$. Es ist $15 \equiv -1 \pmod 4$. Das Gitter ganzer Zahlen ist also nicht rechtwinklig[16]). Wir legen durch die Gitterpunkte ein rhombisches Netz; die Ecken der einzelnen Maschen sind $g,\ g+1,\ g+\omega,\ g+1-\omega$, für $\omega=\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$. Fig. 9 stellt die obere Hälfte einer solchen Masche für $g=0$ mit den Ecken 0, 1, $\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$ dar.

Die Abschätzung des Minimums kann nun ganz entsprechend, wie in Kapitel II, durchgeführt werden.

Führen wir wieder das Hilfsminimum m_0 für alle Paare *relativprimer* $x,\ y$ ein, so läßt sich jede Form in die Gestalt

$$m_0\,|\,x+\xi\,y\,|^2+\frac{\Delta}{m_0}\,|\,y\,|^2$$

bringen. Wir können durch eine der Äquivalenztransformationen

$$x\to x-g\,y,\ y\to y$$

oder

$$x\to x+(1+g)\,y,\ y\to -y$$

---

[16]) Dies ist der Grund, warum wir gerade diesen Körper zur Untersuchung heranzogen.

eine Form, für die ξ in der durch g, $g+1$, $g+\omega$, $g+1-\omega$ bestimmten Masche liegt, in eine Form überführen, für die der neue Koeffizient ξ in das Dreieck der Fig. 9 zu liegen kommt.

In der Fig. 9 sind um die Punkte 0, 1, ω Kreise vom Radius $\sqrt{\frac{17}{20}}$, um die Punkte $\frac{\omega}{2}$ und $\frac{1+\omega}{2}$ Kreise vom Radius $\sqrt{\frac{1}{10}}$ gezeichnet. Durch diese Kreise wird das ganze Dreiecksgebiet überdeckt. Der Punkt

$$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} i \sqrt{15}$$

liegt auf dem Rand dieser Kreise, alle anderen Punkte liegen im Inneren von mindestens einem der Kreise.

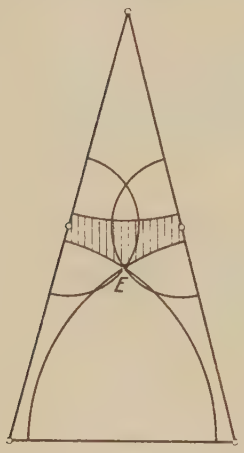


Fig. 9.

Wir teilen nun, wie Fig. 9 zeigt, das Dreiecksgebiet in zwei Teilgebiete: Alle Punkte, die innerhalb eines der drei Kreise vom Radius $\sqrt{\frac{17}{20}}$ liegen, sowie den Punkt E fassen wir zu einem Gebiet $\mathfrak{A}$, die übrigen Punkte zu einem Gebiet $\mathfrak{B}$ (in Fig. 9 schraffiert) zusammen.

I. Liegt ξ im Gebiet $\mathfrak{A}$, so nimmt die Form für $x = 0$, 1 bzw. ω, $y = -1$ einen Wert an, der größer oder gleich m_0 ist, da diese Zahlenpaare kein Ideal gemein haben. Es gilt also für diese Paare

$$m_0 \leqq m_0 |x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m_0}.$$

Hierbei ist

$$|x + \xi y|^2 \leqq \frac{17}{20},$$

wobei das Gleichheitszeichen gemäß unserer Gebietseinteilung nur für Punkt E gilt; wir erhalten also

$$m_0 \leqq \sqrt{\frac{20}{3}\Delta}$$

und es ergibt sich *die gesuchte Abschätzung*

$$m \leqq \sqrt{\frac{20}{3}\Delta}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei nur für die Form mit $\xi = E = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} i \sqrt{15}$ und alle zu ihr äquivalenten Formen (vgl. die Bemerkung am Ende dieses Paragraphen!).

II. Liege ξ im Gebiet $\mathfrak{B}$. Zur Vereinfachung der Rechnung soll das zu betrachtende Gebiet $\mathfrak{B}$ noch um die Hälfte verkleinert werden. Liegt nämlich ξ in der rechten Hälfte von $\mathfrak{B}$, d. h. ist der Realteil von ξ größer als $\frac{1}{2}$, so führen die Transformationen

$$\bar{x} \to x, \quad \bar{y} \to y$$

und dann

$$x \to x + y, \quad y \to -y \text{ (Determinante } = -1)$$

auf Formen, für die ξ in der in Fig. 10 dargestellten Hälfte von $\mathfrak{B}$ liegt.

Ist zunächst

$$m_0 < \sqrt{\frac{20}{3}}\,\Delta,$$

so folgt sofort

$$m < \sqrt{\frac{20}{3}}\,\Delta.$$

Es sei also nun

$$m_0 \geqq \sqrt{\frac{20}{3}}\,\Delta.$$

Als erstes behandeln wir $\xi = \frac{\omega}{2} = \frac{1 + i\sqrt{15}}{4}$, also die Form

$$m_0 \left| x + \frac{1 + i\sqrt{15}}{4} y \right|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2.$$

Für $x = \frac{1 + i\sqrt{15}}{2}$, $y = -2$ nimmt die Form den Wert

$$\frac{4\Delta}{m_0} \leqq \frac{4\Delta}{\sqrt{\frac{20}{3}}\,\Delta} = \sqrt{\frac{12}{5}}\,\Delta < \sqrt{\frac{20}{3}}\,\Delta$$

an, also gilt für ihr Minimum

$$m < \sqrt{\frac{20}{3}}\,\Delta.$$

Den Punkt $\frac{\omega}{2}$ schließen wir von nun an aus dem Gebiet $\mathfrak{B}$ aus. Bezeichnen wir nun den Abstand des Punktes ξ von $\frac{\omega}{2}$ mit ϱ, so gilt für alle Punkte aus $\mathfrak{B}$:

$$0 < \varrho < \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Wir betrachten die Formen mit

$$\sqrt{\frac{20}{3}}\,\Delta \leqq m_0 \leqq \frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\frac{3}{20}}\,\Delta$$

oder, wenn wir $m_0 = C_0\sqrt{\Delta}$ setzen:

$$\sqrt{\frac{20}{3}} \leqq C_0 \leqq \frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\frac{3}{20}}.$$

Für $x = \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$, $y = -2$ erhält die Form

$$m_0 |x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{m_0} |y|^2$$

den Wert

$$4 \cdot \sqrt{\Delta} \cdot \left(C_0 \varrho^2 + \frac{1}{C_0} \right).$$

Für die Grenzen $C_0 = \sqrt{\frac{20}{3}}$ und $C_0 = \frac{1}{\varrho^2} \sqrt{\frac{3}{20}}$ wird dieser Ausdruck zu

$$4\sqrt{\Delta} \cdot \left(\sqrt{\frac{20}{3}} \varrho^2 + \sqrt{\frac{3}{20}} \right) < 4\sqrt{\Delta} \left(\frac{1}{10} \sqrt{\frac{20}{3}} + \sqrt{\frac{3}{20}} \right) = \sqrt{\frac{20}{3}} \Delta.$$

Für alle anderen C_0 erhält man kleinere Werte. *Es gilt daher für das Minimum die Abschätzung*

$$m < \sqrt{\frac{20}{3}} \Delta.$$

III. Sei schließlich

$$C_0 > \frac{1}{\varrho^2} \sqrt{\frac{20}{3}}.$$

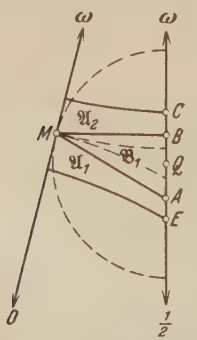
Für $x = \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$, $y = -2$ nimmt die Form den Wert

$$4 \cdot \sqrt{\Delta} \left(C_0 \varrho^2 + \frac{1}{C_0} \right)$$

an. Um diesen Wert und damit auch das Minimum der Form abzuschätzen, genügt es wieder, zu jedem Wert ξ die Größe der jeweils möglichen Werte m_0 abzuschätzen, wie es auch in § 6 geschah. Zu diesem Zweck zerlegen wir das (nunmehr halbierte) Gebiet $\mathfrak{B}$ in drei Teilgebiete $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1$, indem wir zwei Geraden einzeichnen (vgl. Fig. 10):

Gerade MB durch $M = \frac{\omega}{2}$ parallel zur reellen Achse,

Gerade MA durch $M = \frac{\omega}{2}$ und $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{14} i\sqrt{15}$.



$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{14} i\sqrt{15}$,
$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} i\sqrt{15}$,
$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} i\sqrt{15}$,
$M = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\sqrt{15}$,
$Q = \frac{1}{2} + \frac{7}{30} i\sqrt{15}$.

Fig. 10.

Nun liegt das Gebiet $\mathfrak{A}_1$ (unterhalb MA) innerhalb des Einheitskreises um den Punkt 0; ferner Gebiet $\mathfrak{A}_2$ (oberhalb MB) im Einheitskreis um ω. Das Restgebiet $\mathfrak{B}_1$ liegt in einem Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{15}}$ um den Punkt $Q = \frac{1}{2} + \frac{7}{30} i\sqrt{15}$. (Diese Kreise sind in Fig. 10 eingezeichnet.) *Alle* Punkte der Gebiete liegen im Inneren der jeweiligen Kreise; der Punkt $M = \frac{\omega}{2}$, der auf der Peripherie der drei Kreise liegt, wurde oben ausgeschlossen.

Wir definieren nun eine positive Zahl C, entsprechend § 6, mittels:

$$\left|\xi - \frac{x}{-y}\right|^2 = \frac{1}{|y|^2} - \frac{1}{C^2}. \tag{11}$$

Hierbei bedeute

für Punkte ξ in $\mathfrak{A}_1$: $x = 0,\ y = -1,$

für Punkte ξ in $\mathfrak{A}_2$: $x = \frac{1 + i\sqrt{15}}{2},\ y = -1,$

für Punkte ξ in $\mathfrak{B}_1$: $x = 4 - \frac{1 + i\sqrt{15}}{2},\ y = i\sqrt{15}.$

Die Werte $\frac{x}{-y}$ stellen hierbei gerade die Mittelpunkte 0, ω und Q der angegebenen drei Kreise mit dem Radius $\frac{1}{|y|}$ dar, die Definition (11) ist also möglich.

Da diese Zahlenpaare keinen Idealteiler gemein haben, ist für diese Paare

$$m_0 = C_0\sqrt{\Delta} \leqq C_0\sqrt{\Delta}\cdot|x + \xi y|^2 + \frac{\sqrt{\Delta}}{C_0}|y|^2$$

oder wegen (11):

$$C_0 \leqq C.$$

Hieraus erhalten wir, da die Form für $x = \frac{1 + i\sqrt{15}}{2},\ y = -2$ den Wert

$$4\cdot\sqrt{\Delta}\cdot\left(C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0}\right) \geqq m$$

annahm:

$$m \leqq 4\cdot\sqrt{\Delta}\left(C\varrho^2 + \frac{1}{C}\right);$$

es ist hierbei zu beachten, daß der Ausdruck $C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0}$ für wachsendes $C_0 > \frac{1}{\varrho^2}\sqrt{\frac{20}{3}}$ selbst stets wächst. Um nun zu der gesuchten Abschätzung des Minimum m zu gelangen, haben wir die soeben gefundene Abschätzung

von m weiter zu behandeln und zunächst für jedes ξ den Wert von C und ϱ mit Benutzung von (11) zu berechnen.

Für das Gebiet $\mathfrak{A}_1$ wird Gleichung (11) zu

$$|\xi|^2 = 1 - \frac{1}{C^2},$$

also

$$C = \frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}.$$

Für das Gebiet $\mathfrak{A}_2$ bezeichnen wir den Abstand des Punktes ξ von ω mit λ, dann wird Gleichung (11) zu

$$\lambda^2 = 1 - \frac{1}{C^2},$$

also

$$C = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Für das Gebiet $\mathfrak{B}_1$ setzen wir $\xi = u + v\frac{1+i\sqrt{15}}{2}$; dann ergibt sich aus Gleichung (11) und der Definition von ϱ:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{2} - \varrho^2}}.$$

Somit erhalten wir für den abzuschätzenden Ausdruck:

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{1+\varrho^2-|\xi|^2}{\sqrt{1-|\xi|^2}} \quad \text{für das Gebiet } \mathfrak{A}_1,$$

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{1+\varrho^2-\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad \text{für das Gebiet } \mathfrak{A}_2,$$

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\frac{u}{2}}{\sqrt{\frac{u}{2} - \varrho^2}} \quad \text{für das Gebiet } \mathfrak{B}_1.$$

Gebiet $\mathfrak{A}_1$: Der Ausdruck wird für festes $|\xi|$ am größten bei großem ϱ. Alle diese Punkte liegen auf MA und AE (Vgl. Fig. 10).

Gebiet $\mathfrak{A}_2$: Der Ausdruck wird für festes λ am größten bei großem ϱ. Alle diese Punkte liegen auf MB und BC.

Gebiet $\mathfrak{B}_1$: Der Ausdruck wird für festes u am größten bei großem ϱ. Alle diese Punkte liegen auf MA und AB.

Wir schätzen nun im einzelnen ab.

Gebiet $\mathfrak{A}_1$.

Für Punkte auf MA ist $|\xi|^2 = 1 - \frac{\varrho}{2} + \varrho^2$; ferner $0 < \varrho \leqq \frac{2}{7}$. Dann wird

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\varrho}{\sqrt{2\varrho - 4\varrho^2}} < \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

Für Punkte auf AE ist $\varrho^2 = 1 - \frac{15}{4} v + \frac{15}{4} v^2$, $|\xi|^2 = \frac{1}{4} + \frac{15}{4} v^2$; ferner $\frac{2}{5} < v \leqq \frac{3}{7}$. Dann wird

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{7 - 15v}{2\sqrt{3 - 15v^2}} < \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

Gebiet $\mathfrak{A}_2$.

Für Punkte auf MB ist $u = \varrho$ und $\lambda^2 = 1 - \frac{1}{2} u + u^2$; ferner $0 < \varrho \leqq \frac{1}{4}$. Dann wird

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\varrho}{\sqrt{2\varrho - 4\varrho^2}} < \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

Für Punkte auf BC ist $\varrho^2 = 1 - \frac{15}{2} u + 15u^2$ und $\lambda^2 = 15u^2$; ferner $\sqrt{\frac{17}{300}} \leqq u \leqq \frac{1}{4}$. Dann wird

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{4 - 15u}{2\sqrt{1 - 15u^2}} < \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

Gebiet $\mathfrak{B}_1$.

Für Punkte auf MA ist $u = \varrho$; ferner $0 < \varrho \leqq \frac{2}{7}$. Dann wird

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{\varrho}{\sqrt{2\varrho - 4\varrho^2}} < \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

Für Punkte auf AB ist $\varrho^2 = 1 - \frac{15}{2} u + 15u^2$; ferner $\frac{1}{4} \leqq u \leqq \frac{2}{7}$. Dann wird

$$C\varrho^2 + \frac{1}{C} = \frac{u}{\sqrt{-4 + 32u - 60u^2}} < \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

Da die zu betrachtende Form für $x = \frac{1 + i\sqrt{15}}{2}$, $y = -2$ den Wert $4 \cdot \sqrt{\Delta}\left(C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0}\right)$ annahm, da wir ferner fanden, daß stets

$$C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0} \leqq C\varrho^2 + \frac{1}{C} < \sqrt{\frac{5}{12}},$$

ergibt sich für den Wert der Form

$$F\left(\frac{1 + i\sqrt{15}}{2}, -2\right) = 4 \cdot \sqrt{\Delta}\left(C_0\varrho^2 + \frac{1}{C_0}\right) < 4 \cdot \sqrt{\Delta} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{20}{3}\Delta}.$$

Dann gilt aber für das Minimum der Form erst recht *die gesuchte Abschätzung*:

$$m < \sqrt{\frac{20}{3}\Delta}.$$

Damit ist für alle Formen das Minimum abgeschätzt.

IV. Das Minimum $m = \sqrt{\frac{20}{3}\,\Delta}$ kann allenfalls, wie es sich in Teil I dieses Paragraphen ergab, für $\xi = E = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\,i\sqrt{15}$ auftreten. Die Transformation

$$x \to x - \omega \cdot y, \quad y \to y$$

mit der Determinante $+1$ führt dann auf die Form

$$\sqrt{\frac{20}{3}\,\Delta}\left|x - \frac{3}{10}\,i\sqrt{15}\,y\right|^2 + \sqrt{\frac{3}{20}\,\Delta}\,|y|^2$$

oder

$$\sqrt{\frac{20}{3}\,\Delta}\cdot\left(x\bar{x} + \frac{9\,i}{2\sqrt{15}}\,x\bar{y} - \frac{9\,i}{2\sqrt{15}}\,\bar{x}y + \frac{3}{2}\,y\bar{y}\right).$$

Diese Form hat aber tatsächlich das Minimum $\sqrt{\frac{20}{3}\,\Delta}$. Man überzeugt sich hiervon ebenso, wie es in § 7 für die dort betrachteten Formen geschah. (Die zu verwendenden Werte y sind

$$\pm y = 0,\ 1,\ 2,\ \omega,\ 1 \pm \omega,\ 2 - \omega,$$

mit $|y|^2 < \frac{20}{3}$). Es gilt der Satz:

Alle positiven Hermiteschen Formen mit der Determinante Δ, die bezüglich des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{15})$ eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind zu der Form

$$\sqrt{\frac{20}{3}\,\Delta}\left(x\bar{x} + \frac{9\,i}{2\sqrt{15}}\,x\bar{y} - \frac{9\,i}{2\sqrt{15}}\,\bar{x}y + \frac{3}{2}\,y\bar{y}\right),$$

haben für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{15})$ das Minimum $\sqrt{\frac{20}{3}\,\Delta}$. Alle anderen positiven Hermiteschen Formen der Determinante Δ besitzen ein kleineres Minimum.

Kapitel IV.

§ 11.

Allgemeiner imaginärer quadratischer Körper.

Die Methoden der vorausgehenden Kapitel lassen sich mit geringen Abänderungen auch auf andere Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ anwenden. So kann man für die zwischen 1 und 20 liegenden, noch nicht behandelten Werte D die folgenden Abschätzungen des Minimums Hermitescher Formen

finden. Es bedeute k hierbei die Klassenzahl des jeweiligen Körpers. Man erhält für

$$D = 6 \quad (k = 2): \quad m \leqq \sqrt{2 \cdot 6}\, \Delta,$$

$$D = 10 \quad (k = 2): \quad m \leqq \sqrt{\frac{64}{39} \cdot 10}\, \Delta,$$

$$D = 13 \quad (k = 2): \quad m \leqq \sqrt{\frac{64}{35} \cdot 13}\, \Delta,$$

$$D = 14 \quad (k = 4): \quad m \leqq \sqrt{\frac{64}{41} \cdot 14}\, \Delta,$$

$$D = 17 \quad (k = 4): \quad m \leqq \sqrt{2 \cdot 17}\, \Delta.$$

Die Formen, deren Minimum den größtmöglichen Wert besitzt, sind dabei äquivalent zu

$$a \cdot |x + \xi y|^2 + \frac{\Delta}{a} |y|^2,$$

wobei a die angegebene Schranke des Minimums m ist und ξ folgende Zahlen bedeutet:

$$\text{für } D = 6: \quad \xi = \frac{1}{2} + \frac{2i}{\sqrt{6}},$$

$$D = 10: \quad \xi = \frac{1}{2} + \frac{21i}{8\sqrt{10}},$$

$$D = 13: \quad \xi = \frac{1}{8} + \frac{7i}{2\sqrt{13}},$$

$$D = 14: \quad \xi = \frac{1}{8} + \frac{29i}{8\sqrt{14}} \text{ und } \xi = \frac{3}{8} + \frac{27i}{8\sqrt{14}},$$

$$D = 17: \quad \xi = \frac{1}{2} + \frac{7i}{2\sqrt{17}}.$$

Es liegt nun nahe, auch allgemein für einen *beliebig* gegebenen Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ nach einer Abschätzung des Minimums zu fragen. Unsere Methoden haben für jeden einzelnen Körper gewisse spezielle Betrachtungen und Rechnungen erfordert, die zu einer Verallgemeinerung allerdings wenig geeignet sind.

Herr A. Oppenheim hat sich ebenfalls mit diesen Fragen befaßt und findet unter anderem nachstehenden Satz[17]):

Alle positiven Hermiteschen Formen mit der Determinante Δ haben für den Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ ein Minimum m, das der Ungleichung

$$m \leqq \sqrt{\frac{D}{2}}\, \Delta \qquad \text{für } D \equiv -1 \pmod 4$$

$$m \leqq \sqrt{2D}\, \Delta \qquad \text{für } D \not\equiv -1 \pmod 4$$

[17]) A. Oppenheim, The minima of positive definite Hermitian binary quadratic forms. Math. Zeitschr. 38 (1934), S. 538–545.

genügt. — Das Gleichheitszeichen gilt nur für solche Werte D, für die die Kongruenz

$$x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{D}$$

Lösungen besitzt.

An den von uns in diesem und den vorigen Kapiteln angegebenen Ergebnissen lassen sich die Aussagen dieses Satzes für die einzelnen Körper bestätigen. Insbesondere liefert der Satz genaue (bestmögliche) Schranken für die Körper $\Re(i\sqrt{D})$ mit

$$D = 43,\ 67,\ 163, \quad \text{sowie} \quad 6 \text{ und } 17,$$

wie wir sie auch oben erhielten. Für die übrigen behandelten Körper mit

$$D = 5,\ 15, \quad \text{sowie} \quad 10,\ 13 \text{ und } 14$$

dagegen ist die durch den Oppenheimschen Satz gelieferte Schranke nicht die bestmögliche. Die Kongruenz $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{D}$ besitzt für diese Werte D keine Lösungen.

(Eingegangen am 9. August 1933.)

Über eine besondere Klasse rekurrierend definierter Zahlfolgen und ihr Konvergenzverhalten.

Herrn Richard Fuchs zum 60. Geburtstage gewidmet.

Von

Ernst Jacobsthal in Berlin.

Einleitung.

Die Herren K. Knopp und I. Schur beweisen in einer gemeinsam verfaßten Arbeit[1]) einen Hilfssatz, der sich mit Konvergenzeigenschaften einer Zahlfolge befaßt, die durch eine dreigliedrige lineare Rekursion definiert und ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes von O. Perron[1]) ist. Das für den Beweis verwandte Hilfsmittel ist eine Kettenbruchentwicklung. Man kann aber die Rekursionsformel als eine nichtlineare zweigliedrige Rekursionsformel schreiben und dann ergibt sich ein noch kürzerer Beweis, wenn man nur die Eigenschaften des unteren und oberen Limes einer Zahlfolge benutzt. Diese Beweismethode läßt sich auf eine ganze Klasse $(p+1)$-gliedriger Rekursionen übertragen. Das Ergebnis ist der Konvergenzsatz 5 des § 2.

§ 1.

Es sei $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p+1})$ eine Funktion der $(p+1)$ reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$; dabei sei $p \geqq 1$. Die Veränderlichen sollen auf das offene Intervall J des $(p+1)$-dimensionalen Raumes beschränkt sein, das durch $\alpha < x_\lambda < \beta$, $\lambda = 1, 2, \ldots, p+1$ definiert ist[2]). Die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$ sei an jeder Stelle des angegebenen Intervalles eine stetige Funktion aller Variablen. Ferner soll sie die folgende Eigenschaft besitzen: in bezug auf die erste Veränderliche x_1 ist sie eine streng monoton wachsende Funktion; in bezug auf jede der anderen Veränderlichen x_ϱ aber ist sie monoton fallend (in strengem Sinne)[3]). Es soll also bei $x_1 < x_1'$ gelten:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) < f(x_1', x_2, \ldots, x_{p+1}). \tag{1}$$

---

[1]) K. Knopp und I. Schur. Elementarer Beweis einiger asymptotischer Formeln der additiven Zahlentheorie. Math. Zeitschr. 24, S. 565, Hilfssatz 3. — O. Perron, Über lineare Differenzengleichungen zweiter Ordnung, deren charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat; Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften (1917), § 4.

[2]) Dabei darf $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$ sein.

[3]) Statt der in (1) und (2) vorausgesetzten Monotonieverhältnisse kann man auch die entgegengesetzten Voraussetzungen machen: f soll bei wachsendem x_1 ab-

Ist dagegen ϱ einer der Indizes $2, 3, \ldots, p+1$, so soll aus $x_\varrho < x'_\varrho$ folgen, daß

$$(2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_\varrho, \ldots, x_{p+1}) > f(x_1, x_2, \ldots, x'_\varrho, \ldots, x_{p+1})$$

ist. Wegen des gleichartigen Monotonieverhaltens in bezug auf $x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}$ bezeichnen wir abgekürzt die Funktion f mit $f(x_1; x_\varrho)$.

Es seien nun $(p+1)$ Zahlfolgen gegeben:

$$(3) \qquad a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, a_3^{(\lambda)} \ldots, \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, p+1),$$

alle in dem erwähnten offenen Intervall von α bis β gelegen. Der untere Limes der λ-ten Folge werde mit $a^{(\lambda)}$ bezeichnet, der obere mit $A^{(\lambda)}$; diese Zahlen sollen auch noch dem offenen Intervall von α bis β angehören, so daß

$$(4) \qquad \alpha < \underline{\lim}\, a_n^{(\lambda)} = a^{(\lambda)} \leqq \overline{\lim}\, a_n^{(\lambda)} = A^{(\lambda)} < \beta, \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots p+1)$$

ist.

Man setze nun weiter:

$$(5) \qquad f(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(p+1)}) = f(a_n^{(1)}; a_n^{(\varrho)}) = c_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

und es sei

$$(6) \qquad \underline{\lim}\, c_n = c, \; \overline{\lim}\, c_n = C.$$

Dann gelten folgende Ungleichheiten[4]):

$$(7) \qquad f(a^{(1)}; A^{(\varrho)}) \leqq c \leqq f(a^{(1)}; a^{(\varrho)}),$$
$$f(A^{(1)}; A^{(\varrho)}) \leqq C \leqq f(A^{(1)}; a^{(\varrho)}).$$

Beweis: Es sei ε so klein, daß alle $4p+4$ Größen $a^{(\lambda)} \pm \varepsilon$, $A^{(\lambda)} \pm \varepsilon$ im offenen Intervall von α bis β liegen. Es sei λ ein fester Index der Reihe $1, 2, \ldots, p+1$. Dann ist für fast alle n:

$$a^{(\lambda)} - \varepsilon < a_n^{(\lambda)} < A^{(\lambda)} + \varepsilon.$$

Also wird auf Grund von (1) und (2) für alle hinreichend großen n:

$$(a) \qquad f(a^{(1)} - \varepsilon; A^{(\varrho)} + \varepsilon) < c_n < f(A^{(1)} + \varepsilon; a^{(\varrho)} - \varepsilon).$$

---

nehmen und bei zunehmendem x_ϱ, $(\varrho \geqq 2)$, wachsen. Da man ja aber diese Annahmen durch Multiplikation der Funktion f mit -1 in die oben gemachten Annahmen überführt, kann man sich diese Fallunterscheidung sparen. Jedenfalls sieht man daraus, daß die zu entwickelnden Sätze auch bei entgegengesetztem Monotonieverhalten von f gelten.

[4]) In dem besonderen Fall $p = 1$ lautet (7) vollständiger so:

$$(7') \qquad f(a^{(1)}, A^{(2)}) \leqq c \leqq \left\{ \begin{matrix} f(A^{(1)}, A^{(2)}) \\ f(a^{(1)}, a^{(2)}) \end{matrix} \right\} \leqq C \leqq f(A^{(1)}, a^{(2)}).$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (1) und (2): Haben von den drei Folgen $\{a_n^{(1)}\}$, $\{a_n^{(2)}\}$, $\{c_n\}$ zwei einen Limes, so konvergiert auch die dritte. Der mittlere Teil von (7') wird ähnlich bewiesen wie (7).

Für unendlich viele n ist aber:

(b) $$c_n < c + \varepsilon,\ c_n > C - \varepsilon$$

richtig; also folgt aus (a) und (b), daß

(c) $$C - \varepsilon < f(A^{(1)} + \varepsilon;\ a^{(\varrho)} - \varepsilon);\quad c + \varepsilon > f(a^{(1)} - \varepsilon;\ A^{(\varrho)} + \varepsilon)$$

wird. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt hieraus die linke Hälfte der ersten Relation (7) und die rechte Hälfte der zweiten Beziehung (7), wenn man die Stetigkeit von f beachtet.

Für unendlich viele n ist jede der Ungleichheiten:

$$a_n^{(1)} > A^{(1)} - \varepsilon,\ a_n^{(1)} < a^{(1)} + \varepsilon$$

und für fast alle n und beliebiges ϱ der Reihe $2, 3, \ldots, p+1$ sind alle Ungleichheiten:

$$a_n^{(\varrho)} < A^{(\varrho)} + \varepsilon,\ a_n^{(\varrho)} > a^{(\varrho)} - \varepsilon$$

richtig. Aus den linken bzw. rechten Ungleichheiten und (1) und (2) ergibt sich also, daß für unendlich viele n jede der folgenden Ungleichheiten erfüllt ist:

(d) $$c_n > f(A^{(1)} - \varepsilon,\ A^{(\varrho)} + \varepsilon),\ c_n < f(a^{(1)} + \varepsilon,\ a^{(\varrho)} - \varepsilon).$$

Aus der Tatsache, daß für fast alle n

$$c - \varepsilon < c_n < C + \varepsilon$$

ist, folgt durch passende Kombination mit (d) schließlich:

(e) $$C + \varepsilon > f(A^{(1)} - \varepsilon, A^{(\varrho)} + \varepsilon),\ c - \varepsilon < f(a^{(1)} + \varepsilon, a^{(\varrho)} - \varepsilon).$$

Hieraus ergeben sich auf Grund der Stetigkeit von f mit $\varepsilon \to 0$ die noch ausstehenden Ungleichheiten (7).

Bezüglich der unteren und oberen Limites der Zahlfolgen (3) werde nun weiter vorausgesetzt, daß für $\varrho = 2, 3, \ldots, p+1$

(8) $$a^{(\varrho)} \geqq a^{(1)} = a;\ A^{(\varrho)} \leqq A^{(1)} = A$$

ist. Dann folgt aus (7) in Verbindung mit (1) und (2):

(9) $$f(a;\ A) \leqq c \leqq f(a;\ a);\ f(A;\ A) \leqq C \leqq f(A;\ a)^{5}).$$

Die in der Voraussetzung (8) steckende besondere Eigenschaft der Zahlfolgen (3) realisieren wir durch folgende Festsetzungen. Bedeutet $\psi(n)$ eine ganzwertige Funktion der positiven ganzen Zahl n mit der Eigenschaft

(10) $$\lim_{n \to \infty} \psi(n) = +\infty,\ \psi(n) < n^{6}),$$

---

[5]) Man beachte bei dieser abgekürzten Schreibweise der Funktionswerte, daß z. B. $f(a;\ A)$ den Wert der Funktion f für $x_1 = a;\ x_2 = x_3 = \ldots = x_{p+1} = A$ bedeutet.

[6]) Bei $p = 1$ ist $\psi(n) \leqq n$ zulässig.

dann ist für $n \geqq n'$ sicher $\psi(n) \geqq 1$ und es wird für die Folge

$$a^{(1)}_{\psi(n')},\ a^{(1)}_{\psi(n'+1)},\ a^{(1)}_{\psi(n'+2)} \cdots$$

der obere Limes gewiß $\leqq A$ und der untere Limes $\geqq a$. Denken wir uns nun p solche Funktionen $\psi(n)$ gegeben, die (10) erfüllen, und setzen wir sie

$$\psi_\varrho(n) = m^{(\varrho)}_n, \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, p), \tag{11}$$

so sei n_0 die kleinste Nummer, von der ab jedes $m^{(\varrho)}_n \geqq 1$ ist; es ist dann für jedes $n \geqq n_0$[7]) und jedes ϱ der Reihe $1, 2, \ldots, p$ stets

$$\psi_\varrho(n) = m^{(\varrho)}_n \geqq 1. \tag{12}$$

Mit dieser Verabredung setzen wir $a^{(1)}_n = a_n$ und

$$a^{(\varrho)}_n = a_{m^{(\varrho-1)}_n}, \quad (n \geqq n_0,\ 2 \leqq \varrho \leqq p+1). \tag{13}$$

Die so für $n \geqq n_0$ definierten Folgen $\{a^{(\varrho)}_n\}$ erfüllen dann (8). Es wird für alle diese n die Größe c_n:

$$c_n = f(a_n, a_{m^{(1)}_n}, a_{m^{(2)}_n}, \ldots, a_{m^{(p)}_n}) = f(a_n; a_{m^{(\varrho)}_n}). \tag{14}$$

Mit diesen Festsetzungen ist nun (9) sicher richtig. Alles dies setzt also voraus, daß die Folge $\{a_n\}$ einschließlich ihres unteren und oberen Limes im offenen Intervall von α bis β liegt, c_n durch (14) erklärt ist und die Indizes $m^{(\varrho)}_n$ (10) und (11) erfüllen. Die selbstverständliche Tatsache, daß aus $a = A$ auch $c = C$ folgt, interessiert nicht; wohl aber die Frage: wann läßt sich zu einer konvergenten Folge $\{c_n\}$ aus (14) eine Folge $\{a_n\}$ bestimmen, die ihrerseits konvergiert? Durch eine zusätzliche weitere Voraussetzung über das Verhalten von f wird eine Beantwortung dieser Frage möglich. Wir setzen nämlich noch voraus, daß

$$z = f(x, x, x, \ldots, x) = \varphi(x), \qquad (\alpha < x < \beta), \tag{15}$$

nicht konstant ist und es ein Intervall $\alpha \leqq \alpha' < x < \beta' \leqq \beta$ gebe, in dem $z = \varphi(x)$ sich im selben Sinne monoton verhalte wie $f(x_1; x_\varrho)$ in bezug auf die erste Veränderliche x_1[8]), d. h. bei den getroffenen Vereinbarungen über f, es soll $z = \varphi(x)$ zugleich mit x wachsen. Also ist für $\alpha \leqq \alpha' < x < x' < \beta' \leqq \beta$:

$$\varphi(x) < \varphi(x'). \tag{16}$$

Wenn nun die dem offenen Intervall $\alpha \ldots \beta$ angehörenden Zahlen a und A sogar dem Intervall $\alpha' \ldots \beta'$ angehören, dann lehrt (9):

$$f(a; A) \leqq c \leqq \varphi(a) \leqq \varphi(A) \leqq C = f(A; a). \tag{17}$$

Bei $c = C$ ergibt sich daher aus der Monotonie von $\varphi(x)$ hieraus, daß auch $a = A$ ist, also $\lim a_n$ existiert. Somit gilt

[7]) Aus (10) und (12): Bei $p \geqq 2$ ist $n_0 \geqq 2$.

Satz 1: *Besitzt die Funktion f die durch* (1), (2), (15) *und* (16) *festgelegten Monotonieeigenschaften und liegt die Folge $\{a_n\}$ im offenen Intervall von α bis β; ist ferner der untere Limes a dieser Folge $\neq \alpha$, der obere $A \neq \beta$, dabei aber noch a und A in $\alpha' \ldots \beta'$ gelegen, so ist die durch* (14) *erklärte Folge $\{c_n\}$ mit $\{a_n\}$ gleichzeitig konvergent oder divergent.*

Die Frage, ob man zu gegebener konvergenter Folge $\{c_n\}$ nun umgekehrt in $\alpha' \ldots \beta'$ eine (dann konvergente) Folge $\{a_n\}$ aus (14) finden kann und unter welchen Voraussetzungen über die c_n, soll im folgenden Paragraphen untersucht werden.

§ 2.

Wenn man

$$\lim_{x \to \alpha' + 0} \varphi(x) = \gamma, \quad \lim_{x \to \beta' - 0} \varphi(x) = \delta \tag{18}$$

setzt, ist $\gamma < \delta$; bei $\alpha' > \alpha$ ist dann $\gamma = \varphi(\alpha')$ und bei $\beta' < \beta$ ist $\delta = \varphi(\beta')$. Ist $\alpha' = \alpha$, so ist möglicherweise $\gamma = -\infty$; entsprechend ist für den Fall, daß $\beta' = \beta$ ist, $\delta = +\infty$ möglich. Aus der Monotonie und Stetigkeit von $\varphi(x)$ in $\alpha' \ldots \beta'$ ergibt sich sofort

Satz 2: *Genügt die Zahl t gleichzeitig den Bedingungen $\gamma \leqq t \leqq \delta$, $\gamma + \alpha - \alpha' < t < \delta + \beta - \beta'$, dann hat die Gleichung $\varphi(x) = t$ eine einzige von α und β verschiedene Lösung x' im Intervall $\alpha' \ldots \beta'$. Es ist dann und nur dann $x' = \alpha'$, wenn $\alpha' > \alpha$ und $t = \gamma$ ist; und dann und nur dann ist $x' = \beta'$, wenn $\beta' < \beta$ und $t = \delta$ ist.*

Aus diesem Satze ergibt sich weiter

Satz 3: *Es sei $\{c_n\}$ eine gegen $c = c_0$ konvergente Zahlfolge; jedes c_n und auch c_0 genüge gleichzeitig den Bedingungen*

$$\gamma \leqq c_n \leqq \delta, \quad \gamma + \alpha - \alpha' < c_n < \delta + \beta - \beta', \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Bezeichnet man dann die nach Satz 2 in $\alpha' \ldots \beta'$ eindeutig bestimmte und von α und β verschiedene Lösung der Gleichung $\varphi(x) = c_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, mit a_n', so ist die Folge $\{a_n'\}$ konvergent; ist ihr Grenzwert a, so ist $\bar{a}$ von α und β verschieden, $\alpha' \leqq \bar{a} \leqq \beta'$, $\varphi(\bar{a}) = c$. Ist die untere Grenze der Folge $\{a_n'\}$ gleich g, die obere gleich G, so ist $g > \alpha$, $G < \beta$.

Beweis: Daß $\{a_n'\}$ konvergent ist, folgt aus dem Satze über die Umkehrung monotoner stetiger Funktionen. Da $\alpha' \leqq a_n' \leqq \beta'$ ist, so ist im Falle, daß $\alpha' > \alpha$, $\beta' < \beta$ ist, klar, daß $\bar{a}$, g, G im offenen Intervall von α bis β liegen. Daß dies auch gilt, wenn entweder $\alpha' = \alpha$ oder $\beta' = \beta$ ist, bleibt noch zu zeigen. Sei also $\alpha' = \alpha$. Dann ist nach den Bedingungen, denen die c_n unterworfen sind, jedes c_n und auch $c_0 = c = \lim c_n > \gamma$. Also ist die Lösung $\bar{a}$ von $\varphi(x) = c$ nach Satz 2 sicher $\neq \alpha'$, also $\neq \alpha$; es ist demnach $\bar{a} = \lim a_n' > \alpha$, also auch $g > \alpha$, da ja jedes $a_n' \neq \alpha$ ist. Der Fall $\beta' = \beta$ erledigt sich entsprechend.

Satz 4: *Genügt t denselben Bedingungen wie in Satz 2 und sind $x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}$ von α und β verschiedene Zahlen des Intervalles $\alpha' \ldots \beta'$ [8]), so hat die Gleichung $f(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = f(x_1; x_\varrho) = t$ eine einzige Lösung x_1 in $\alpha' \ldots \beta'$ [8]), die von α und β verschieden ist. Ist unter den gegebenen Zahlen x_ϱ, $(\varrho = 2, 3, \ldots, p+1)$, $\bar{x}$ die kleinste, $\bar{\bar{x}}$ die größte und ist x' die in Satz 2 vorkommende Lösung der Gleichung $\varphi(x) = t$, so ist bei $\bar{x} < x' < \bar{\bar{x}}$ auch $\bar{x} < x_1 < \bar{\bar{x}}$; ist aber $x' \leqq \bar{x}$, so ist $x' \leqq x_1 \leqq \bar{\bar{x}}$ und bei $x' \geqq \bar{\bar{x}}$ ist schließlich $\bar{x} \leqq x_1 \leqq x'$ [9]). Bei $x_1 \leqq \bar{x}$ ist $x_1 \geqq x'$ und bei $x_1 \geqq \bar{\bar{x}}$ ist $x_1 \leqq x'$.*

Beweis: Zunächst ist die Existenz der Lösung x_1 in $\alpha' \ldots \beta'$ [8]) und ihre Eindeutigkeit nachzuweisen. Das letztere ist eine selbstverständliche Folge der Monotonie von f in bezug auf die erste Veränderliche. Wenn wir also zeigen können, daß es in $\alpha' \ldots \beta'$ [8]) eine Stelle x^* gibt, für die $f(x^*, x_2, \ldots, x_{p+1}) \leqq t$ ist, und eine x^{**}, für die $f(x^{**}; x_\varrho) \geqq t$ ist, dann ist wegen der Stetigkeit von f die Existenz von x_1 (nebst der Eindeutigkeit) in $\alpha' \ldots \beta'$ [8]) gesichert. Also ist nur das Vorhandensein von x^* und x^{**} zu zeigen.

Sei erstens $\alpha' > \alpha$. Dann ist $t \geqq \gamma$ und

$$f(\alpha'; x_\varrho) \leqq f(\alpha'; \alpha') = \varphi(\alpha') = \gamma \leqq t.$$

Also ist in diesem Falle α' ein brauchbares x^*.

Ist nun zweitens $\alpha' = \alpha$, so wird die Existenz von x^* folgendermaßen erschlossen. Es ist jetzt $t > \gamma$. Aus (18) und $x_\varrho > \alpha$, $(\varrho = 2, 3, \ldots, p+1)$, ergibt sich wegen $t > \gamma$, daß es eine Zahl x^* gibt, für die $\alpha < x^* < x_\varrho$, $(\varrho = 2, 3, \ldots, p+1)$, und $\varphi(x^*) < t$ ist. Für sie ist dann:

$$f(x^*; x_\varrho) \leqq f(x^*; x^*) = \varphi(x^*) < t.$$

Damit ist x^* in jedem Falle nachgewiesen. Die Existenz von x^{**} wird entsprechend bewiesen. Man hat nur die Fälle $\beta' < \beta$ und $\beta' = \beta$ einzeln zu betrachten. Nachdem so die Existenz von x_1 gesichert ist, müssen nur noch die Behauptungen über die Lage von x_1 bewiesen werden.

Sei erstens $\bar{x} < x'$, dann ist:

$$f(\bar{x}; \bar{x}) = \varphi(\bar{x}) < \varphi(x') = t = f(x_1; x_\varrho) \leqq f(x_1; \bar{x}), \quad \text{also} \quad x_1 > \bar{x}.$$

Wenn zweitens $x' < \bar{\bar{x}}$ ist, folgt in ähnlicher Schlußweise: $x_1 < \bar{\bar{x}}$. Aus beiden Teilen zusammen ergibt sich also, daß aus $\bar{x} < x' < \bar{\bar{x}}$ auch $\bar{x} < x_1 < \bar{\bar{x}}$ folgt. — Ist drittens $x' \leqq \bar{x} \leqq \bar{\bar{x}}$, dann ist $x' \leqq x_\varrho \leqq \bar{\bar{x}}$ für $\varrho = 2, 3, \ldots, p+1$. Also wird jetzt:

$$t = \varphi(x') = f(x'; x') = f(x_1; x_\varrho) \leqq f(x_1; x') \quad \text{und deshalb} \quad x_1 \geqq x'.$$

[8]) $\alpha' \ldots \beta'$ ist bei $\alpha' > \alpha$, $\beta' < \beta$ ein abgeschlossenes Intervall; bei $\alpha' = \alpha$ links offen, bei $\beta' = \beta$ rechts offen.

[9]) Setzt man $\min(\bar{x}, x') = g'$, $\max(\bar{\bar{x}}, x') = G'$, so lauten diese Behauptungen etwas weniger scharf: $g' \leqq x_1 \leqq G'$.

Und wegen $\overline{\overline{x}} \geqq x'$ folgt:

$f(\overline{\overline{x}}; \overline{\overline{x}}) = \varphi(\overline{\overline{x}}) \geqq \varphi(x') = t = f(x_1; x_\varrho) \geqq f(x_1; \overline{\overline{x}})$, also ist $x_1 \leqq \overline{\overline{x}}$.

Wenn also $x' \leqq \overline{x}$ ist, so folgt auch: $x' \leqq x_1 \leqq \overline{\overline{x}}$.

Durch analoge Schlüsse folgt aus $x' \geqq \underline{\overline{x}}$, daß $\overline{x} \leqq x_1 \leqq x'$ ist. Aus dem bisher gezeigten ersieht man auch die Richtigkeit der Anmerkung 9. — Ist viertens $x_1 \leqq \overline{x} \leqq x_\varrho$, $(\varrho = 2, 3, \ldots, p+1)$, so folgt:

$$t = \varphi(x') = f(x_1; x_\varrho) \leqq f(\overline{x}; \overline{x}) = \varphi(\overline{x});$$

also ist $x' \leqq \overline{x}$ und deshalb nach dem schon bewiesenen Teil auch $x_1 \geqq x'$. Aus $x_1 \leqq \overline{x}$ folgt daher $x_1 \geqq x'$.

Ganz ähnlich wird fünftens aus $x_1 \geqq \underline{\overline{x}}$ die letzte Behauptung $x_1 \leqq x'$ gefolgert. Damit ist der ganze Satz bewiesen.

Und nun beweisen wir folgenden Konvergenzsatz.

Satz 5: *Genügt die Folge* $\{c_n\}$ *den im Satze 3 angegebenen Voraussetzungen, so gestattet die Gleichung* (14): $f(a_n; a_{m_n^{(\varrho)}}) = c_n$, $(n \geqq n_0)$, *wenn man die Elemente* $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ *willkürlich als von* α *und* β *verschiedene Zahlen des Intervalles* $\alpha' \ldots \beta'$ [10]) *wählt, die eindeutige Bestimmung der weiteren* a_n *in* $\alpha' \ldots \beta'$ [10]) *für* $n \geqq n_0$. *Die dadurch erhaltene Folge* $\{a_n\}$ *konvergiert gegen die Zahl* $\bar{a}$ *des Satzes 3,*

$$(\bar{a} \neq \alpha, \beta;\ \varphi(\bar{a}) = \lim c_n = c_0).$$

Beweis: Die erste Gleichung lautet $f(a_{n_0}; a_{m_{n_0}^{(\varrho)}}) = c_{n_0}$. Die hierin auftretenden Größen $a_{m_{n_0}^{(1)}}, a_{m_{n_0}^{(2)}}, \ldots, a_{m_{n_0}^{(p)}}$ sind aus der Reihe der willkürlich in $\alpha' \ldots \beta'$, aber von α und β verschiedenen Zahlen entnommen; also ist a_{n_0} nach Satz 4 eindeutig in $\alpha' \ldots \beta'$ bestimmbar und dabei $\neq \alpha$ und $\neq \beta$, weil ja c_n der in Satz 2 und 4 angegebenen Voraussetzung über t genügt. Genau ebenso folgt, daß jede weitere Gleichung $f(a_n; a_{m_n^{(\varrho)}}) = c_n$ immer eine einzige von α und β verschiedene Lösung a_n in $\alpha' \ldots \beta'$ liefert.

Der untere Limes der so gefundenen Folge $\{a_n\}$ sei a, der obere Limes aber A; dann ist $\alpha' \leqq a \leqq A \leqq \beta'$. Wenn wir nun zeigen können, daß $a \neq \alpha$, $A \neq \beta$ ist, dann folgt sofort nach Satz 1, daß wegen der Konvergenz der Folge $\{c_n\}$ auch $\lim a_n$ existiert, also $a = A$ ist; daß weiter $a = \bar{a}$ ist, ergibt sich sofort aus (14) mit $n \to \infty$. Es bleibt also nur noch $a \neq \alpha$, $A \neq \beta$ zu zeigen.

[10]) Siehe Anm. 8; also $\alpha < a_\lambda < \beta$, $\alpha' \leqq a_\lambda \leqq \beta'$, $\lambda = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$. Im Falle $p = 1$ dürfte nach Anm. 6 $\psi_1(n) = m_n^{(1)} \leqq n$ sein; dann ist eventuell $n_0 = 1$. In diesem Falle $(p = n_0 = 1)$ ist die Folge $\{a_n\}$ bereits vom ersten Gliede a_1 an eindeutig festgelegt.

Wenn nun erstens $\alpha' > \alpha$ ist, so ist wegen $a \geqq \alpha'$ auch $a > \alpha$; und bei $\beta' < \beta$ ist genau ebenso $A < \beta$. Wir brauchen also nur noch den Fall ins Auge zu fassen, daß $(\alpha' - \alpha) \cdot (\beta - \beta') = 0$ ist.

Sei also $\alpha' = \alpha$. Nach den im Satze 3 angegebenen Voraussetzungen für die c_n ist nun $c_n > \gamma$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Wir ziehen die Folge $\{a'_n\}$ des Satzes 3 heran. Ihre untere Grenze war mit g, die obere mit G bezeichnet. Es war nach Satz 3:

$$\varphi(a'_n) = c_n,\ a'_n \to \bar{a},\ \varphi(\bar{a}) = c = c_0,\ g > \alpha,\ G < \beta,\ \alpha' \leqq g \leqq G \leqq \beta'.$$

Auf Grund der im Satze 4 ausgesprochenen Behauptungen über die Lage der dort vorkommenden Lösungszahl x_1, insbesondere aus der in Anmerkung 9 gegebenen Formulierung folgt zunächst, daß

$$\min\left(a'_n, a_{m_n^{(1)}}, \ldots, a_{m_n^{(p)}}\right) \leqq a_n$$

ist. Mit $\min(g, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = g_{n-1}$, $(n \geqq n_0)$, ist daher für alle diese n stets $g_{n-1} > \alpha$. Es folgt nun weiter:

$$\alpha < g_{n-1} = \min(g, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \leqq \min\left(a'_n, a_{m^{(1)}}, \ldots, a_{m^{(p)}_n}\right) \leqq a_n.$$

Daher wird

$$g_n = \min(g, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \min(g_{n-1}, a_n) = g_{n-1} \text{ für } n \geqq n_0.$$

Somit ist $g_n = g_{n_0-1} > \alpha$ und $a_n \geqq g_n = g_{n_0-1} > \alpha$ für jedes $n \geqq n_0$. Deshalb folgt für den unteren Limes der a_n ebenfalls $a \geqq g_{n_0-1} > \alpha$. Entsprechend verfährt man im Falle $\beta' = \beta$ unter Heranziehung von $\max(G, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, um $A \leqq \max(G, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}) < \beta$ zu zeigen. Damit ist der Beweis vollendet[11]).

Das in der Einleitung erwähnte Knopp-Schursche Beispiel ist mit der Rekursion

$$a_n + \frac{1}{a_{n-1}} = c_n$$

identisch. Es ist in diesem Falle $p = 1$, $f(x, y) = x + \frac{1}{y}$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$. Da $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$ für $x \geqq 1$ monoton wächst, ist $\alpha' = 1$ und $\beta' = \infty$. Es wird $\gamma = 2$ und $\delta = \infty$. Ist $a_1 \geqq 1$ und jedes $c_n \geqq 2$ und $\lim c_n = c$, so konvergieren die durch die Rekursionsformel definierten a_n gegen die größere Wurzel der Gleichung $x + \frac{1}{x} = c$.

Es ist leicht, zahlreiche weitere Beispiele anzugeben, die sich dem Konvergenzsatz unterordnen.

---

[11]) Ist im Falle $p = 1$ etwa $m_n^{(1)} < n$, so sind für den Beweis einige unwesentliche Änderungen erforderlich.

(Eingegangen am 20. November 1933.)

Bemerkung zu meiner Arbeit[1]) „Über die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchyschen Integralsatz."

Von

Theodor Estermann in London.

Ein Kollege hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß Satz 1 bereits von Herrn Banach, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), S. 228 formuliert und bewiesen wurde. Mein § 1 bietet daher nichts wesentlich Neues.

Inzwischen habe ich in der Literatur drei Beweise des Satzes 2 gefunden, die aber mit dem meinigen keinerlei Ähnlichkeit haben:

1. Pollard, Proceedings London Math. Soc. **21** (1923), S. 456—482.
2. Leau, Journ. d. Math. (9) **5** (1926), S. 211—218.
3. Heilbronn, Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 37—38.

[1]) Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 556—560.

(Eingegangen am 11. Oktober 1933.)

Bemerkung zu meiner Abhandlung: Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes.

[Diese Zeitschrift 24 (1925).]

Von

Alexander Ostrowski in Basel.

Auf S. 219 der in der Überschrift genannten Abhandlung habe ich Herrn Julia die Entdeckung der wichtigen Tatsache zugeschrieben, daß, wenn eine Funktionenschar in einem Gebiet nicht normal ist, es in diesem Gebiet wenigstens einen Punkt gibt, in dem diese Schar nicht normal ist. Solche Punkte bezeichnete ich in meiner Abhandlung als Juliasche Punkte.

Wie ich leider erst neuerdings dank einer freundlichen Bemerkung von Herrn Montel gewahr wurde, findet sich dieses Resultat bereits in der bekannten Abhandlung von Herrn Montel: Sur les familles normales des fonctions analytiques, Annales de l'Ecole Normale Supérieure (3) **33** (1916). Es wird dort auf S. 227 mit den Worten formuliert:

„Réciproquement, une famille normale en chaque point P intérieur à D est normale à l'intérieur de D."

Ich beeile mich daher, mein Zitat hiermit richtigzustellen.

(Eingegangen am 29. Dezember 1933.)

Über den Zusammenhang der Rauterschen Übergruppe mit den gewöhnlichen Gruppen.

Von

Anton Suschkewitsch in Charkow (U. d. S. S. R.).

Eine Übergruppe[1]) kann folgendermaßen definiert werden: Sie ist ein System $\mathfrak{T}$ von Elementen mit einer Operation, das aus zwei Teilen $\mathfrak{R}$ (dem Regularitätsbereich) und $\mathfrak{H}$ (dem Mantel) besteht und folgenden Postulaten unterworfen ist:

I. $\mathfrak{R}$ ist eine gewöhnliche Gruppe (in bezug auf unsere Operation).

II. Sind T und T' irgendwelche Elemente von $\mathfrak{T}$, so existiert immer TT' (das Resultat unserer Operation, auf die Elemente T und T' angewandt) und gehört dem $\mathfrak{H}$ an, soweit wenigstens eins der Elemente T und T' dem $\mathfrak{H}$ angehört.

III. Es gilt für unsere Operation das assoziative Gesetz.

IV. Die Einheit E von $\mathfrak{R}$ ist auch Einheit von $\mathfrak{H}$, d. h. es ist $TE = ET = T$ für jedes Element T von $\mathfrak{T}$.

V. Es gibt in $\mathfrak{H}$ ein sogenanntes „Nullelement" N, d. h. ein solches Element N, daß $TN = NT = N$ für alle Elemente T von $\mathfrak{T}$ ist.

VI. Die Gleichungen $RX = T$ und $YR = T$ haben für R aus $\mathfrak{R}$, T aus $\mathfrak{T}$ die einzigen Lösungen: $X = R^{-1}T$; $Y = TR^{-1}$.

VII. Ist H aus $\mathfrak{H}$, so hat die Gleichung $HX = E$ keine Lösung.

Die Übergruppen bilden einen Spezialfall der assoziativen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit; ebenso wie alle solchen Gruppen können sie mittels der sogenannten verallgemeinerten Substitutionen dargestellt werden[2]). Hier möchte ich aber auf eine andere Quelle der Übergruppen hinweisen.

[1]) H. Rauter, Abstrakte Kompositionssysteme oder Übergruppen. Journ. f. Math. **159** (1928).

[2]) Siehe meine Arbeiten: Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. Math. Annalen **99** (1928); Über die Darstellung der eindeutig nicht umkehrbaren Gruppen mittels der verallgemeinerten Substitutionen. Recueil Math. de Moscou, t. 33.

§ 1.

Sei uns eine gewöhnliche Gruppe gegeben:

$$\mathfrak{G} = E + A + B + C + \ldots;$$

ihre Elemente vereinigen wir in Systeme, die sogenannten „Komplexe", und deuten das an, indem wir zwischen den Elementen, die einen Komplex bilden sollen, das Zeichen + setzen:

$$\mathfrak{A} = P + Q + R + \ldots$$

In bekannter Weise wird unsere Operation auch auf Komplexe verallgemeinert, indem man einfach die gewöhnliche Multiplikationsregel für Summen (d. h. das distributive Gesetz) anwendet. Bei dem Rechnen mit Komplexen werden nur voneinander verschiedene Elemente beachtet, so daß zwei Komplexe dann und nur dann als einander gleich anzusehen sind, wenn jedes Element des einen auch im anderen vorkommt, und umgekehrt, ohne Rücksicht darauf, wie oft dieses Element in jedem Komplex vorkommt. Es gilt für dieses Operieren mit Komplexen das assoziative Gesetz, nicht aber das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit.

Erweitern wir nun unsere Gruppe, indem wir alle Komplexe, die aus den Elementen der Gruppe gebildet werden können, als neue zur Gruppe gehörige Elemente ansehen, so erhalten wir aus $\mathfrak{G}$ eine neue, größere Gruppe Γ ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit; man kann sich leicht überzeugen, daß Γ eben eine Rautersche Übergruppe ist, da für sie die Postulate I bis VII gelten; dabei bilden die ursprünglich gegebenen Elemente von $\mathfrak{G}$ den Regularitätsbereich, und die sämtlichen Komplexe, die als neue Elemente betrachtet werden (um das anzudeuten, wollen wir die großen deutschen Buchstaben, die diese Komplexe bezeichnen, in Klammern setzen), den Mantel von Γ. Der größte Komplex, die Gruppe $\mathfrak{G}$ selbst als neues Element betrachtet, ist das Nullelement von Γ; die Einheit E von $\mathfrak{G}$ ist auch Einheit für alle Elemente von Γ.

Sei n die Ordnung von $\mathfrak{G}$; dann haben wir:

n Elemente von $\mathfrak{G}$;

$\binom{n}{2}$ verschiedene 2-gliedrige Komplexe;

$\binom{n}{3}$ verschiedene 3-gliedrige Komplexe;

usw.

Im ganzen also: $n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + 1 = 2^n - 1$ verschiedene Elemente von Γ; Γ ist also von der Ordnung $2^n - 1$.

Idempotente Elemente von Γ sind Untergruppen von $\mathfrak{G}$.

§ 2.

Nennen wir „Klasse" eines Komplexes die Anzahl der verschiedenen Elemente von $\mathfrak{G}$, aus denen dieser Komplex besteht; so ist leicht zu sehen, daß die Klasse des Produktes im allgemeinen höher ist als die Klasse jedes einzelnen Faktors — mindestens gleich der Klasse des Faktors, der die höchste Klasse hat; speziell ist das Produkt eines Komplexes mit einem Element der Gruppe $\mathfrak{G}$ von derselben Klasse wie der gegebene Komplex.

Sei $(\mathfrak{A})$ irgendein Element aus dem Mantel von Γ, also $\mathfrak{A}$ irgendein Komplex von Elementen aus $\mathfrak{G}$. Suchen wir alle Elemente P von $\mathfrak{G}$ auf, für die $(\mathfrak{A})P = (\mathfrak{A})$ ist (also auch $\mathfrak{A}P = \mathfrak{A}$; man beachte überhaupt, daß unsere Formeln richtig bleiben, wenn man die Klammern bei den deutschen Buchstaben wegläßt, d. h. wenn man die Elemente aus dem Mantel von Γ wieder als Komplexe betrachtet); diese Elemente P bilden eine gewöhnliche Gruppe $\mathfrak{P}$ (Untergruppe von $\mathfrak{G}$), die Herr Rauter „rechtshändige Identitätsgruppe von $(\mathfrak{A})$" nennt; die Ordnung von $\mathfrak{P}$ kann offenbar nicht größer sein als die Klasse von $\mathfrak{A}$. Ist

$$\mathfrak{A} = A_1 + A_2 + \ldots + A_t,$$

wo t die Klasse von $\mathfrak{A}$ ist, so haben wir:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{A} = A_1\mathfrak{P} + A_2\mathfrak{P} + \ldots + A_t\mathfrak{P};$$

zwei solche Komplexe $A_x\mathfrak{P}$ und $A_\lambda\mathfrak{P}$ sind entweder miteinander identisch oder haben kein Element gemeinsam; schreiben wir nur die verschiedenen Komplexe auf, so erhalten wir:

$$\mathfrak{A} = A_1\mathfrak{P} + A_2\mathfrak{P} + \ldots + A_s\mathfrak{P}.$$

Also besteht $\mathfrak{A}$ aus sogenannten „Nebengruppen" der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach dem Modul $\mathfrak{P}$, nach rechts genommen. Wir sehen auch, daß die Ordnung von $\mathfrak{P}$ in der Klasse von $\mathfrak{A}$ aufgeht.

Genau das Analoge gilt auch für die „linkshändige Identitätsgruppe" $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{A}$, d. h. für den größten Komplex der Elemente aus $\mathfrak{G}$, der die Eigenschaft hat: $\mathfrak{P}'\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Also:

Satz: Die Ordnungen der rechts- und linkshändigen Identitätsgruppen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ von $(\mathfrak{A})$ sind Teiler der Klasse von $\mathfrak{A}$; der Komplex $\mathfrak{A}$ besteht aus einigen von den Nebengruppen der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach dem Modul $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}']$ nach rechts [links] genommen.

Zusatz 1: Ist die Klasse von $\mathfrak{A}$ teilerfremd zur Ordnung von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' = \mathfrak{E}$.

Zusatz 2: Ist die Ordnung von $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}']$ gleich der Klasse von $\mathfrak{A}$, so ist auch $\mathfrak{P}'[\mathfrak{P}]$ von derselben Ordnung und konjugiert mit $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}']$.

Denn es ist in diesem Falle $\mathfrak{A} = A\mathfrak{P} = (A\mathfrak{P}A^{-1})A$, also:

$$A\mathfrak{P}A^{-1} < \mathfrak{P}';$$

da aber die Ordnung von $\mathfrak{P}'$ nicht größer ist als die Klasse von $\mathfrak{A}$, d. h. als die Ordnung von $\mathfrak{P}$ oder von $A\,\mathfrak{P}\,A^{-1}$, so ist:

$$\mathfrak{P}' = A\,\mathfrak{P}\,A^{-1}.$$

Sei $\mathfrak{B} = B_1 + B_2 + \ldots + B_b$ irgendein anderer Komplex aus den Elementen von $\mathfrak{G}$; untersuchen wir, wann $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ von derselben Klasse wie $\mathfrak{A}$ ist; dann müssen wir haben:

$$\mathfrak{A}\,B_1 = \mathfrak{A}\,B_2 = \ldots = \mathfrak{A}\,B_b,$$

oder

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,(B_2\,B_1^{-1}) = \ldots = \mathfrak{A}\,(B_b\,B_1^{-1});$$

also muß der Komplex $\mathfrak{B}\,B_1^{-1}$ einen Teil der Gruppe $\mathfrak{P}$ bilden:

$$\mathfrak{B}\,B_1^{-1} < \mathfrak{P}, \quad \text{also:} \quad \mathfrak{B} < \mathfrak{P}\,B_1.$$

Statt B_1 kann man natürlich auch $B_2, B_3, \ldots$ nehmen. Umgekehrt: Ist $\mathfrak{B} < \mathfrak{P}\,X$, so ist $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ von derselben Klasse wie $\mathfrak{A}$; denn sind $P_1 X$ und $P_2 X$ zwei Elemente von $\mathfrak{P}\,X$, so ist:

$$\mathfrak{A}\,(P_1 X) = \mathfrak{A}\,(P_2 X) = \mathfrak{A}\,X.$$

Das Analoge gilt auch für die linke Seite. Also:

Satz: Das Produkt $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}]$ ist dann und nur dann von derselben Klasse wie $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{B} < \mathfrak{P}\,X\,[\mathfrak{B} < X\,\mathfrak{P}']$ ist.

§ 3.

Betrachten wir die Potenzen eines Komplexes $\mathfrak{A}$; es existieren ganze positive Zahlen k und l derart, daß $\mathfrak{A}^{k+l} = \mathfrak{A}^k$ ist; von den *kleinsten* derartigen Zahlen nennen wir k *die Art*, l *die Ordnung* von $\mathfrak{A}$[3]). Bei den Elementen gewöhnlicher Gruppen (die ich „gewöhnliche Elemente" nenne) ist die Art $k = 1$. Fragen wir nach den Bedingungen, daß $(\mathfrak{A})$ ein gewöhnliches Element sei, d. h. daß $\mathfrak{A}^{l+1} = \mathfrak{A}$ sei. Dazu muß die Klasse von $\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^3, \ldots$ unverändert gleich der Klasse von $\mathfrak{A}$ bleiben; es folgt also nach dem letzten Satze von § 2 (wo $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ zu setzen ist), daß die rechtshändige Identitätsgruppe $\mathfrak{P}$ von derselben Ordnung t wie die Klasse von $\mathfrak{A}$ sein muß. Daraus aber folgt weiter (siehe § 2, Zusatz 2), daß $\mathfrak{P}'$ auch von der Ordnung t und konjugiert zu $\mathfrak{P}$ ist, und:

$$\mathfrak{A} = A\,\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'\,A; \quad \mathfrak{P}' = A\,\mathfrak{P}\,A^{-1}.$$

Nun folgt aber aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{P}$ auch $\mathfrak{A}^\lambda = \mathfrak{A}^\lambda\,\mathfrak{P}$; da $\mathfrak{A}^\lambda$ auch von der Klasse t ist, so folgt daraus, daß $\mathfrak{P}$ auch rechtshändige Identitätsgruppe für alle Potenzen von $\mathfrak{A}$ ist; das Analoge gilt für $\mathfrak{P}'$. Unter den Potenzen von $\mathfrak{A}$ gibt es aber eine und nur eine, die ein idempotentes Element von Γ, d. h. eine Untergruppe für $\mathfrak{G}$ darstellt; sei das $\mathfrak{A}^s$, so daß also $\mathfrak{A}^{2s} = \mathfrak{A}^s$ ist. Für $\mathfrak{A}^s$ haben wir auch:

$$\mathfrak{A}^s\,\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'\,\mathfrak{A}^s = \mathfrak{A}^s;$$

[3]) Siehe meine schon zitierte Abhandlung in Math. Ann. 99.

das ist nur möglich, wenn $\mathfrak{A}^s = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ ist, da die Ordnungen aller dieser Gruppen einander gleich, $= t$ sind.

Umgekehrt, sei für den Komplex $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$, und die Ordnung von $\mathfrak{P}$ gleich der Klasse von $\mathfrak{A}$; es ist dann:

$$\mathfrak{A} = A\mathfrak{P} = \mathfrak{P}A \quad \text{für jedes } A < \mathfrak{A};$$

$\mathfrak{A}$ ist also im Normalisator von $\mathfrak{P}$ enthalten.

Es ist ferner

$$\mathfrak{A}^2 = A\mathfrak{P}A\mathfrak{P} = A^2\mathfrak{P} = \mathfrak{P}A^2; \quad \mathfrak{A}^3 = A^3\mathfrak{P} = \mathfrak{P}A^3 \text{ usw.}$$

Sei l die Ordnung von A; dann ist:

$$\mathfrak{A}^l = \mathfrak{P}A^l = \mathfrak{P}E = \mathfrak{P}; \quad \text{also: } \mathfrak{A}^{l+1} = \mathfrak{A}.$$

D. h. es ist $(\mathfrak{A})$ in diesem Falle ein gewöhnliches Element, und seine Ordnung ist ein Teiler von l. Also:

Satz: Die Art eines Komplexes $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann gleich 1, wenn $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}'$ und die Ordnung von $\mathfrak{P}$ gleich der Klasse von $\mathfrak{A}$ ist; oder, anders ausgedrückt: wenn $\mathfrak{A}$ die Form $X\mathfrak{P}$ hat und im Normalisator von $\mathfrak{P}$ enthalten ist.

§ 4.

Fragen wir jetzt nach den Untergruppen der Übergruppe Γ. Natürlich „erzeugt" jede Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ eine Übergruppe A (in der Weise, wie Γ aus $\mathfrak{G}$ entstanden ist), die in Γ enthalten ist. Auf diese Weise erhalten wir aber noch nicht alle in Γ enthaltene Übergruppen: denn kann man aus den Elementen des Mantels von Γ eine gewöhnliche Gruppe bilden (wie z. B. eine Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{G}$ nicht einfach ist), so bildet sie auch eine in Γ enthaltene Übergruppe. Doch werden dadurch alle solche Übergruppen wieder nicht erschöpft: deren gibt es mehrere bei einem und demselben Regularitätsbereich; z. B. bildet schon $\mathfrak{G} + (\mathfrak{G})$ eine Übergruppe.

Wir stellen uns die Aufgabe, alle gewöhnlichen Gruppen, die im Mantel von Γ enthalten sind, zu finden. Sei $(\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}) + (\mathfrak{C}) + \ldots$ eine solche gewöhnliche Gruppe. Da man immer die Gleichungen

$$(\mathfrak{A})(\mathfrak{X}) = (\mathfrak{B}), \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{Y})(\mathfrak{A}) = (\mathfrak{B})$$

bei beliebigen $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ in dieser Gruppe auflösen kann, so müssen alle die Komplexe $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ eine und dieselbe Klasse haben und alle von der Form sein: $X\mathfrak{P}$, wo $\mathfrak{P}$ ihre (eine und dieselbe für alle diese Komplexe) rechts- und linkshändige Identitätsgruppe ist, und X zum Normalisator von $\mathfrak{P}$ gehört. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ sind also Nebengruppen der Zerlegung des Normalisators von $\mathfrak{P}$ nach dem Modul $\mathfrak{P}$; unter ihnen kommt auch $\mathfrak{P}$ selbst vor (und spielt die Rolle der Einheit). Also:

Satz: Die einzigen gewöhnlichen Gruppen, die im Mantel von Γ enthalten sind, sind Faktorgruppen der verschiedenen Teiler von $\mathfrak{G}$ nach ihren invarianten Untergruppen.

Fragen wir jetzt nach den allgemeineren Gruppen — ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, die in Γ enthalten sind, so haben wir zunächst den Satz:

Satz: Γ kann keine Untergruppe enthalten, wo nur die eine Seite des Gesetzes der eindeutigen Umkehrbarkeit erfüllt ist.

Denn eine solche Untergruppe muß wenigstens zwei idempotente Elemente $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ enthalten, für die die Relationen erfüllt sind:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 \quad \text{(oder:} \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1\text{)};$$

daraus würde aber nach den Sätzen von § 2 und § 3 folgen, daß $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ ist.

Zusatz: Jede Untergruppe von Γ ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit muß als Kern eine gewöhnliche Gruppe enthalten[4]).

§ 5.

Betrachten wir die sogenannten „Nebengruppen" der Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ nach irgendeiner Untergruppe $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A}$ invariant, so bilden diese Nebengruppen eine gewöhnliche Gruppe, die sogenannte komplementäre oder Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$. Ist aber $\mathfrak{A}$ nicht invariant, so bilden diese Nebengruppen keine Gruppe schon darum, weil das Produkt zweier solcher Nebengruppen im allgemeinen keine Nebengruppe ist. A. Loewy hat gezeigt[5]), daß diese Nebengruppen eine sogenannte Mischgruppe bilden; so nennt er seine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Gruppen, wo die gegebene Operation nicht unbeschränkt anwendbar ist.

Von unserem Gesichtspunkte aus kann gesagt werden: wenn diese Nebengruppen auch keine Gruppe bilden, so erzeugen sie doch eine Gruppe, und zwar eine Gruppe ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. Wir wollen nun diese Gruppe untersuchen.

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + G\mathfrak{A} + G'\mathfrak{A} + \ldots$ die Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach dem Modul $\mathfrak{A}$ nach rechts genommen; wir haben:

$$G\mathfrak{A} \cdot G'\mathfrak{A} = GG' \cdot G'^{-1}\mathfrak{A}G' \cdot \mathfrak{A};$$

ist m die Ordnung von $\mathfrak{A}$, d die Ordnung des Durchschnittes von $\mathfrak{A}$ und $G'^{-1}\mathfrak{A}G'$, so ist die Klasse von $G\mathfrak{A} \cdot G'\mathfrak{A}$ gleich $\frac{m^2}{d}$. Analog haben wir

$$G\mathfrak{A} \cdot G'\mathfrak{A} \cdot G''\mathfrak{A} = GG'G'' \cdot (G'G'')^{-1}\mathfrak{A}(G'G'') \cdot G''^{-1}\mathfrak{A}G'' \cdot \mathfrak{A} \text{ usw.}$$

[4]) Über die Eigenschaften dieser Gruppen siehe meine schon zitierte Abhandlung im 99. Bande der Math. Annalen.

[5]) A. Loewy, Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen. Journ. v. Crelle 157 (1927).

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}$ den Kern der Gruppe, die durch Komplexe $\mathfrak{A}, G\mathfrak{A}, G'\mathfrak{A}, \ldots$ erzeugt wird; nach dem letzten Zusatze von § 4 ist $\mathfrak{K}$ eine gewöhnliche Gruppe; seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ die Elemente von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{B}$ dabei die Einheit, d. h. eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$; dann sind nach dem ersten Satze von § 4 $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ die Nebengruppen von $\mathfrak{B}$. Nun ist nach einer Eigenschaft des Kerns:

$$G\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\lambda \quad \text{(gehört wieder dem Kern an).}$$

Da das Element E in $\mathfrak{B}$ enthalten ist, so enthält $\mathfrak{B}_\lambda$ alle Elemente des Komplexes $G\mathfrak{A}$; da aber bei verschiedenen G die Komplexe $G\mathfrak{A}$ alle Elemente von $\mathfrak{G}$ erschöpfen, so gilt das auch von Komplexen $\mathfrak{B}_\lambda$; es sind also $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ *alle* Nebengruppen von $\mathfrak{B}$ in bezug auf $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{B}$ ist eine *invariante* Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ferner ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, da $\mathfrak{B}$ ebenso wie $\mathfrak{A}$ das Element E enthält; also ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$. Daraus folgt: $G^{-1}\mathfrak{A}G < G^{-1}\mathfrak{B}G$, also, da $\mathfrak{B}$ invariant ist: $G^{-1}\mathfrak{A}G < \mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}$ enthält also alle die Gruppen, die mit $\mathfrak{A}$ konjugiert sind in bezug auf $\mathfrak{G}$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Gruppen, so ist:

$$\mathfrak{B} > \mathfrak{C}.$$

Da andererseits alle $G^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{C}$ enthalten sind, so sind auch ihre Produkte in $\mathfrak{C}$ enthalten:

$$\mathfrak{A} \cdot G^{-1}\mathfrak{A}G < \mathfrak{C};$$

also:

$$G\mathfrak{A} \cdot G'\mathfrak{A} = GG' \cdot G'^{-1}\mathfrak{A}G' \cdot \mathfrak{A} < GG'\mathfrak{C}.$$

Folglich sind alle die Produkte der Nebengruppen von $\mathfrak{A}$ in den Nebengruppen von $\mathfrak{C}$ enthalten. Da aber die Nebengruppen $G\mathfrak{A}, G'\mathfrak{A}, \ldots$ auch alle die Komplexe $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ erzeugen, so sind auch diese Komplexe in Komplexen $G\mathfrak{C}$ enthalten, speziell auch die Gruppe $\mathfrak{B}$ selbst; da aber $\mathfrak{B}$ das Element E enthält, und von den Komplexen $G\mathfrak{C}$ nur $\mathfrak{C}$ dieses Element hat, so ist:

$$\mathfrak{C} > \mathfrak{B}.$$

Das gibt: $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. Es ist also $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}/\mathfrak{C}$.

Es ist evident, daß wir denselben Kern $\mathfrak{K}$ erhalten, wenn wir von der Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach dem Modul $\mathfrak{A}$ nach links genommen ausgehen, oder statt $\mathfrak{A}$ eine zu $\mathfrak{A}$ konjugierte Gruppe nehmen. Endlich können wir alle die Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ nach allen Gruppen, die zu $\mathfrak{A}$ konjugiert sind, gleichzeitig betrachten und die Gruppe konstruieren, die durch alle Nebengruppen dieser Zerlegungen erzeugt wird; der Kern dieser Gruppe ist wieder $\mathfrak{K}$.

(Eingegangen am 3. September 1932.)

Eine Begründung der Resultantentheorie durch einen elementaren Beweis der Cayleyschen Konstruktion.

Von

M. Piel in Opladen (Rheinland).

Die Konstruktion für die Resultante $R(a)$ von n Formen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ von n Variablen mit unbestimmten Koeffizienten a, welche von A. Cayley und in neuerer Zeit von A. Hurwitz und F. S. Macaulay angegeben worden sind [1]), gehen von dem dialytischen Ansatz Sylvesters aus, durch welchen im Falle $n = 2$ die Resultante in der Gestalt einer Determinante geliefert wird. Diese Konstruktionen haben den großen Vorzug, nicht von $n - 1$ auf n zu operieren.

Der dialytische Ansatz führt zu einer Matrix $A^{(0)}$, die im allgemeinen nicht quadratisch und deren Rang σ gleich der Anzahl ihrer Zeilen ist. Hurwitz und Macaulay zeigen nun auf Grund allgemeiner Überlegungen, daß die Resultante gleich dem größten gemeinsamen Teiler von gewissen σ-reihigen Determinanten aus $A^{(0)}$ ist. Während Hurwitz auf die Bestimmung des abzulösenden Faktors verzichtet, beweist Macaulay außerdem, allerdings vermittels eines rekursiven Verfahrens, daß $R(a)$ sich in der einfachen Gestalt Δ/D darstellen läßt, wobei Δ eine jener σ-reihigen Determinanten und D eine bestimmte Unterdeterminante hiervon ist. (Über eine auf die Cayleysche Konstruktion bezügliche Verallgemeinerung dieses Resultates s. unten S. 663.)

Im Gegensatz zu diesen Darstellungen betrachtet Cayley sämtliche σ-reihigen Determinanten $\Delta^{(0)}$ aus $A^{(0)}$ und bestimmt die Resultante dadurch, daß er den jeweils abzulösenden Faktor von $\Delta^{(0)}$ konstruiert. Er verfährt dazu folgendermaßen. Zur Bestimmung des Ranges von $A^{(0)}$ führt er Formensysteme ein, welche die Hilbertsche Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme des aus $f_1, \ldots, f_n$ bestehenden Modulsystems bilden [2]). Aus den Matrizen $A^{(1)}, \ldots, A^{(k-1)}$, welche diesen Formensystemen ent-

[1]) A. Cayley, Math. Papers I. Nr. 50, On the theory of Elimination (1848); ibid. Nr. 40, On the theory of involution Geometry (1847). — A. Hurwitz, Über die Trägheitsformen eines algebraischen Moduls, Annali de Matematica (3a) (20) (1913). — F. S. Macaulay, Some Formulae in Elimination, Proceed. London Math. Soc. 35 (1903), S. 3.

[2]) Cayley deutet den damit verbundenen Prozeß nur an (s. l. c. Nr. 40).

sprechen, wählt er dann in gewisser Weise Determinanten $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(k-1)}$ aus, mit denen er die Quotienten

$$R^{(k-1)} = \Delta^{(k-1)}; \quad R^{(k-2)} = \frac{\Delta^{(k-2)}}{R^{(k-1)}};$$

$$R^{(k-3)} = \frac{\Delta^{(k-3)}}{R^{(k-2)}}; \quad \ldots; \quad R^{(0)} = \frac{\Delta^{(0)}}{R^{(1)}}$$

bildet. Er behauptet nun, diese $R^{(\varkappa)}$ seien in den a ganz und insbesondere sei $R^{(0)}$ mit der Resultante identisch.

So interpretiert, erhalten die Ausführungen Cayleys einen klaren Sinn [3]).

Die Cayleysche Konstruktion ist von Herrn Fischer unter der Annahme bewiesen worden, daß die Grundtatsachen der Resultantentheorie bereits auf anderem Wege bewiesen sind [4]).

Den Beweis für die Darstellung

$$R^{(0)} = \frac{\Delta^{(0)} \cdot \Delta^{(2)} \ldots}{\Delta^{(1)} \ldots}$$

hat er mit Hilfe eines Satzes von Lasker und Ostrowski erbracht. Um jedoch zu zeigen, daß auch $R^{(1)}, \ldots, R^{(k-1)}$ Formen der a sind, war eine Verallgemeinerung der aus dem Lasker-Ostrowskischen Satze gezogenen Folgerungen notwendig [5]) (s. E. Fischer, l. c. § 11).

Der wesentliche Fortschritt des in der vorliegenden Arbeit vorgetragenen Beweises besteht erstens darin, daß bei dem Nachweise der Ganzheit der $R^{(\varkappa)}$ lediglich mit unbestimmten a operiert, also eine Anwendung spezieller Wertsysteme der a vermieden wird und daß zweitens die Existenz der Resultante nicht vorausgesetzt wird. Es wird vielmehr bewiesen, daß $R^{(0)}$ diejenigen Eigenschaften hat, welche F. Mertens [6]) zur

---

[3]) Ob Cayley seinen Ansatz (s. l. c. Nr. 50) als ein allgemeines Prinzip aufgefaßt hat, wie er von Netto gedeutet worden ist, scheint zweifelhaft.

[4]) E. Fischer, Über die Cayleysche Eliminationsmethode, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 497—550.

[5]) Daß speziell für $R^{(0)}$ der Beweis der Ganzheit ohne diese tiefer liegenden Hilfsmittel zu erbringen ist, hat Herr Fischer nachträglich bemerkt und den Beweisgang dementsprechend bei der Korrektur geändert (s. E. Fischer, Einleitung, 2. Abschnitt).

Die Bemerkung Cayleys, daß auch die $R^{(1)}, \ldots, R^{(k-1)}$ ganz seien, war Herrn Fischer nicht bekannt (vgl. Schluß seines Düsseldorfer Vortrages). Dies wird nämlich in dem Bericht Nettos über die Cayleysche Eliminationsmethode nicht erwähnt, auf welchen Herr Fischer sich stützen mußte, da er die englische Sprache nicht beherrscht.

[6]) Sitzungsber. Wien. Akad. Wiss. 93 (1886), S. 725; 108 (1889), S. 1174.

Definition der Resultante benutzt[7]). Ferner zeige ich, daß die $R^{(k)}$ auch dann ganz sind, wenn die Anzahl der Formen $f_1, \ldots, f_n$ kleiner ist als die der Variablen, während Herr Fischer dies nur für den Fall gezeigt hat, daß beide Anzahlen gleich sind.

Dagegen ist es mir bisher noch nicht gelungen, die invariante Konstruktion des Resultantenproduktes $R(a) \cdot R(b)$, welche Herr Fischer im zweiten Teile seiner Arbeit angegeben hat (vgl. auch den Düsseldorfer Vortrag, Jahresber. d. D. Math. 36), unabhängig von der Cayleyschen Theorie durchzuführen.

Ich führe den Beweis für die Behauptung Cayleys auf Grund eines einzigen Satzes. Dieser besagt, daß es unter den aus $A^{(0)}, \ldots, A^{(k-1)}$ auszuwählenden Determinanten $\Delta^{(0)}, \ldots, \Delta^{(k-1)}$ solche $\Delta^{(\varkappa)}$ gibt, welche von 0 verschieden und für $\varkappa > 0$ von den Koeffizienten von $\varkappa$ der Formen $f_1, \ldots, f_n$ unabhängig sind, und zwar lassen sich solche $\Delta^{(0)}, \ldots, \Delta^{(k-1)}$ explizit angeben. Aus diesem Satze folgt noch der auf Formen mit unbestimmten Koeffizienten bezügliche Spezialfall des von Herrn Fischer (l. c. § 11) bewiesenen Rangsatzes.

Mit Hilfe dieses speziellen Satzes, der sich auch auf einem anderen Wege beweisen läßt, ergibt sich noch ein zweiter Beweis der Cayleyschen Theorie. Hierbei ist die Tatsache wesentlich, daß alle Determinanten aus $A^{(0)}, \ldots, A^{(k-1)}$, welche von 0 verschieden sind, in den Koeffizienten einer jeden Form homogen sind, obwohl ihre Zeilen und Spalten es keineswegs sind. Diesen Weg habe ich ursprünglich eingeschlagen. Er wird im Anhang kurz skizziert werden.

Nach der Cayleyschen Theorie kann die Matrix $A^{(\varkappa)}$ bei speziellen Wertsystemen a nur dann den gleichen Rang haben wie bei unbestimmten a, wenn $R^{(\varkappa)}$ nicht verschwindet. Diese Bedingung erweist sich aber auch als hinreichend, wie ebenfalls im Anhang gezeigt werden wird.

Aus der Arbeit von H. Fischer übernehme ich die von ihm eingeführte Bezeichnung, welche die Darstellung der Theorie sehr vereinfacht.

Kapitel I.

Die Cayleyschen Matrizen.

§ 1.

Es seien $f_1, \ldots, f_n$ n allgemeine Formen[8]) der m Variablen $x_1, \ldots, x_m$ von den positiven Graden $s_1, \ldots, s_n$. Ihre unbestimmten Koeffizienten

[7]) Für den Satz dagegen, daß aus der „Grundeigenschaft" die Teilbarkeit durch $R(a)$ folgt, muß es bei dem Mertensschen Beweis bleiben.

[8]) Unter allgemeinen Formen sind solche zu verstehen, deren Koeffizienten Unbestimmte sind.

werden generell mit bzw. $a_1, \ldots, a_n$ und zusammen generell mit a bezeichnet. $\mathfrak{R}(a)$ sei der Körper, der aus dem der komplexen Zahlen durch Adjunktion der Unbestimmten a hervorgeht.

Zur Darstellung der in der Einleitung erwähnten Formensysteme dienen folgende Ausdrücke mit Unbestimmten τ [9]):

$$(1) \qquad L^{(\varkappa)} = \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa}^{1,\,n} L_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)}, & \ldots, & \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)}, & \ldots, & \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} \end{vmatrix}$$

für $\varkappa > 0$ und

$$(2) \qquad F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)} = f} = \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_{\varkappa+1}}^{1,\,n} L_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)}, & \ldots, & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)}, & \ldots, & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ f_{\nu_1}, & \ldots, & f_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix}$$

für $\varkappa \geqq 0$. Die $\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa$ durchlaufen hierbei alle Werte, welche den Bedingungen $1 \leqq \nu_1 \leqq n$; $\ldots 1 \leqq \nu_\varkappa \leqq n$ und $s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_\varkappa} \geqq 0$ genügen. s ist eine fixierte Gradzahl und $L_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa}$ eine Form der x vom Grade $s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_\varkappa}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(a)$. Für $\varkappa$ gibt es eine obere Schranke $k \leqq n$. s werde so groß gewählt, daß $k \geqq 1$ ist.

Wenn $k > 1$ ist, so besteht die Identität

$$(3) \qquad (F^{(\varkappa)})_{\tau^{(\varkappa)} = f} = (L^{(\varkappa+1)})_{\substack{\tau^{(\varkappa)} = f \\ \tau^{(\varkappa+1)} = f}} = 0.$$

Um die Koeffizientenmatrix von $F^{(\varkappa)}$ $(\varkappa < k)$ darzustellen, setzt man die $L_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}}$ in (2) mit unbestimmten Koeffizienten $z_1^{(\varkappa+1)}, \ldots, z_{\sigma_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)}$ an. Bedeutet $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ für $\varkappa > 0$ das Produkt aus einer $\varkappa$-reihigen τ-Determinante und einem Potenzprodukt der x und sind $\mathfrak{p}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\sigma_0}^{(0)}$ die Potenzprodukte der x vom Grade s, so ist

$$(4) \qquad F^{(\varkappa)} = \sum_{\lambda_\varkappa,\, \lambda_{\varkappa+1}} \alpha_{\lambda_\varkappa \lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}(a) \cdot \mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} \cdot z_{\lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)},$$

wobei

$$(5) \qquad \left(\mathfrak{p}_{\lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)}\right)_{\tau^{(\varkappa+1)} = f} = \sum_{\lambda_\varkappa = 1}^{\lambda_\varkappa = \sigma_\varkappa} \alpha_{\lambda_\varkappa \lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}(a)\, \mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}; \qquad \lambda_{\varkappa+1} = 1, \ldots, \sigma_{\varkappa+1}$$

gesetzt ist. Jedes $\alpha^{(\varkappa)}$ ist ein a, ein $-a$ oder 0. Die Matrix der $\alpha^{(\varkappa)}$ wird mit $A^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1)$ bezeichnet. Nach (5) entspricht jedem $\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}$ eine Spalte und jedem $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ eine Zeile von $A^{(\varkappa)}$. Durch die Numerierung der $\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}$ und $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ ist daher die Anordnung der Zeilen

[9]) Siehe E. Fischer, § 6—7.

und Spalten von $A^{(\varkappa)}$ festgelegt. Indessen wollen wir auch diejenigen Matrizen mit $A^{(\varkappa)}$ bezeichnen, welche sich von der obigen durch eine andere Reihenfolge der Zeilen und Spalten unterscheiden. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß nach (5) die Numerierung der Zeilen von $A^{(\varkappa)}$ durch diejenige der Spalten von $A^{(\varkappa-1)}$ mitgegeben ist.

Aus (3) ergeben sich die Relationen

$$\sum_{\lambda_\varkappa=1}^{\lambda_\varkappa=\sigma_\varkappa} \alpha^{(\varkappa)}_{\lambda_{\varkappa-1}\lambda_\varkappa} \cdot \alpha^{(\varkappa-1)}_{\lambda_{\varkappa-1}\lambda_\varkappa} = 0, \qquad \begin{matrix} \lambda_{\varkappa-1} = 1, 2, \ldots, \sigma_{\varkappa-1} \\ \lambda_{\varkappa+1} = 1, 2, \ldots, \sigma_{\varkappa+1} \end{matrix}$$

das heißt

$$A^{(\varkappa-1)} \cdot A^{(\varkappa)} = 0 \tag{6}$$

für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1$.

Setzt man für die Unbestimmten $z^{(\varkappa+1)}$ beliebige Werte aus $\mathfrak{R}(a)$ ein, so bilden die dadurch entstehenden $F^{(\varkappa)}$ eine Schar, deren Rang gleich demjenigen von $A^{(\varkappa)}$ ist.

§ 2.

Zur Abkürzung werde $A^{(\varkappa)}$ die Matrix von $F^{(\varkappa)}$ genannt [10]); wird statt $F^{(\varkappa)} = \sum_{\lambda_{\varkappa+1}} z^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}} \left(\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}\right)_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ eine Teilsumme genommen, so wird unter deren Matrix die aus den ausgewählten Spalten gebildete Teilmatrix von $A^{(\varkappa)}$ verstanden.

$A^{(0)}$ entsteht durch Nebeneinandersetzung der n Matrizen von $L_\nu f_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$, welche aus je σ_0 Zeilen bestehen und deren Elemente jeweils gleich einem a_ν oder gleich 0 sind. Wesentlich komplizierter ist die Struktur der $A^{(\varkappa)}$ für $\varkappa > 0$. Indessen lassen sich hierüber gewisse Aussagen machen, welche für den Beweis des Hauptsatzes (s. § 4) grundlegend sind.

Wir werden $F^{(\varkappa)}$ in Teilsummen und damit $A^{(\varkappa)}$ in Spaltenkombinationen zerlegen (s. o.), und zwar nach einem Gesichtspunkte, welcher durch folgende Bemerkung nahegelegt wird.

Nach (5) ist $\alpha^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa\lambda_{\varkappa+1}} = 0$, wenn $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}$ in der Entwicklung des Ausdrucks $\left(\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}\right)_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ nicht auftritt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die τ-Determinante von $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}$ in der von $\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}$ nicht als Unter-

[10]) Wir denken uns die $L_{r_1 \ldots r_{\varkappa+1}}$ wieder mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt.

determinante enthalten ist. Ferner sieht man, daß $\alpha^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa \lambda_{\varkappa+1}}$ und $\alpha^{(\varkappa)}_{\lambda'_\varkappa \lambda'_{\varkappa+1}}$ verschiedenen Zeilen von $A^{(\varkappa)}$ angehören, wenn $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}$ und $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}_{\lambda'_\varkappa}$ verschiedene τ-Determinanten haben.

Wir denken uns die $\binom{n-1}{\varkappa}$ Wertsysteme $\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa < n$ in lexikographischer Reihenfolge angeordnet und numeriert[11]). Setzt man dann

$$T_i^{(\varkappa)} = \sum_{\nu=\nu_\varkappa+1}^{\nu=n} L_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa \nu} \begin{vmatrix} \tau^{(1)}_{\nu_1}, \ldots, \tau^{(1)}_{\nu_\varkappa}, \tau^{(1)}_{\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tau^{(\varkappa)}_{\nu_1}, \ldots, \tau^{(\varkappa)}_{\nu_\varkappa}, \tau^{(\varkappa)}_{\nu} \\ f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_\varkappa}, f_\nu \end{vmatrix},$$

wobei $\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa < n$ das i-te Indexsystem bedeutet, so ist nach (2)

$$F^{(\varkappa)} = \sum_{i=1}^{i=\binom{n-1}{\varkappa}} T_i^{(\varkappa)}.$$

Es kann offenbar der Fall eintreten, daß mehrere der Teilsummen $T_i^{(\varkappa)}$ kein Glied enthalten. Jedoch kann dies wegen $\varkappa < k$ nicht für alle $T_i^{(\varkappa)}$ zutreffen.

Es sei nunmehr i fixiert. Die Matrix von $T_i^{(\varkappa)}$ stellt eine Spaltenkombination von $A^{(\varkappa)}$ dar. Sie läßt sich wiederum in mehrere Zeilenkombinationen von einfacherer Struktur zerlegen. Um diese zu bestimmen, haben wir $T_i^{(\varkappa)}$ nach der letzten Zeile der Determinanten zu entwickeln. Dabei tritt die Determinante

$$\begin{vmatrix} \tau^{(1)}_{\nu_1}, \ldots, \tau^{(1)}_{\nu_\varkappa} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tau^{(\varkappa)}_{\nu_1}, \ldots, \tau^{(\varkappa)}_{\nu_\varkappa} \end{vmatrix},$$

welche wir im folgenden durch den Index i kennzeichnen wollen, mit dem Faktor

$$\sum_{\nu=\nu_\varkappa+1}^{\nu=n} L_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa \nu} f_\nu$$

[11]) Das heißt, ist $\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa$ das i-te und $\nu'_1, \ldots, \nu'_\varkappa$ das j-te System, so ist $i < j$, wenn unter den Differenzen $\nu'_1 - \nu_1, \ldots, \nu'_\varkappa - \nu_\varkappa$ die erste von 0 verschiedene positiv ist.

auf. Die Matrix dieses Ausdrucks, welche offenbar eine $A^{(0)}$ ähnliche Gestalt hat, bezeichnen wir mit $H_i^{(\varkappa)}$. Die Zeilen von $A^{(\varkappa)}$, denen die Elemente von $H_i^{(\varkappa)}$ angehören, werden also durch solche $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ charakterisiert, deren τ-Determinanten den Index i hat. Die $H_1^{(\varkappa)}, \ldots, H_{\binom{n-1}{\varkappa}}^{(\varkappa)}$ gehören somit durchweg verschiedenen Zeilen von $A^{(\varkappa)}$ an; denn die i-te und j-te τ-Determinante sind verschieden, wenn $i \neq j$ ist.

Die τ-Determinanten mit den Indizes $1, 2, \ldots, i-1$ kommen bei der Entwicklung von $T_i^{(\varkappa)}$ nicht vor. Folglich müssen nach der obigen Bemerkung alle Elemente derjenigen Zeilen der Matrix von $T_i^{(\varkappa)}$ gleich 0 sein, welche solchen $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ zugeordnet sind, deren τ-Determinante den Index $1, 2, \ldots$ oder $i-1$ hat. Fassen wir diese Elemente zu der Nullmatrix $N_i^{(\varkappa)}$ zusammen, so ist die Matrix von $T_i^{(\varkappa)}$

$$\begin{pmatrix} N_i^{(\varkappa)} \\ H_i^{(\varkappa)} \\ K_i^{(\varkappa)} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} H_1^{(\varkappa)} \\ K_1^{(\varkappa)} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad i = 1.$$

Die Matrix $K_i^{(\varkappa)}$ ist für unsere Überlegungen ohne Interesse. $N_i^{(\varkappa)}$ gehört den Zeilen von $A^{(\varkappa)}$ an, denen auch $H_1^{(\varkappa)}, \ldots, H_{i-1}^{(\varkappa)}$ angehören.

$A^{(\varkappa)}$ hat daher bei geeigneter Anordnung der Zeilen und Spalten die Gestalt

$$\begin{pmatrix} H_1^{(\varkappa)}, & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & H_2^{(\varkappa)} & & \vdots \\ \ldots & & \ddots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & H_{\binom{n-1}{\varkappa}}^{(\varkappa)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

worin die Elemente „oberhalb“ von $H_2^{(\varkappa)}, \ldots, H_{\binom{n-1}{\varkappa}}^{(\varkappa)}$ gleich 0 sind.

§ 3.

Bisher haben wir über n und m keine Voraussetzungen gemacht. Nunmehr nehmen wir an, daß $n \leqq m$ ist. Dann können wir folgende Bezeichnung einführen, welche wir in § 4 benutzen werden. Wir nennen eine Form der x in x_ν reduziert, wenn ihr Grad in x_ν kleiner ist als s_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$, und verstehen, zum Unterschiede von den nichtbeschränkten $L_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa}$, unter $M_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa}$ für $\nu_\varkappa < n$ eine Form vom Grade $s - s_{\nu_1} - \ldots s_{\nu_\varkappa}$, welche in $x_{\nu_\varkappa + 1}, \ldots, x_n$ reduziert ist, während $M_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa}$ für $\nu_\varkappa = n$ keiner

Beschränkung unterliegt [12]). Insbesondere heißt ein Potenzprodukt $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ in x_ν nichtreduziert, wenn $\alpha_\nu \geqq s_\nu$ ist. In den Ausdrücken

$$M^{(\varkappa)} = \sum_{\nu_1 < \dots < \nu_\varkappa}^{1,n} M_{\nu_1 \dots \nu_\varkappa} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)}, \dots, \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)}, \dots, \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} \end{vmatrix}; \qquad \varkappa = 1, \dots, k$$

setzen wir jedes der eben charakterisierten $M_{\nu_1 \dots \nu_\varkappa}$ mit unbestimmten Koeffizienten an. Die Anzahl der Potenzprodukte von $M_{\nu_1 \dots \nu_\varkappa}$ ist gleich dem Koeffizienten von t^s in der Entwicklung von

$$\sum_{\substack{0 \leqq q_{\nu_\varkappa+1} < s_{\nu_\varkappa+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0 \leqq q_n < s_n}} t^{q_{\nu_\varkappa+1}} \dots t^{q_n} \frac{t^{s_{\nu_1}} \dots t^{s_{\nu_\varkappa}}}{(1-t)^{m-n+\nu_\varkappa}}$$

$$= t^{s_{\nu_1}} \dots t^{s_{\nu_\varkappa}} \frac{(1-t^{s_{\nu_\varkappa+1}}) \dots (1-t^{s_n})}{(1-t)^m}$$

für $\nu_\varkappa < n$ und von

$$\frac{t^{s_{\nu_1}} \dots t^{s_{\nu_\varkappa - 1}} t^{s_n}}{(1-t)^m}$$

für $\nu_\varkappa = n$ nach steigenden Potenzen von t. Dieser Koeffizient werde durch das Symbol $[\ ]_{t^s}$ bezeichnet. Die Gesamtzahl der in $M^{(\varkappa)}$ auftretenden $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ ist dann also gleich

$$\varrho_{\varkappa-1} = \sum_{\nu_1 < \dots < \nu_\varkappa}^{1,n-1} \left[t^{s_{\nu_1}} \dots t^{s_{\nu_\varkappa}} \frac{(1-t^{s_{\nu_\varkappa+1}}) \dots (1-t^{s_n})}{(1-t)^m} \right]_{t^s}$$

$$+ \sum_{\nu_1 < \dots < \nu_{\varkappa-1}}^{1,n-1} \left[t^{s_{\nu_1}} \dots t^{s_{\nu_{\varkappa-1}}} t^{s_n} \frac{1}{(1-t)^m} \right]_{t^s}.$$

$$\varkappa = 1, 2, \dots, k.$$

Die $\varrho_\varkappa$ genügen den Gleichungen [13])

$$(7) \qquad \begin{aligned} \varrho_0 + \left[\frac{(1-t^{s_1}) \dots (1-t^{s_n})}{(1-t)^m} \right]_{t^s} &= \sigma_0 \\ \varrho_1 + \varrho_0 &= \sigma_1 \\ \dots\dots & \\ \varrho_{k-1} + \varrho_{k-2} &= \sigma_{k-1} \\ \varrho_{k-1} &= \sigma_k. \end{aligned}$$

Die $\varrho_\varkappa$ sind positiv, und es ist $\varrho_0 \leqq \sigma_0$.

---

[12]) Solche reduzierten Formen werden auch von Macaulay und Hurwitz benutzt. Sie sind meines Wissens zuerst von Serret (Cours d'algèbre supérieure, Paris, Bd. I, S. 151) eingeführt worden.

[13]) Siehe E. Fischer, § 9—10, Formeln (22), (20).

Auf Grund dieser Relationen kann man die $\varrho_\varkappa$-gliedrigen Spaltenkombinationen aus $A^{(\varkappa)}$ und die hierzu jeweils komplementären $\varrho_{\varkappa+1}$-gliedrigen Zeilenkombinationen von $A^{(\varkappa+1)}$ mit dem gleichen laufenden Index $p_{\varkappa+1}$ bezeichnen. Wegen $\varrho_{k-1} = \sigma_k$ wird $p_k = 1$ gesetzt. $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa \cdot}$ bezeichnet die aus der $p_\varkappa$-ten Zeilenkombination, $A^{(\varkappa)}_{\cdot p_{\varkappa+1}}$ die aus der $p_{\varkappa+1}$-ten Spaltenkombination bestehende Teilmatrix von $A^{(\varkappa)}$, und $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}$ die diesen gemeinsame Matrix. $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}$ sei die mit einem gewissen Vorzeichen versehene Determinante von $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}$[14]).

§ 4.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zum Beweise des Hauptsatzes über.

Ist $n \leqq m$, und sind $f_1, \ldots, f_n$ Formen mit unbestimmten Koeffizienten, so läßt sich ein Indexsystem $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ angeben, so daß $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}$ für $\varkappa > 0$ von den $a_1, \ldots, a_\varkappa$ unabhängig ist und bei der Spezialisierung $f_{\varkappa+1} = x_{\varkappa+1}^{s_{\varkappa+1}}, \ldots, f_n = x_n^{s_n}$ den Wert ± 1 annimmt.

Beweis. Nach Anfang von § 2 und § 3 ist die Matrix von $(M^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ eine $\varrho_\varkappa$-gliedrige Spaltenkombination. Sie werde mit $A^{(\varkappa)}_{\cdot p_{\varkappa+1}}$ bezeichnet. $p_\varkappa$ ist also nunmehr als ein fester Index zu betrachten ($\varkappa = 0, \ldots, k-1$).

$A^{(0)}_{\cdot p_1}$ geht bei der Spezialisierung $f_1 = x_1^{s_1}, \ldots, f_n = x_n^{s_n}$ in die Matrix von

$$M_1 x_1^{s_1} + \ldots + M_n x_n^{s_n}$$

über. Da $M_1 x_1^{s_1} + \ldots + M_{\nu-1} x_{\nu-1}^{s_{\nu-1}}$ ($\nu > 1$) in x_ν reduziert ist, so enthält es ganz andere Potenzprodukte als $M_\nu x_\nu^{s_\nu}$, und folglich hat diese Matrix bei geeigneter Anordnung der Zeilen und Spalten die Gestalt

$$\begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix},$$

wobei E die ϱ_0-reihige Einheitsmatrix und N die aus $\sigma_0 - \varrho_0$ Zeilen und ϱ_0 Spalten bestehende Nullmatrix bedeuten. Ist also p_0 der Index der Zeilenkombination von $A^{(0)}$, welche durch die $\mathfrak{p}^{(0)}$ von $M_1 x_1^{s_1} + \ldots + M_n x_n^{s_n}$ charakterisiert ist, so ist für $f_1 = x_1^{s_1}, \ldots, f_n = x_n^{s_n}$

$$\Delta^{(0)}_{p_0 p_1} = \pm |A^{(0)}_{p_0 p_1}| = \pm 1.$$

Es sei jetzt $\varkappa > 0$. Die in analoger Weise aus dem „reduzierten" $H_i^{(\varkappa)}$ von $A^{(\varkappa)}$ (s. § 2), d. h. aus den zu $A^{(\varkappa)}_{\cdot p_{\varkappa+1}}$ gehörigen Spalten von $H_i^{(\varkappa)}$,

[14]) Siehe E. Fischer, § 2.

ausgewählte quadratische Matrix sei $\mathfrak{D}_i^{(\varkappa)}$. Die Zeilen von $A^{(\varkappa)}_{\cdot\, p_\varkappa+1}$, denen $\mathfrak{D}_i^{(\varkappa)}$ angehört, sind also den $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ von

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \tau^{(1)}_{\nu_1}, \ldots, \tau^{(1)}_{\nu_\varkappa} \\ \ldots\ldots \\ \tau^{(\varkappa)}_{\nu_1}, \ldots, \tau^{(\varkappa)}_{\nu_\varkappa} \end{vmatrix} \sum_{\nu=\nu_\varkappa+1}^{\nu=n} M_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa \nu} x_\nu^{s_\nu}$$

zugeordnet, wenn $\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa < n$ das i-te Indexsystem ist. Die Anzahl der verschiedenen $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$, welche in den Ausdrücken (8) ($\varkappa$ fest $\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa < n$ laufend) auftreten, ist gleich $\varrho_\varkappa$, und der Index, der durch diese $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ gekennzeichneten Zeilenkombination aus $A^{(\varkappa)}$ sei $p_\varkappa^*$. Somit ist $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa^* p_\varkappa+1}$ eine quadratförmige $\varrho_\varkappa$-reihige Matrix, worin nach § 2 alle Elemente „oberhalb" der von $\mathfrak{D}_2^{(\varkappa)}, \ldots, \mathfrak{D}^{(\varkappa)}_{\binom{n-1}{\varkappa}}$ gebildeten Diagonalen gleich 0 sind. Folglich ist

$$\pm \Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa^* p_\varkappa+1} = \left| A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa^* p_\varkappa+1} \right| = \left| \mathfrak{D}_1^{(\varkappa)} \right| \ldots \left| \mathfrak{D}^{(\varkappa)}_{\binom{n-1}{\varkappa}} \right|$$

für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1$. Hierbei ist $|\mathfrak{D}_i^{(\varkappa)}| = 1$ zu setzen, wenn das reduzierte $H_i^{(\varkappa)}$ keine Spalte enthält. Da nach S. 655 unten die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ in den Elementen von $H_1^{(\varkappa)}, \ldots, H^{(\varkappa)}_{\binom{n-1}{\varkappa}}$ nicht auftreten, sind $\left|\mathfrak{D}_1^{(\varkappa)}\right|, \ldots, \left|\mathfrak{D}^{(\varkappa)}_{\binom{n-1}{\varkappa}}\right|$ und damit auch $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa^* p_\varkappa+1}$ von den $a_1, \ldots, a_\varkappa$ unabhängig. $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa^* p_\varkappa+1}$ ist bei unbestimmten a von 0 verschieden; denn setzt man $f_{\varkappa+1} = x_{\varkappa+1}^{s_{\varkappa+1}}, \ldots, f_n = x_n^{s_n}$, so ist

$$\left|\mathfrak{D}_1^{(\varkappa)}\right| = 1, \ldots, \left|\mathfrak{D}^{(\varkappa)}_{\binom{n-1}{\varkappa}}\right| = 1, \quad \text{also} \quad \Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa^* p_\varkappa+1} = \pm 1.$$

Wir haben jetzt noch zu beweisen, daß $p_\varkappa^* = p_\varkappa$ ist, d. h., daß die Spaltenkombination $p_\varkappa$ aus $A^{(\varkappa-1)}$ zu der Zeilenkombination $p_\varkappa^*$ aus $A^{(\varkappa)}$ komplementär ist. Es genügt offenbar zu zeigen, daß die in den Ausdrücken (8) auftretenden $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ in $M^{(\varkappa)}$ nicht vorkommen. Wir suchen zunächst beiderseits die $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$ mit der gleichen τ-Determinante auf. Da in (8) $\nu_\varkappa < n$ ist, können wir uns dabei auf solche τ-Determinanten mit dem Indexsystem $\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa < n$ beschränken. Es seien also $\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa$ fixiert und $\nu_\varkappa < n$. Die τ-Determinante mit diesem Indexsystem tritt in $M^{(\varkappa)}$ mit dem Faktor $M_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa}$ und in (8) mit dem Faktor

$$\sum_{\nu=\nu_\varkappa+1}^{\nu=n} M_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa \nu} x_\nu^{s_\nu}$$

auf. Unsere Behauptung wird also bewiesen sein, wenn keines der Potenzprodukte von $\sum_{\nu=\nu_\varkappa+1}^{\nu=n} M_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa \nu} x_\nu^{s_\nu}$ unter denen von $M_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa}$ vorkommt.

Dies ist aber der Fall; denn die ersteren sind in mindestens einer der Variablen $x_{r_\varkappa+1}, \ldots, x_n$ nichtreduziert, während $M_{r_1 \ldots r_\varkappa}$ in $x_{r_\varkappa+1}, \ldots, x_n$ reduziert ist. Damit ist der Beweis des Hauptsatzes beendet.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß man, von einer anderen Reihenfolge der $f_1, \ldots, f_n$ ausgehend, durch die gleichen Überlegungen wie oben zu folgendem Satze gelangt:

Ist $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ irgendeine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so gibt es mindestens eine von 0 verschiedene $\varrho_\varkappa$-reihige Determinante aus $A^{(\varkappa)}$, welche für $\varkappa > 0$ von den Unbestimmten $a_{\varepsilon_1}, a_{\varepsilon_2}, \ldots, a_{\varepsilon_\varkappa}$ unabhängig ist.

§ 5.

Für die Ränge der Cayleyschen Matrizen bestehen wegen (6) die Beziehungen

$$\text{Rang } A^{(\varkappa)} + \text{Rang } A^{(\varkappa+1)} \leqq \sigma_{\varkappa+1}$$

für $\varkappa = 0, 1, \ldots, k-2$. Nach dem Hauptsatze ist nun Rang $A^{(\varkappa)} \geqq \varrho_\varkappa$ für $\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1$. Daher ergibt sich mit Rücksicht auf (7)

$$\text{Rang } A^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Dieses Resultat läßt sich auch so formulieren:

Ist $n \leqq m$ und sind $f_1, \ldots, f_n$ allgemeine Formen, so folgt für $L^{(\varkappa+1)}$ mit Koeffizienten $z^{(\varkappa+1)}$ aus $\mathfrak{R}(a)$ aus

$$(L^{(\varkappa+1)})_{z^{(\varkappa+1)}=f} = 0, \qquad L^{(\varkappa+1)} = (L^{(\varkappa+2)})_{z^{(\varkappa+2)}=f}$$

für $0 \leqq \varkappa < k-1$ und aus

$$(L^{(k)})_{z^{(k)}=f} = 0, \qquad L^{(k)} = 0.$$

Die Anzahl der linear unabhängigen $L^{(\varkappa+1)}$, welche der Gleichung $(L^{(\varkappa+1)})_{z^{(\varkappa+1)}=f} = 0$ genügen, ist nämlich nach (4) gleich $\sigma_{\varkappa+1} - \varrho_\varkappa$ und stimmt daher mit der Anzahl $\varrho_{\varkappa+1}$ der linear unabhängigen $F^{(\varkappa+1)}$ überein.

$F^{(0)}, \ldots, F^{(k-1)}$ bilden also die Hilbertsche Kette abgeleiteter Gleichungssysteme des aus den allgemeinen Formen bestehenden Modulsystems bezüglich $\mathfrak{R}(a)$.

Die Matrix von $(M^{(\varkappa+1)})_{z^{(\varkappa+1)}=f}$ hatten wir mit $A^{(\varkappa)}_{\cdot p_{\varkappa+1}}$ bezeichnet (s. § 4). Da diese ebenfalls den Rang $\varrho_\varkappa$ hat, muß sich jedes

$$F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{z^{(\varkappa+1)}=f},$$

wo $L^{(\varkappa+1)}$ also nicht beschränkt ist, mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(a)$ in die Gestalt $(M^{(\varkappa+1)})_{z^{(\varkappa+1)}=f}$ setzen lassen, und zwar eindeutig.

Da es nach dem Hauptsatze von 0 verschiedene, $\varrho_\varkappa$-reihige Determinanten aus $A^{(\varkappa)}$ gibt, welche von den Koeffizienten $a_1, \ldots, a_\varkappa$ unabhängig sind, ergibt sich noch folgender Satz:

Ist $n \leqq m$, $0 \leqq h < k$ und sind $f_{h+1}, \ldots, f_n$ allgemeine Formen, während $f_1, ., ., f_h$ Formen mit speziellen Koeffizienten sind, so ist

$$\text{Rang } A^{(h)} = \varrho_h; \quad \text{Rang } A^{(h+1)} = \varrho_{h+1}; \quad \ldots; \quad \text{Rang } A^{(k-1)} = \varrho_{k-1}.$$

Dies ist der auf allgemeine Formen bezügliche Spezialfall des von Herrn Fischer bewiesenen Rangsatzes (s. l. c. § 11).

§ 6.

Wir schließen hier den Beweis eines Satzes an, den wir im nächsten Kapitel benutzen werden, und der zuerst von Mertens ausgesprochen worden ist [15]).

Zunächst eine Vorbemerkung. Wenn $f_1, \ldots, f_n$ allgemeine Formen sind und ein Polynom der a, mit einem Potenzprodukt der x multipliziert, sich in die Gestalt $L_1 f_1 + \ldots + L_n f_n$ setzen läßt, wobei die $L_1, \ldots, L_n$ in den a ganz rational sind, so sagt man nach Mertens, das Polynom habe die Grundeigenschaft bezüglich der $f_1, \ldots, f_n$. Der Satz lautet:

Ein Polynom $\Theta(a)$, welches bezüglich der allgemeinen Formen die Grundeigenschaft hat, muß verschwinden, wenn $n < m$ ist.

Nach der Voraussetzung gibt es ein s und ein Potenzprodukt $\mathfrak{p}^{(0)}$, so daß

$$\Theta(a)\,\mathfrak{p}^{(0)} \equiv 0 \text{ modd } f_1, \ldots, f_n$$

ist. Dann ist (s. Mertens, l. c. § 1) auch

$$\Theta(a) \cdot x_m^s \equiv 0 \text{ modd } f_1, \ldots, f_n,$$

wenn s hinreichend groß gewählt wird [16]). Nach § 5 ist nun

$$\Theta(a)\, x_m^s = (M^{(1)})_{\tau^{(1)}=f}$$

mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(a)$. Ist

$$A^{(0)}_{\cdot p_1} = \begin{pmatrix} \alpha^{(0)}_{11}, \ldots, \alpha^{(0)}_{1\varrho_0} \\ \vdots \\ \alpha^{(0)}_{\sigma_0 1}, \ldots, \alpha^{(0)}_{\sigma_0 \varrho_0} \end{pmatrix}$$

die Matrix von $(M^{(1)})_{\tau^{(1)}=f}$, so ergibt sich das Gleichungssystem

$$\alpha^{(0)}_{\lambda_0 1} t_1 + \ldots + \alpha^{(0)}_{\lambda_0 \varrho_0} t_{\varrho_0} = 0; \quad \lambda_0 = 1, 2, \ldots, \sigma_0 - 1,$$
$$\alpha^{(0)}_{\sigma_0 1} t_1 + \ldots + \alpha^{(0)}_{\sigma_0 \varrho_0} t_{\varrho_0} = \Theta(a),$$

---

[15]) F. Mertens, l. c. 93, S. 529.

[16]) Der Beweis gilt übrigens auch dann, wenn nicht die Grundeigenschaft verlangt wird, sondern nur vorausgesetzt wird, daß $\Theta(a)\,\mathfrak{p}^{(0)}$ sich in die Gestalt $L_1 f_1 + \ldots + L_n f_n$ setzen läßt, wo die $L_1, \ldots, L_n$ rationale Funktionen der a sind.

wenn t die Koeffizienten von $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sind und die letzte Zeile von $A^{(0)}_{p_1}$ dem Potenzprodukt $\mathfrak{p}^{(0)}_{\varrho_0} = x_m^s$ entspricht. Ist $n < m$, so tritt die Potenz x_m^s in $M_1 x_1^{s_1} + \ldots + M_n x_n^{s_n}$ nicht auf. Folglich hat das Gleichungssystem wegen $\Delta^{(0)}_{p_0 p_1} \neq 0$ (s. § 4) nur die triviale Lösung $t_1 = 0, \ldots, t_{\varrho_0} = 0$, d. h. $\Theta(a) = 0$.

Kapitel II.

Die Konstruktion der Resultante.

§ 7.

Da die $\varrho_\varkappa$ positiv sind und den Gleichungen (7) genügen, bilden $A^{(0)}, \ldots, A^{(k-1)}$ nach (6) eine Kette korrespondierender Matrizen[17]). Wegen Rang $A^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ für $\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1$ gibt es für $\varkappa < k-1$ ein Indexsystem $p_{\varkappa+1}, \ldots, p_{k-1}$, so daß

$$\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}} \neq 0, \ \ldots, \ \Delta^{(k-1)}_{p_{k-1}\,1} \neq 0$$

ist, und der Quotient ($\varkappa$ und $p_\varkappa$ fixiert)

$$R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa} = \frac{\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}} \cdot \Delta^{(\varkappa+2)}_{p_{\varkappa+2} p_{\varkappa+3}} \cdots}{\Delta^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1} p_{\varkappa+2}} \cdots}$$

hat für jedes derartige Indexsystem ein und denselben Wert[18]). Es ist $p_\varkappa$ jetzt wieder als laufender Index zu betrachten. Es bestehen dann die Gleichungen

$$\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}} = R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa} \cdot R^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1}}; \qquad 0 \leqq \varkappa < k-1 \tag{9}$$

und

$$\Delta^{(k-1)}_{p_{k-1}\,1} = R^{(k-1)}_{p_{k-1}}. \tag{9'}$$

Bezeichnet $T^{(\varkappa)}$ den größten gemeinsamen Teiler der Polynome der $a\,\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}$ ($\varkappa$ fest und $p_\varkappa$, $p_{\varkappa+1}$ laufend) und $R^{(\varkappa)}$ den der rationalen Funktionen der $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ ($\varkappa$ fest, $p_\varkappa$ laufend), so ergeben sich bei geeigneter Verfügung über die an den größten gemeinsamen Teilern willkürlichen Faktoren die Beziehungen

$$T^{(\varkappa)} = R^{(\varkappa)} \cdot R^{(\varkappa+1)} \quad \text{für} \quad \varkappa < k-1 \quad \text{und} \quad T^{(k-1)} = R^{(k-1)}$$

und

$$R^{(\varkappa)} = \frac{T^{(\varkappa)} \cdot T^{(\varkappa+2)} \cdots}{T^{(\varkappa+1)} \cdots}.$$

---

[17]) Siehe E. Fischer, § 1 bis 4.

[18]) Die $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ stellen für $n = m$ und $s = s_1 + \ldots + s_n - n + 1$ die von Cayley gebildeten Quotienten dar.

Nun ist $T^{(\varkappa)}$ für $\varkappa > 0$ eine von den a unabhängige Konstante. Würde nämlich $T^{(\varkappa)}$ etwa von einem a_μ $(1 \leqq \mu \leqq n)$ abhängig sein, so müßten alle $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}$ von a_μ abhängig sein. Dies ist aber nicht der Fall, denn nach § 4, S. 660, gibt es — man setze zur Anwendung des Satzes etwa $\varepsilon_1 = \mu$ — mindestens ein von 0 verschiedenes $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}$, welches von allen a_μ unabhängig ist. Daher sind auch $R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, R^{(k-1)}$ von den a unabhängige Konstanten und $R^{(0)}$ eine Form der a. Folglich ist $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ für $0 \leqq \varkappa < k$ ganz rational in den a. Wir haben also den Satz:

Ist $n \leqq m$, so sind die $R^{(0)}_{p_0}, \ldots, R^{(k-1)}_{p_{k-1}}$ Formen der a[19]).

§ 8.

Wir machen nunmehr die Voraussetzung:

$$n = m \quad \text{und} \quad s > s_1 + \ldots + s_n - n.$$

Dann ist

$$\left[\frac{(1-t^{s_1}) \ldots (1-t^{s_n})}{(1-t)^n}\right]_{t^s} = 0,$$

also nach (7) $\varrho_0 = \sigma_0$. Daher hat p_0 den Wert 1, so daß $R^{(0)}$ mit $R^{(0)}_1$ bis auf einen von a unabhängigen Faktor übereinstimmt.

$R^{(0)}_1$ hat nun die Eigenschaften, welche F. Mertens zur Definition der Resultante von n allgemeinen Formen benutzt.

1. $R^{(0)}_1$ hat die Grundeigenschaft in bezug auf die Formen $f_1, \ldots, f_n$, d. h. es besteht eine Identität

$$R^{(0)}_1 \cdot \mathfrak{p}^{(0)} = Q_1 f_1 + \ldots + Q_n f_n,$$

worin $\mathfrak{p}^{(0)}$ ein Potenzprodukt der x von einem Grade s bedeutet und Q_ν Formen der x vom Grade $s - s_\nu$ sind, deren Koeffizienten *Polynome* der a sind.

Aus

$$\alpha^{(0)}_{1\lambda_1}\mathfrak{p}^{(0)}_1 + \ldots + \alpha^{(0)}_{\sigma_0\lambda_1} \cdot \mathfrak{p}^{(0)}_{\sigma_0} = (\mathfrak{p}^{(1)}_{\lambda_1})_{x^{(1)}=f}$$
$$\lambda_1 = 1, 2, \ldots, \sigma_1$$

---

[19]) Das bei dem Beweise des Hauptsatzes (§ 4) angegebene Indexsystem erhält durch folgenden Satz eine besondere Bedeutung:

Ist nämlich $p_0, \ldots, p_{k-1}$ dieses spezielle Indexsystem und ist $n \leqq m$, so ist $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ eine Unterdeterminante von $\Delta^{(\varkappa-1)}_{p_{\varkappa-1}p_\varkappa}$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1$.

Dies stellt eine Verallgemeinerung des in der Einleitung erwähnten Resultates von Macaulay dar, daß $R^{(1)}_{p_1}$ für $n = m$ und $s > s_1 + \ldots + s_n - n$ eine Unterdeterminante von $\Delta^{(0)}_{1p_1}$ ist. Auf eine Wiedergabe des Beweises möchte ich verzichten, da er im wesentlichen mit denselben Mitteln geführt wird, welche Macaulay anwendet, und sich im übrigen auf die Cayleysche Theorie stützt.

folgt nämlich, da $\varrho_0 = \sigma_0$ ist, für jedes p_1

$$\Delta^{(0)}_{1p_1}\mathfrak{p}^{(0)}_{\lambda_0} \equiv 0 \text{ modd } f_1, \ldots, f_n$$
$$\lambda_0 = 1, 2, \ldots, \sigma_0,$$

wobei die Kongruenz sich auf die x und die a bezieht. Wegen

$$\Delta^{(0)}_{1p_1} = R^{(0)}_1 \cdot R^{(1)}_{p_1}$$

muß nach Mertens mindestens einer der Faktoren $R^{(0)}_1$ oder $R^{(1)}_{p_1}$ die Grundeigenschaft haben. Wir wählen nun p_1 so, daß $R^{(1)}_{p_1}$ nicht verschwindet und von den a_1 unabhängig ist. Dies ist möglich, weil es nach Ende von § 4 solche von 0 verschiedene $\Delta^{(1)}_{p_1p_2}$ gibt, welche von den a_1 unabhängig sind. Würde $R^{(1)}_{p_1}$ die Grundeigenschaft haben, d. h. gäbe es ein Potenzprodukt der x, so daß

$$R^{(1)}_{p_1} \cdot \mathfrak{p}^{(0)} \equiv 0 \text{ modd } f_1, \ldots, f_n$$

ist, so würde sich, indem man $f_1 = 0$ setzt, ergeben:

$$R^{(1)}_{p_1} \cdot \mathfrak{p}^{(0)} \equiv 0 \text{ modd } f_2, \ldots, f_n.$$

Da nunmehr die Anzahl der Formen kleiner ist als die der Variablen, würde nach § 6 hieraus $R^{(1)}_{p_1} = 0$ folgen. Also muß $R^{(0)}_1$ die Grundeigenschaft haben. Es ist zu beachten, daß die $\mathfrak{p}^{(0)}$ bei $\Delta^{(0)}_{1p_1}$, $R^{(1)}_{p_1}$ und $R^{(0)}_1$ nicht notwendig den gleichen Grad haben.

2. Bei der Spezialisierung $f_1 = x_1^{s_1}, \ldots, f_n = x_n^{s_n}$ nimmt $R^{(0)}_1$ den Wert ± 1 an.

Nach dem Hauptsatze gibt es nämlich ein Indexsystem $p_1, \ldots, p_{k-1}$, so daß bei dieser Spezialisierung der $f_1, \ldots, f_n$

$$\Delta^{(0)}_{1p_1} = \pm 1, \ldots, \Delta^{(k-1)}_{p_{k-1}1} = \pm 1$$

ist.

3. Ist $A^{(0)}_{1p_1}$ die Matrix von $(M^{(1)})_{\tau^{(1)}=f}$ und $A^{(1)}_{.p_2}$ die von $(M^{(2)})_{\tau^{(2)}=f}$, p_1 und p_2 also jene festen Indizes (§ 4), so ist nach dem Hauptsatze $\Delta^{(1)}_{p_1p_2}$ und damit $R^{(1)}_{p_1}$ von den a_1 unabhängig. Weil in $A^{(0)}$ jede Spalte in den a_1 homogen ist, so ist $\Delta^{(0)}_{1p_1}$ und somit auch $R^{(0)}_1$ in den a_1 homogen, und zwar vom gleichen Grade wie $\Delta^{(0)}_{1p_1}$. Dieser Grad ist aber gleich der Anzahl der in M_1 auftretenden Potenzprodukte der x, also wegen $s > s_1 + \ldots + s_n - n$; gleich

$$\left[t^{s_1}\frac{(1-t^{s_2})\ldots(1-t^{s_n})}{(1-t)^n}\right] = s_2 \ldots s_n.$$

Für die Koeffizienten der übrigen Formen ist der Beweis analog.

Setzt man also $R(a) = \pm R_1^{(0)}$ und wählt das Vorzeichen so, daß $R(a) = +1$ ist für $f_1 = x_1^{s_1}, \ldots, f_n = x_n^{s_n}$, so hat $R(a)$ die von F. Mertens zur Definition der Resultante benutzten Eigenschaften.

Für $R_1^{(0)}$ gibt es im allgemeinen mehrere Darstellungen,

$$R_1^{(0)} = \frac{\Delta_{1\,p_1}^{(0)} \cdot \Delta_{p_2 p_3}^{(2)} \cdots}{\Delta_{p_1 p_2}^{(1)}},$$

da man die $\Delta_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}$ auf mannigfache Weise aus $A^{(\varkappa)}$ auswählen kann. Man erhält aber eine bestimmte, wenn $p_1, \ldots, p_{k-1}$ dasjenige Indexsystem bedeutet, welches in § 4 angegeben wurde.

Anhang.

Ein anderer Beweis der Cayleyschen Theorie.

Der oben entwickelte Beweis für die Cayleysche Konstruktion stützte sich im wesentlichen auf die Tatsache, daß es für $\varkappa > 0$ solche $\Delta_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \neq 0$ gibt, welche von den Koeffizienten von $\varkappa$ der Formen $f_1, \ldots, f_n$ unabhängig sind. Wir bewiesen die Existenz solcher Determinanten, indem wir eine explizit angaben. Dieser Nachweis läßt sich aber auch auf einem anderen Wege erbringen, der hier kurz beschrieben werden soll, da er eine besondere Eigenschaft der $\Delta_{p_\varkappa p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}$ hervorhebt. Damit ist dann, wie in der Einleitung angekündigt, eine zweite Begründung der Theorie gewonnen.

Die in § 4 aus $A^{(\varkappa)}$ ausgewählten Determinanten sind in den Koeffizienten einer jeden Form homogen, weil die Spalten der $H_i^{(\varkappa)}$ es sind. Dies läßt sich nun allgemein für alle von 0 verschiedenen Determinanten aus $A^{(\varkappa)}$ zeigen. Wir stützen uns dazu auf folgenden unmittelbar einleuchtenden Hilfssatz:

Sind die Elemente a_{ij} einer r-reihigen Determinante für $i > \varrho$ und $j > \sigma$ gleich 0 und die übrigen Unbestimmte, so ist die Determinante gleich 0, wenn $\sigma + \varrho < r$ ist, und wenn $\sigma + \varrho \geqq r$, so ist sie homogen in den $\varrho \cdot \sigma$ Unbestimmten a_{ij}, $i \leqq \varrho$ und $j \leqq \sigma$, und zwar vom Grade $\sigma + \varrho - r$.

Es genügt offenbar, die Homogenität der von 0 verschiedenen Determinanten aus $A^{(\varkappa)}$ in den Koeffizienten einer Form, etwa in den a_1 zu beweisen. $\mathfrak{p}_1^{(\varkappa+1)}, \ldots, \mathfrak{p}_p^{(\varkappa+1)}$ seien diejenigen $\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}$, deren τ-Determinante $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_1^{(\varkappa+1)}$ als erste Spalte enthält, und $\mathfrak{p}_1^{(\varkappa)}, \ldots, \mathfrak{p}_q^{(\varkappa)}$ diejenigen $\mathfrak{p}^{(\varkappa)}$, welche von $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_1^{(\varkappa)}$ unabhängig sind. Dann ist nach Anfang von § 2 $\alpha_{ij}^{(\varkappa)} = 0$ für $i > q$ und $j > p$. Da ferner nur die Elemente $\alpha_{ij}^{(\varkappa)}$ für $i \leqq q$ und $j \leqq p$ von a_1 abhängig sind, und zwar sind diese gleich einem $\pm a_1$ oder 0, folgt aus dem Hilfssatze die Behauptung.

Der in § 5 angegebene Rangsatz läßt sich mit Hilfe der gleichen Schlüsse beweisen, die Herr Fischer beim Beweise seines allgemeinen Rangsatzes anwendet, wenn man statt des Laskerschen Satzes einen spezielleren auf allgemeine Formen bezüglichen Satz von Hurwitz[20]) zugrunde legt.

Da nach diesem Rangsatze auch dann Rang $A^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ ist, wenn $\varkappa$ der Formen $f_1, \ldots, f_n$ $(\varkappa > 0)$ gleich 0 gesetzt werden, muß es *wegen der eben bewiesenen Homogenität* der Determinanten aus $A^{(\varkappa)}$ in den Koeffizienten einer jeden Form mindestens ein von 0 verschiedenes $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa p_\varkappa + 1}$ geben, welches von den Koeffizienten von $\varkappa$ der $f_1, \ldots, f_n$ unabhängig ist.

Als weiteres Resultat ergibt sich noch, daß auch die $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ für $\varkappa > 0$ in den Koeffizienten einer jeden Form homogen sind.

Der Maximalrang der Cayleyschen Matrizen bei speziellen Wertsystemen a.

Für den schon mehrfach erwähnten allgemeinen Rangsatz von Fischer ergibt sich aus den Resultaten von § 2 bis 4 ein einfacher Beweis. Da wir die Ränge der Matrizen $H_i^{(\varkappa)}$ (s. § 2 und § 4) bei unbestimmten a kennen, läßt sich mit Hilfe des Laskerschen Satzes[21]) leicht folgender Satz zeigen:

Ist $0 \leqq h < k$, $n \leqq m$, und erteilt man den a solche Werte, daß $f_{h+1}, \ldots, f_n$ ein System von nicht verschwindender Resultante[22]) bilden, so haben $H_1^{(\varkappa)}, \ldots, H^{(\varkappa)}_{\binom{n-1}{\varkappa}}$ für $\varkappa \geqq h$ bzw. $A^{(0)}$ für $h = 0$ jeweils dieselben Ränge wie bei unbestimmten a.

Da nun nach S. 656 in $A^{(\varkappa)}$ für $\varkappa > 0$ alle Elemente „oberhalb" der $H_2^{(\varkappa)}, \ldots, H^{(\varkappa)}_{\binom{n-1}{\varkappa}}$ gleich 0 sind, muß es für $\varkappa \geqq h$ mindestens eine $\varrho_\varkappa$-reihige von 0 verschiedene Determinante geben, d. h. Rang $A^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ für $\varkappa = h, h+1, \ldots, k-1$.

Der folgende Satz stellt gewissermaßen eine Verallgemeinerung des eben bewiesenen dar.

Nach (9) und (9′) kann, da die $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ Formen der a sind, bei speziellen Werten a nur dann Rang $A^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ sein, wenn mindestens ein $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ nicht verschwindet[23]). Diese Bedingung ist aber auch hinreichend:

---

[20]) A. Hurwitz, l. c., Satz 12.

[21]) Lasker, Zur Theorie der Ideale und Moduln, Math. Annalen **60**, Satz 1.

[22]) Zur Erläuterung dieser von Ostrowski vorgeschlagenen Bezeichnung siehe Fischer, l. c. § 8.

[23]) Für $\varkappa = 0$, $n = m$ und $s > s_1 + \ldots + s_n - n$ bedeutet diese notwendige Bedingung, daß $R(a)$ nicht verschwindet, woraus umgekehrt nach dem Rangsatz Rang $A^{(0)} = \varrho_0$ folgt.

Die Gradzahl s sei fixiert und $n < m$. Wenn dann für $\varkappa \geqq 0$ mindestens ein $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$ nicht verschwindet, ist Rang $A^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$. Dies gilt bei $\varkappa = 0$ auch für $n = m$ (s. Fußnote [23])).

Wir behandeln zuerst den Fall $\varkappa = 0$ und $n < m$. Die a seien zunächst Unbestimmte und $R_{p_0}^{(0)}$ und $R_{p_1}^{(1)}$ von 0 verschieden. Aus den Gleichungen

$$(\mathfrak{p}_{\lambda_1}^{(1)})_{\tau^{(1)}=f} = \alpha_{1\lambda_1}^{(0)}\,\mathfrak{p}_1^{(0)} + \ldots + \alpha_{\sigma_0\lambda_1}^{(0)}\,\mathfrak{p}_{\sigma_0}^{(0)}; \quad \lambda_1 = 1, \ldots, \sigma_1$$

ergeben sich mit Rücksicht auf (9) die auf die x und a bezüglichen Kongruenzen:

$$R_{p_1}^{(1)}\left(R_{p_0}^{(0)}\,\mathfrak{p}_{\lambda_0}^{(0)} + T_{p_0\lambda_0}^{(0)}\right) \equiv 0 \text{ modd } f_1, \ldots, f_n,$$
$$\lambda_0 = 1, 2, \ldots, \varrho_0,$$

worin $T_{p_0\lambda_0}^{(0)}$ eine Form der x vom Grade s ist, deren Koeffizienten jeweils gleich $\pm R_{p_0^*}^{(0)}$ sind und in der $\mathfrak{p}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\varrho_0}^{(0)}$ nicht auftreten. Hieraus folgt wegen $n < m$ nach Mertens (s. oben § 6, S. 661) und nach Hurwitz (l. c. Satz 11)

$$(10) \qquad R_{p_0}^{(0)}\,\mathfrak{p}_{\lambda_0}^{(0)} + T_{p_0\lambda_0}^{(0)} \equiv 0 \text{ modd } f_1, \ldots, f_n,$$
$$\lambda_0 = 1, \ldots, \varrho_0.$$

Wenn man also für die a spezielle Werte einsetzt, so gehören die dadurch aus (10) entstehenden Formen dem aus allen $L_1 f_1 + \ldots + L_n f_n$ bestehenden Modul an. Ist nach der Voraussetzung etwa $R_{p_0}^{(0)}$ von 0 verschieden, so sind die ϱ_0 Formen

$$R_{p_0}^{(0)}\,\mathfrak{p}_{\lambda_0}^{(0)} + T_{p_0\lambda_0}^{(0)}, \quad \lambda_0 = 1, \ldots, \varrho_0$$

linear unabhängig, d. h. Rang $A^{(0)} = \varrho_0$.

Es sei jetzt $\varkappa > 0$ und $n \leqq m$, und die a seien zunächst wieder Unbestimmte.

Versteht man unter $L^{(\varkappa)}$ einen solchen Ausdruck von der Gestalt (1), dessen Koeffizienten *Polynome* der a sind, so gilt folgender Hilfssatz:

Sind $f_1, \ldots, f_n$ allgemeine Formen, und ist $n \leqq m$, so folgt aus

$$(L^{(\varkappa)})_{\tau^{(\varkappa)}=f} = 0, \quad L^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$$

bzw.

$$L^{(\varkappa)} = 0 \quad \text{für } \varkappa = k.$$

Der Beweis läßt sich auf Grund eines Satzes von Hurwitz (l. c. Satz 12) mit Hilfe der gleichen Schlüsse erbringen, welche Herr Fischer beim Beweise des Lasker-Ostrowskischen Satzes angewendet hat (s. Fischer, l. c. § 8).

Analog wie oben ergeben sich die Gleichungen

$$R_{p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)}\left(R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}\,\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}+T_{p_\varkappa\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)=\left(L^{(\varkappa+1)}\right)_{\tau^{(\varkappa+1)}=f},$$

$$\lambda_\varkappa=1,2,\ldots,\varrho_\varkappa,$$

worin $L^{(\varkappa+1)}$ von $\lambda_\varkappa$, $p_\varkappa$ und $p_{\varkappa+1}$ abhängig ist und wobei die Koeffizienten von $L^{(\varkappa+1)}$ in den a ganz sind und $\mathfrak{p}_1^{(\varkappa)},\ldots,\mathfrak{p}_{\varrho\varkappa}^{(\varkappa)}$ in den $T_{p_\varkappa 1}^{(\varkappa)},\ldots,T_{p_\varkappa\varrho_\varkappa}^{(\varkappa)}$ nicht auftreten. Macht man hierin die Substitution $\tau_1^{(\varkappa)}=f_1,\ldots,\tau_n^{(\varkappa)}=f_n$, so ergibt sich, falls $R_{p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)}$ von 0 verschieden ist,

$$\left(R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}\,\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}+T_{p_\varkappa\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)_{\tau^{(\varkappa)}=f}=0.$$

Da dies eine Gleichung von der Gestalt $\left(L^{(\varkappa)}\right)_{\tau^{(\varkappa)}=f}$ ist, wo $L^{(\varkappa)}$ in den a ganz rational ist, folgt nach dem Hilfssatz, daß $(\varkappa<k)$ die $\varrho_\varkappa$ Formen $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}\,\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}+T_{p_\varkappa\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}$ sich in die Gestalt $\left(L^{(\varkappa+1)}\right)_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ setzen lassen, wobei die $L^{(\varkappa+1)}$ in den a ganz rational sind. Wenn man also für die a spezielle Werte einsetzt, so gehen diese Formen in solche über, welche der aus allen $\left(L^{(\varkappa+1)}\right)_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ bestehenden Schar angehören. Ist etwa $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$ von 0 verschieden, so sind die $\varrho_\varkappa$ Formen

$$R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}\,\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}+T_{p_\varkappa\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)};\quad\lambda_\varkappa=1,\ldots,\varrho_\varkappa$$

linear unabhängig und folglich Rang $A^{(\varkappa)}=\varrho_\varkappa$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Wenn also ein $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$ nicht verschwindet, so muß auch mindestens ein $R_{p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)}$ von 0 verschieden sein. Man kann daher den Satz nochmals anwenden, so daß sich schließlich ergibt:

Ist s fixiert, $n\leqq m$, $0<h<k$ und mindestens ein $R_{p_h}^{(h)}\neq 0$, so ist

$$\text{Rang } A^{(h)}=\varrho_h,\ \ldots,\ \text{Rang } A^{(k-1)}=\varrho_{k-1},$$

bzw. wenn $n<m$ und mindestens $R_{p_0}^{(0)}\neq 0$

$$\text{Rang } A^{(0)}=\varrho_0,\ \ldots,\ \text{Rang } A^{(k-1)}=\varrho_{k-1}.$$

(Eingegangen am 14. April 1933.)

Bemerkung zu meiner Arbeit: Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung[1]).

Von

Stefan Warschawski in New York.

Herr R. Nevanlinna war so liebenswürdig, mich auf ein Versehen beim Beweise des folgenden Satzes (Hilfssatz 10, S. 377) in der im Titel genannten Arbeit aufmerksam zu machen.

I. *Es sei G ein von einer geschlossenen Jordankurve Γ begrenztes Gebiet in der z-Ebene, und $w = f(z)$ eine in G reguläre, in $G + \Gamma$ stetige Funktion; z_1 sei ein Punkt auf Γ. Gilt dann für alle z auf Γ $(z \neq z_1)$*

$$\left| \frac{f(z) - f(z_1)}{(z - z_1)^\alpha} \right| \leqq \Omega \qquad (\alpha > 0),$$

so gilt dies auch für alle z aus G.

Der Satz selber ist richtig, so daß durch das Versehen beim Beweise keines der weiteren Resultate der Arbeit betroffen wird, und er kann auf verschiedene Arten bewiesen werden. Der folgende Beweis dürfte wohl auch deshalb von Interesse sein, weil er einen anscheinend neuartigen Ansatz aus dem Phragmén-Lindelöfschen Ideenkreis verwendet. Wir werden nämlich I aus dem folgenden Satze herleiten:

II. a) *Es sei $\Phi(z)$ in $|z| < 1$ regulär; ferner möge es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem von $z = 1$ verschiedenen Punkte auf $|z| = 1$ eine Halbumgebung geben, so daß für alle dort liegenden z $|\Phi(z)| \leqq 1 + \varepsilon$ gilt.*

b) *Es sei $\varphi(z)$ in $|z| < 1$ regulär und $|\varphi(z)| \geqq c > 0$, c Konstante; ferner möge es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine in einem von ε unabhängigen Winkelraum $|\arg(1 - z)| \leqq \eta < \frac{\pi}{2}$ gegen $z = 1$ konvergierende Punktfolge z_ν geben, so daß*

$$|\varphi(z_\nu)| \leqq e^{\frac{\varepsilon}{|1 - z_\nu|}} \tag{1}$$

gilt.

c) *Es sei in einer Umgebung von $z = 1$ $(|z| < 1)$ $|\Phi(z)| \leqq |\varphi(z)|$. Dann ist in $|z| < 1$ $|\Phi(z)| \leqq 1$.*

---

[1]) Math. Zeitschr. **35**, S. 321—456.

Während in dem klassischen Satz von Phragmén und Lindelöf[2]) eine Einschränkung des Wachstums der zu untersuchenden Funktion bei beliebiger allseitiger Annäherung von z an den „Ausnahmepunkt" $z = 1$ gefordert wird, genügt es hier, eine solche Einschränkung (1) — allerdings für $\varphi(z)$ — für eine in einem festen Winkelraum gegen $z = 1$ konvergierende Punktfolge zu verlangen. Übrigens kann die Bedingung $|\varphi(z)| \geqq c > 0$ durch die schwächeren Annahmen

$$(2) \qquad \varphi(z) \neq 0 \text{ in } |z| < 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \overset{+}{\lg} \left| \frac{1}{\varphi(re^{i\vartheta})} \right| d\vartheta \leqq \text{Const} \qquad (0 \leqq r < 1)$$

ersetzt werden (vgl. § 4).

Der Satz II sowie seine Verallgemeinerung Hilfssatz 3 (in § 3) hängt mit einem Resultat von Herrn Ostrowski über die Darstellbarkeit eines im Einheitskreise regulären Potentials durch das Poissonsche Integral zusammen[3]).

Vermittels konformer Abbildung lassen sich aus II analoge Sätze für allgemeinere schlichte Gebiete gewinnen, man vergleiche insbesondere im folgenden Satz IV[4]).

§ 1.

Beweis von II.

Wir schicken dem Beweise von II die beiden folgenden Hilfssätze voraus:

Hilfssatz I: *Es sei $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär; ferner möge es zu jedem $\varepsilon > 0$ und in jedem von $z = 1$ verschiedenen Punkte von $|z| = 1$*

---

[2]) E. Phragmén u. E. Lindelöf, Acta Math. **31**, S. 381—391, siehe auch Bieberbach, Lehrb. d. Funktionentheorie II, S. 132 f. und 232 f.

[3]) A. Ostrowski, Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen, Acta Math. **53**, (1929), Satz C, S. 255, der dort als Hilfssatz zum Beweise eines anderen Satzes (Satz B) aufgestellt wird. Der Satz besagt, daß *ein in $|z| < 1$ reguläres Potential $P(z)$ mit $\int_{-\pi}^{\pi} |P(re^{i\vartheta})| d\vartheta \leqq C$ für $0 \leqq r < 1$ durch das Poissonsche Integral mit den für fast alle ϑ existierenden Randwerten als Belegung dargestellt werden kann, falls die Menge der „Unbeschränktheitspunkte" von $P(z)$ am Rande höchstens abzählbar ist und $\overline{\lim_{r \uparrow 1}} (1-r) P(re^{i\vartheta}) = 0$ für jedes ϑ ist.*

Man könnte den Beweis von II und Hilfssatz 3 auch mit Hilfe dieses Satzes führen. Wir geben aber einen direkten Beweis, der außerdem keine Hilfsmittel aus der Theorie der reellen Funktionen verwendet. Vgl. ferner den Schluß von § 3.

[4]) Es werde hier noch ein weiteres Versehen in der im Titel genannten Arbeit berichtigt: In Fußnote [15]), S. 328, 2. Zeile, muß es heißen: „... $\lg f(z) = \lg f(z) + i\,\Theta(z)$ bei passendem ϱ_0 mit $0 < \varrho_0 < \varrho = |z| < 1$, $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ eindeutig regulär, wenn für $\Theta(z)$ in einem inneren Punkt dieses Gebietes irgendeine ...". Ferner auf S. 434, 15. Zeile von oben lies: „$\varphi'(w)$" (statt „$\varphi(w)$").

eine Umgebung geben, so daß für alle $|z| < 1$ *aus einer solchen Umgebung* $|f(z)| \leqq 1 + \varepsilon$ *gilt. Damit dann* $|f(z)|$ *in* $|z| < 1$ *beschränkt (und damit* $\leqq 1$*) ist, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *gibt, so daß*

$$\lim_{R \uparrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} \overset{+}{\lg} |f(Re^{i\vartheta})| \, d\vartheta \leqq \varepsilon \tag{3}$$

gilt[5]).

Beweis: a) Für $0 \leqq r < R < 1$ gilt bekanntlich

$$\overset{+}{\lg} |f(re^{i\alpha})| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overset{+}{\lg} |f(Re^{i\vartheta})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\vartheta - \alpha)} \, d\vartheta.$$

Es sei die Bedingung des Satzes erfüllt, $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben und δ sei die gemäß (3) zu ε gehörende Zahl. Dann zerlegen wir das Integral rechts in die Teilintegrale über die Strecken $-\pi \ldots -\delta$, $-\delta \ldots \delta$, $\delta \ldots \pi$. Auf Grund des Heine-Borelschen Überdeckungssatzes gibt es ein (von δ abhängiges) R_0 mit $0 < R_0 < 1$, so daß für $R_0 \leqq R < 1$ und $-\pi \leqq \vartheta \leqq -\delta$ bzw. $\delta \leqq \vartheta \leqq \pi$

$$\overset{+}{\lg} |f(Re^{i\vartheta})| \leqq \overset{+}{\lg}(1 + \varepsilon) < \varepsilon$$

gilt. Daher folgt bei festem r für eine passende Folge $R_\nu \uparrow 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit $\nu \to \infty$

$$\begin{aligned} \overset{+}{\lg} |f(re^{i\alpha})| &\leqq \overset{+}{\lg}(1 + \varepsilon) + \lim_{R \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} \overset{+}{\lg} |f(Re^{i\vartheta})| \frac{R + r}{R - r} \, d\vartheta \\ &\leqq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1 + r}{1 - r}, \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung wegen der Willkür von ε ergibt.

b) Ist in $|z| < 1$ $|f(z)| \leqq M$, so ist offenbar die Bedingung (3) erfüllt.

Mit der eben durchgeführten Methode beweist man sofort den folgenden

---

[5]) Dieser Satz ist ein Analogon zu einem Satze von F. und R. Nevanlinna (Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta soc. scient. Fenicae **50** (1922), 5, S. 17), mit Hilfe dessen dort der Satz von Phragmén und Lindelöf auf eine neue Art hergeleitet wird. Unser Satz geht aber nicht aus jenem durch konforme Abbildung der rechten Halbebene auf den Einheitskreis hervor, und umgekehrt.

Zusatz: Es sei $f(z)$ in $|z|<1$ regulär, und es möge zu jedem $\varepsilon>0$ sowie zu jedem $z=e^{i\vartheta}$ mit Ausnahme einer Menge $\mathfrak{M}$ von ϑ-Werten in $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ eine Umgebung von $z=e^{i\vartheta}$ existieren, so daß für alle $|z|<1$ aus dieser Umgebung $|f(z)| \leqq 1+\varepsilon$ gilt. $\mathfrak{M}$ habe die Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon>0$ lassen sich endlich viele $\mathfrak{M}$ überdeckende[6]) Intervalle $i_1, i_2, \ldots, i_n$ $(n=n(\varepsilon))$ ohne gemeinsame innere Punkte angeben, so daß, $J=i_1+i_2+\ldots+i_n$ gesetzt,

$$\overline{\lim_{R\uparrow 1}} \int_J^+ \lg |f(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \varepsilon$$

ist. Dann ist in $|z|<1$ $|f(z)| \leqq 1$.

Hilfssatz 2: *Es sei $u(z)$ eine in $|z|<1$ nicht negative reguläre Potentialfunktion, und es möge bei Annäherung von z an den Peripheriepunkt $z_0=e^{i\alpha_0}$ innerhalb eines festen von zwei von z_0 ausgehenden Kreissehnen gebildeten Winkelraumes W*

$$\underline{\lim}\, u(z)\,|z-z_0| = 0 \tag{4}$$

sein. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, so daß

$$\overline{\lim_{R\uparrow 1}} \int_{\alpha_0-\delta}^{\alpha_0+\delta} u(Re^{i\vartheta})\, d\vartheta \leqq \varepsilon$$

ist.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $z_0=1$ angenommen werden. Nach Voraussetzung gilt für eine passende Folge z_ν aus W mit $z_\nu \to 1$ $\lim_{\nu\to\infty}(1-z_\nu)\,u(z_\nu)=0$. Für diese z_ν gilt dabei mit einer nur von W abhängigen Konstanten k

$$|1-z_\nu| \leqq k(1-|z_\nu|). \tag{5}$$

Es sei $\varepsilon>0$ vorgegeben und ein $z_\nu=\zeta$ aus dieser Folge *fest* angenommen, so daß

$$u(\zeta)\,|1-\zeta| \leqq \frac{\varepsilon}{\pi(k+1)^2}$$

ist. Man setze nun $\delta=1-|\zeta|$. Dann ist für $|\zeta|=\varrho<R<1$

$$|1-\zeta|\,u(\zeta) \geqq (1-\varrho)\,u(\zeta) = \frac{1-\varrho}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(Re^{i\vartheta})\,\frac{R^2-\varrho^2}{|\zeta-Re^{i\vartheta}|^2}\,d\vartheta$$

$$\geqq \frac{1-\varrho}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} u(Re^{i\vartheta})\,\frac{R^2-\varrho^2}{|\zeta-Re^{i\vartheta}|^2}\,d\vartheta.$$

[6]) Jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ liegt im Innern eines Intervalls i_ν.

Nun ist offenbar für $-\delta \leqq \vartheta \leqq \delta = 1-\varrho$

$$|\zeta - Re^{i\vartheta}| \leqq |\zeta - e^{i\vartheta}| \leqq |\zeta - 1| + |1 - e^{i\vartheta}|$$
$$\leqq k(1-\varrho) + |1 - e^{i\delta}| \leqq (k+1)(1-\varrho)$$

(wegen (5)) und daher

$$\frac{\varepsilon}{\pi(1+k)^2} \geqq \frac{(1-\varrho)(R^2-\varrho^2)}{2\pi(1+k)^2(1-\varrho)^2} \int_{-\delta}^{\delta} u(Re^{i\vartheta})\, d\vartheta,$$

woraus mit $R \uparrow 1$ die Behauptung folgt.

Satz II folgt nun so: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $c = 1$. Dann ist von einem $R < 1$ ab für alle genügend kleinen $\delta > 0$

$$(6) \qquad \int_{-\delta}^{\delta} \overset{+}{\lg} |\Phi(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \int_{-\delta}^{\delta} \overset{+}{\lg} |\varphi(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta = \int_{-\delta}^{\delta} \lg |\varphi(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta.$$

Da ferner $u(z) = \lg|\varphi(z)|$ eine in $|z| < 1$ reguläre nicht-negative Potentialfunktion ist, für die (4) erfüllt ist, folgt nach Hilfssatz 2, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$\overline{\lim_{R \uparrow 1}} \int_{-\delta}^{\delta} \lg |\varphi(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \varepsilon$$

gilt. Wegen (6) folgt daraus nach Hilfssatz 1 $|\Phi(z)| \leqq 1$ in $|z| < 1$, w. z. b. w.

§ 2.

Herleitung von I aus II und eine weitere Folgerung.

Um I aus II zu folgern, bilde man $|\zeta| < 1$ so auf G vermittels $z = g(\zeta)$ ab, daß $g(1) = z_1$ ist. Wegen $g(\zeta) - g(1) \neq 0$ in $|\zeta| < 1$ ist jeder Zweig von $(g(\zeta) - g(1))^{-\alpha} = \gamma(\zeta)$ $(\alpha > 0)$ eindeutig und regulär. Man setze nun $f^*(\zeta) = f(g(\zeta)) - f(g(1))$ und wende II an mit

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{\Omega} f^*(\zeta)\gamma(\zeta), \quad \varphi(\zeta) = \frac{M}{\Omega}\gamma(\zeta),$$

wobei M eine obere Schranke für den absoluten Betrag der in $|\zeta| < 1$ regulären und in $|\zeta| \leqq 1$ stetigen Funktion $f^*(\zeta)$ ist. Es ist nämlich $\Phi(\zeta)$ offenbar in $|\zeta| \leqq 1$ bis auf eventuell $\zeta = 1$ stetig und auf $|\zeta| = 1$ $(\zeta \neq 1)$ absolut $\leqq 1$, ferner gilt $|\Phi(\zeta)| \leqq |\varphi(\zeta)|$, und schließlich ist wegen der Beschränktheit und Schlichtheit von $g(\zeta) - g(1)$ in $|\zeta| < 1$ auch $\frac{1}{g(\zeta) - g(1)}$ dort absolut genommen nach unten beschränkt und schlicht.

Nach dem Verzerrungssatz gilt somit

$$\frac{1}{g(\zeta)-g(1)} = O\left(\frac{1}{(1-|\zeta|)^2}\right),$$

also auch insbesondere für $0 \leqq \zeta < 1$:

$$\gamma(\zeta) = O\left(\frac{1}{(1-\zeta)^2}\right).$$

Eine Verallgemeinerung von I ist der folgende Satz:

I'. a) *Es sei G ein von einer geschlossenen Jordankurve Γ begrenztes Gebiet, $f(z)$ in G regulär. Mit Ausnahme eines Punktes a auf Γ möge es zu jedem Punkte auf Γ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U in G geben, so daß in U $|f(z)| \leqq 1+\varepsilon$ ist.* b) *Ferner sei $|f(z)| \leqq |\psi(z)|^\alpha$, wo $\alpha > 0$, $\psi(z)$ eine in G reguläre schlichte Funktion ist. Dann ist in G $|f(z)| \leqq 1$.*

Der Beweis kann genau wie der von I geführt werden, wenn man noch beachtet, daß, wenn $h(\zeta)$ in $|\zeta| < 1$ regulär und schlicht ist, $\frac{h(\zeta)-h(0)}{\zeta}$ absolut nach unten beschränkt ist und ferner wegen

$$|h(\zeta)| = \left|h(0) + \zeta\frac{h(\zeta)-h(0)}{\zeta}\right| \leqq |h(0)| + \left|\frac{h(\zeta)-h(0)}{\zeta}\right|$$

bei passender Konstanten γ:

$$|h(\zeta)| \leqq \gamma\left|\frac{h(\zeta)-h(0)}{\zeta}\right|$$

gilt.

§ 3.

Verallgemeinerungen durch konforme Abbildung.

Satz II kann offenbar auf ein von einer geschlossenen Jordankurve berandetes Gebiet G als Definitionsbereich von $\Phi(z)$ durch konforme Abbildung $z = g(\zeta)$ von $|\zeta| < 1$ auf G übertragen werden, wenn die Abbildung in dem „Ausnahmepunkt" $a = g(1)$ noch winkeltreu (oder winkelproportional) ist und wenn ferner bei Annäherung im Winkelraum an $\zeta = 1$ der Differenzenquotient $\left|\frac{g(\zeta)-g(1)}{\zeta-1}\right|$ nach unten beschränkt bleibt. Aber auch in allgemeineren Fällen lassen sich ähnliche Sätze formulieren, z. B. der folgende:

III. *Es sei die Voraussetzung* a) *in* I' *erfüllt; Γ besitze in $z = a$ eine Tangente. Ferner sei $\varphi(z)$ in $|z| < 1$ regulär, $|\varphi(z)| \geqq c > 0$, in einer Umgebung von $z = a$ $|f(z)| \leqq |\varphi(z)|$, und es gelte für jedes δ mit $0 < \delta < 1$: $|\varphi(z_\nu)| = O\left(e^{\frac{1}{|z_\nu - a|^{1-\delta}}}\right)$ für eine passende Punktfolge $z_\nu \to a$ in einem festen Winkelraum. Dann ist in G: $|f(z)| \leqq 1$.*

Der Beweis folgt leicht daraus, daß die Abbildung $z = g(\zeta)$ von $|\zeta| < 1$ auf G in $a = g(1)$ wegen der Existenz der Tangente noch winkeltreu ist, und daß ferner bei $\zeta \to 1$ in jedem festen Winkelraum

$$\frac{|g(\zeta) - g(1)|}{|\zeta - 1|^{1+\delta}} = \frac{|z - a|}{|\zeta - 1|^{1+\delta}} \to \infty$$

strebt[7]), also schließlich $\geqq 1$ bleibt. Ist $z_\nu = g(\zeta_\nu)$, so ist daher

$$\varphi(g(\zeta_\nu)) = O\left(e^{\frac{1}{|\zeta_\nu - 1|^{(1+\delta)(1-\delta)}}}\right) = O\left(e^{\frac{1}{|\zeta_\nu - 1|^{1-\delta^2}}}\right),$$

$\varphi(g(\zeta))$ und $f(g(\zeta))$ genügen also den Voraussetzungen von II.

Allgemeiner hinsichtlich der Randstruktur ist der folgende Satz[8]):

IV. *Es sei G ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet in der z-Ebene mit mindestens zwei Randpunkten, a ein endlicher erreichbarer Randpunkt von G von höchstens abzählbarer Mehrfachheit*[9]). *$f(z)$ sei in G regulär, und es möge zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem von a verschiedenen Randpunkt von G eine Umgebung existieren, so daß für alle z aus G und dieser Umgebung $|f(z)| \leqq 1 + \varepsilon$ gilt. Ferner sei $\psi(z)$ in G regulär, $|\psi(z)| \geqq c > 0$, $|f(z)| \leqq |\psi(z)|$ und bei beliebiger Annäherung von z aus G an a für jedes feste $\varepsilon > 0$ $\psi(z) = O\left(e^{\frac{\varepsilon}{\sqrt{|z-a|}}}\right)$. Dann ist in G $|f(z)| \leqq 1$.*

Beweis: $\zeta = h(z)$ bilde G auf $|\zeta| < 1$ ab, $z = g(\zeta)$ sei die zu $h(z)$ inverse Funktion. Da a als ein Randpunkt von höchstens abzählbarer Mehrfachheit vorausgesetzt ist, ist die Menge der Häufungspunkte von

---

[7]) Um dies einzusehen, wähle man ein Polygon mit endlich vielen Seiten, das eine Ecke der Öffnung $\pi\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)$ in a hat und das Γ in seinem Äußeren $\mathfrak{G}$ enthält. Dann bilde man $\mathfrak{G}$ durch $\zeta = h^*(z)$ mit $h^*(a) = 1$ auf $|\zeta| < 1$ konform ab. Bekanntlich gilt dann für z aus $\mathfrak{G}$, $(z \neq a)$

$$\lim_{z \to a} \frac{|h^*(z) - h^*(a)|}{|z - a|^{\frac{1}{1+\delta}}} = 0.$$

Ist $\zeta = h(z)$ die zu $g(\zeta)$ (im Text) inverse Funktion, so ist in G nach dem Lindelöfschen Prinzip: $|h(z)| \geqq |h^*(z)|$, also für $z \to a$ im Winkelraum

$$\frac{|1 - h(z)|}{|a - z|^{\frac{1}{1+\delta}}} \leqq K \frac{1 - |h(z)|}{|a - z|^{\frac{1}{1+\delta}}} \leqq K \frac{|1 - h^*(z)|}{|z - a|^{\frac{1}{1+\delta}}} \to 0,$$

woraus die Behauptung des Textes folgt.

[8]) IV ist entstanden, nachdem ich von dem Inhalt der nachfolgenden Note von Herrn Ostrowski Kenntnis genommen hatte.

[9]) Darunter soll ein Randpunkt verstanden werden, in dem nur *erreichbare* Punkte von höchstens abzählbar vielen verschiedenen Primenden zusammenfallen.

$h(z)$ für $z \to a$ (z aus G) eine höchstens abzählbare abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}(e^{i\vartheta_\nu})$ ($\nu = 1, 2, \ldots, -\pi \leqq \vartheta_\nu \leqq \pi$) auf der Kreisperipherie. Daraus folgt bereits wegen der Annahme über das Verhalten von $f(z)$ in der Umgebung der von a verschiedenen Randpunkte, daß es zu jedem $\zeta' \neq e^{i\vartheta_\nu}$ von $|\zeta| = 1$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Halbumgebung gibt, so daß dort $|\Phi(\zeta)| \leqq 1 + \varepsilon$ gilt. Weil ferner a nur aus erreichbaren „Elementen" bestehen soll, so konvergiert bei radialer Annäherung von ζ an $e^{i\vartheta_\nu}$ $g(\zeta) \to a$. Nun ist nach dem Verzerrungssatz

$$|g(\zeta) - a| \geqq \frac{1}{K}(1 - |\zeta|)^2 \qquad (K > 0 \text{ Konstante}),$$

und somit wegen unserer Annahme über $\psi(z)$ bei jedem $\varepsilon > 0$

$$\varphi(\varrho e^{i\vartheta_\nu}) = \psi(g(\varrho e^{i\vartheta_\nu})) = O\left(e^{\frac{K\varepsilon}{1-\varrho}}\right)^{10}) \qquad (\varrho \uparrow 1).$$

Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich nun aus der folgenden Verallgemeinerung von II.

Hilfssatz 3: *Es sei $\Phi(\zeta)$ in $|\zeta| < 1$ regulär, und es möge zu jedem Punkte ζ' von $|\zeta| = 1$ mit Ausnahme einer abgeschlossenen abzählbaren Menge $\mathfrak{M}\{e^{i\vartheta_\nu}\}$ sowie zu jedem $\varepsilon < 0$ eine Halbumgebung geben, so daß dort $|\Phi(\zeta)| \leqq 1 + \varepsilon$ gilt. Zu jedem $e^{i\vartheta_\nu}$ von $\mathfrak{M}$ möge es eine in $|\zeta| < 1$ reguläre nach unten absolut beschränkte Funktion $\varphi_\nu(\zeta)$ geben, so daß in einer Umgebung von ζ_ν $|\Phi(\zeta)| \leqq |\varphi(\zeta)|$ ist, und für eine im Winkelraum*[11]) *gegen $e^{i\vartheta_\nu}$ konvergierende Punktfolge $\{\zeta_m\}$:*

$$\varphi_\nu(\zeta_m) = O\left(e^{\frac{\varepsilon}{|\zeta_m - 1|}}\right)$$

bei jedem $\varepsilon > 0$ gilt. Dann ist in $|\zeta| < 1$ $|\Phi(\zeta)| \leqq 1$.

Beweis: Ist $|\varphi_\nu(\zeta)| \geqq c_\nu$, $0 < c_\nu \leqq 1$, so kann man bei gegebenem $\varepsilon > 0$ jedem Punkte ϑ_ν in $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ nach Hilfssatz 2 ein Intervall $(\vartheta_\nu - \delta_\nu, \vartheta_\nu + \delta_\nu)$ so zuordnen, daß

$$\overline{\lim_{R \uparrow 1}} \int_{\vartheta_\nu - \delta_\nu}^{\vartheta_\nu + \delta_\nu} \lg \left| \frac{\varphi_\nu(Re^{i\vartheta})}{c_\nu} \right| d\vartheta \leqq \frac{\varepsilon}{2^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

---

[10]) Die Voraussetzung der Erreichbarkeit von a darf offenbar fortgelassen werden, wenn für *jeden* Punkt $e^{i\vartheta}$ bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ $\psi(g(\varrho e^{i\vartheta})) = O\left(e^{\frac{\varepsilon}{1-\varrho}}\right)$ für $\varrho \uparrow 1$ gilt. Dies ist sicher der Fall, wenn $\psi(z) = O\left(e^{\frac{\varepsilon}{|z-b|}}\right)$ für *jeden* Randpunkt b von G bei beliebiger Annäherung von z aus G an b ist, oder wenn $\psi(z)$ in G *schlicht* ist.

[11]) Für jeden festen Punkt $e^{i\vartheta_\nu}$ soll der Winkelraum fest sein; er darf aber von ν abhängen.

gilt; dabei kann δ_ν so gewählt werden, daß kein ϑ_n mit den Endpunkten des Intervalls zusammenfällt und daß ferner für $\vartheta_\nu - \delta_\nu \leqq \vartheta \leqq \vartheta_\nu + \delta_\nu$ von einem R ab $|\Phi(\zeta)| \leqq |\varphi_\nu(\zeta)|$ $(\zeta = Re^{i\vartheta})$, also auch

$$\overset{+}{\lg}|\Phi(\zeta)| \leqq \overset{+}{\lg}\frac{|\Phi(\zeta)|}{c_\nu} \leqq \overset{+}{\lg}\frac{|\varphi_\nu(\zeta)|}{c_\nu} = \lg\frac{|\varphi_\nu(\zeta)|}{c_\nu} \tag{8}$$

gilt. Da die Menge der ϑ_ν abgeschlossen ist, genügen nach Heine-Borel zur Überdeckung dieser Menge bereits endlich viele dieser Intervalle, etwa $j_1, j_2, \ldots, j_t$. Offenbar ist nach (8) und (7)

$$\sum_{k=1}^{t} \overline{\lim_{R\uparrow 1}} \int_{j_k} \overset{+}{\lg}|\Phi(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \sum_{k=1}^{t} \overline{\lim_{R\uparrow 1}} \int_{j_k} \lg\frac{|\varphi_k(Re^{i\vartheta})|}{c_k}\, d\vartheta \leqq \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Die Vereinigungsmenge $j_1 + j_2 + \ldots + j_t$ kann als Summe von endlichen vielen paarweise punktfremden Intervallen $i_1 + i_2 + \ldots + i_n = J$ dargestellt werden, wobei alle ϑ_ν innere Punkte dieser Intervalle sind. Wegen $\overset{+}{\lg}|\Phi(\zeta)| \geqq 0$ gilt dann $(0 \leqq R < 1)$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{i_\nu} \overset{+}{\lg}|\Phi(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \sum_{k=1}^{t} \int_{j_k} \overset{+}{\lg}|\Phi(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta,$$

also:

$$\overline{\lim_{R\uparrow 1}} \int_{J} \overset{+}{\lg}|\Phi(Re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \varepsilon,$$

woraus die Behauptung auf Grund des Zusatzes zum Hilfssatz 1 folgt.

Bemerkung. Dem Hilfssatz 3 entnimmt man: Es sei $P(z)$ eine in $|z| < 1$ nicht-negative harmonische Funktion, die mit eventueller Ausnahme einer höchstens abzählbaren abgeschlossenen Menge von „Unbeschränktheitspunkten" $\mathfrak{M}\{e^{i\vartheta_\nu}\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ bei allseitiger Annäherung die Randwerte 0 hat. Bei Annäherung an ein $e^{i\vartheta_\nu}$ im Winkelraum gelte: $\overline{\lim}\,(1 - |z|)\,P(z) = 0$. Dann ist $P(z) \equiv 0$. Dieses gilt auch noch, wie wir zeigen, wenn die Annahme $P(z) \geqq 0$ durch

$$\int_0^{2\pi} |P(re^{it})|\, dt \leqq C \quad (C \text{ von } r \text{ freie Konstante}) \tag{9}$$

ersetzt wird.

Umgekehrt kann aus dieser Formulierung auch Hilfssatz 3 leicht gefolgert werden. Es soll daher noch kurz ein Beweis für sie angegeben werden, der im wesentlichen auf demselben Grundgedanken beruht wie der obige, der aber den Charakter der Annahmen über die Unbeschränktheitspunkte besser zu verstehen gestattet.

Wegen (9) kann $P(z)$ durch ein Stieltjes-Poissonsches Integral mit der Belegungsfunktion $\mu(\vartheta)$ von beschränkter Variation mit

$$\mu(\vartheta) = \frac{\mu(\vartheta+0)+\mu(\vartheta-0)}{2}$$

dargestellt werden:

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\alpha)}\, d\mu(\vartheta), \qquad z = re^{i\alpha}.$$

Dabei ist für $0 \leqq \vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ $\mu(\vartheta)$ gegeben durch[12])

$$\mu(\vartheta)-\mu(\vartheta_1) = \lim_{r\uparrow 1}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta} P(re^{it})\,dt \qquad (\mu(\vartheta+2\pi) = \mu(\vartheta)+\mu(2\pi)-\mu(0)).$$

Daraus folgt, daß $\mu(\vartheta)$ in jedem von den ϑ_ν freien Intervall von $\langle 0, 2\pi\rangle$ konstant ist, so daß die Derivierten von $\mu(\vartheta)$ höchstens in den ϑ_ν von 0 verschieden sein können. Ferner ist nach der Bemerkung in § 4 über die Stetigkeitsstellen der Belegungsfunktion $\mu(\vartheta)$ an allen Stellen ϑ_ν und daher *durchweg* stetig. Als stetige Funktion, deren Derivierten höchstens auf einer abzählbaren Menge $\neq 0$ sein können, ist $\mu(\vartheta)$ nach einem bekannten Satz[13]) durchweg konstant.

Die obige Formulierung ist ferner äquivalent mit dem Satz C in [3]) von Herrn Ostrowski und ist auch implizite in seinem Beweise dieses Satzes enthalten[14]). In dem eben angegebenen Beweis hat man zugleich

[12]) Vgl. A. Ostrowski, Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie, Acta Szeged (1922), S. 80 – 87, l. c. [3]), Satz D, S. 255 f. und im Beweis von Satz D, S. 257 u., ferner Evans, Log. Potential, New York, S. 46, 47 (Lemma), A. Plessner, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Diss. Gießen, 1923. Für positive Potentiale wurde die Darstellbarkeit früher von G. Herglotz und F. Riesz bewiesen.

[13]) Siehe z. B. Hobson, Theory of functions of a real variable, I, Nr. 267.

[14]) Daß der Satz C diese Formulierung enthält, ist klar. Für die Umkehrung braucht man die Darstellbarkeit von $P(z)$ durch ein Stieltjes-Poissonsches Integral [vgl. [12])]: Schreibt man nämlich

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K\,d\mu(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K\,dt(\vartheta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K\,d\chi(\vartheta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Kt'(\vartheta)\,d\vartheta + P^*(z)$$

$$\left(K = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\alpha)},\ z = re^{i\alpha}\right),$$

wo $\mu(\vartheta) = t(\vartheta)+\chi(\vartheta)$ von beschränkter Schwankung, $t(\vartheta)$ der totalstetige, $\chi(\vartheta)$ der „singuläre" Bestandteil von $\mu(\vartheta)$ ist, so genügt $P^*(z)$ den Voraussetzungen der obigen Formulierung [vgl. hierfür l. c. [3]), S. 259], und aus dieser fo'gt $P^*(z) \equiv 0$.

auch eine neue Beweisanordnung dieses Satzes. Andererseits folgt aus dieser Äquivalenz, daß umgekehrt Hilfssatz 3 und II mit Hilfe dieses Satzes C bewiesen werden können. Wie Herr Ostrowski unter Bezugnahme auf ein Resultat von Herrn Zygmund bemerkt[15]), kann dieser Satz nicht etwa dahin verschärft werden, daß man die Menge der Unbeschränktheitspunkte als irgendeine überabzählbare Menge voraussetzt. Für jede in Frage kommende derartige Menge gibt es Gegenbeispiele. Auch dies ergibt sich bei unserem Beweisverfahren. Sei etwa $\mathfrak{M}$ eine überabzählbare in Betracht kommende Menge von Randpunkten, d. h. es gibt ein in $|z| < 1$ reguläres Potential $P(z)$, für das die Punkte von $\mathfrak{M}$ Unbeschränktheitspunkte sind und das sonst den übrigen Annahmen des Satzes C genügt. Sowohl die Teilmenge $\mathfrak{M}_+$ von $\mathfrak{M}$ derjenigen Randpunkte, in deren Umgebung $P(z)$ beliebig große positive Werte, als auch die Teilmenge $\mathfrak{M}_-$ der Peripheriepunkte, in deren Nähe $P(z)$ absolut beliebig große negative Werte annimmt, ist abgeschlossen. Da $\mathfrak{M}$ nicht abzählbar ist, enthält also mindestens eine der beiden Mengen $\mathfrak{M}_+$ oder $\mathfrak{M}_-$ eine perfekte Teilmenge $\mathfrak{M}_1$, etwa $\mathfrak{M}_+$. In dieser gibt es dann auch eine perfekte (in $\langle 0, 2\pi\rangle$ nirgends dichte) Teilmenge $\mathfrak{M}^*$ vom Maße 0[16]).

[15]) l. c.[3]), S. 255, Fußnote 53.

[16]) Falls $\mathfrak{M}_1$ in $\langle 0, 2\pi\rangle$ nirgends dicht liegt, bedarf dies vielleicht noch eines Beweises. Sei $\langle a, b\rangle$ das kleinste Intervall aus $\langle 0, 2\pi\rangle$, in dem $\mathfrak{M}_1$ liegt; a und b gehören also zu $\mathfrak{M}_1$. Man entferne nun aus (a, b) ein (mitsamt den Eckpunkten) im Innern von (a, b) gelegenes offenes Intervall der Länge $\alpha_1 \geqq \frac{b-a}{3} = \frac{l}{3}$, wobei man dieses so wählen kann und soll, daß seine Endpunkte zu $\mathfrak{M}_1$ gehören und (auch) Häufungspunkte von *außerhalb* dieses Intervalls gelegenen Punkten von $\mathfrak{M}_1$ sind. Aus jedem der beiden Restintervalle entferne man wieder je ein (mitsamt den Endpunkten) dem Innern dieser Intervalle angehörendes offenes Intervall von mindestens $\frac{1}{3}$-facher Länge, dessen Endpunkte die gleiche Eigenschaft haben. Für die Längensumme α_2 dieser beiden Intervalle gilt also $\alpha_2 \geqq \frac{1}{3}(l - \alpha_1)$. Indem man nun nach diesem im wesentlichen von der Konstruktion der nirgends dichten perfekten Cantorschen Menge her bekannten Prinzip fortfährt, bekommt man offenbar eine perfekte Teilmenge $\mathfrak{M}^*$ von $\mathfrak{M}_1$. Diese hat das Maß 0, wenn gezeigt wird, daß die Gesamtlänge der herausgenommenen Intervalle gleich l ist. Da $\alpha_1 \geqq \frac{l}{3}$, $\alpha_2 \geqq \frac{1}{3}(l - \alpha_1), \ldots$, die Längensumme der beim n-ten Schritt ($n \geqq 2$) entfernten Intervalle $\alpha_n \geqq \frac{1}{3}(l - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1})$ ist, folgt durch Addition, wenn $\alpha_0 = 0$ gesetzt wird,

$$\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \geqq \frac{nl}{3} - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n-\nu}{3}\alpha_\nu, \quad \frac{3}{n}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu + \sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu \geqq l + \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n}\nu\alpha_\nu \geqq l,$$

und daraus wegen $\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu \leqq l$ mit $n \to \infty$: $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha_\nu = l$.

Nun kann man eine in $\langle 0, 2\pi\rangle$ nicht abnehmende, stetige, aber *nicht* totalstetige Funktion $\mu(\vartheta)$ konstruieren, die in allen, zu $\mathfrak{M}^*$ bezüglich $\langle 0, 2\pi\rangle$ komplementären (offenen) Intervallen konstant ist[17]). Setzt man dann

$$p(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\alpha)}\, d\mu(\vartheta), \qquad z = re^{i\alpha},$$

so hat $P(z)+p(z)$ Unbeschränktheitspunkte genau in $\mathfrak{M}$ und genügt im übrigen den Annahmen des Satzes [siehe l. c.[12]), Satz D und unsere Bemerkung in § 4 über die Stetigkeitsstellen der Belegungsfunktion] und ist sicher nicht durch ein Poissonsches Integral darstellbar, weil $\mu(\vartheta)$ nicht totalstetig ist. Also ist $P(z)+p(z)$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehörendes Gegenbeispiel.

Damit ist auch gezeigt, daß die obige Formulierung und somit Hilfssatz 3 nicht dahin verbessert werden können, daß etwa $\mathfrak{M}$ durch eine überabzählbare Menge ersetzt wird. Daraus ergibt sich weiter, daß auch IV nicht mehr richtig zu sein braucht, wenn der „Ausnahmepunkt" a als ein erreichbarer Randpunkt von überabzählbarer Vielfachheit vorausgesetzt wird.

§ 4.

Bemerkung über die Voraussetzung $|\varphi(z)| \geqq c$ in Satz II.

Satz II bleibt richtig, wenn man die Voraussetzung $|\varphi(z)| \geqq c > 0$ durch die folgende ersetzt:

$$\varphi(z) \neq 0 \text{ in } |z|<1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \overset{+}{\lg} \frac{1}{|\varphi(re^{i\vartheta})|}\, d\vartheta < C, \quad 0 \leqq r < 1. \tag{2}$$

(Nach einer Bemerkung von Herrn Ostrowski[18]) folgt daraus, daß auch $\int_{-\pi}^{\pi} |\lg|\varphi(Re^{i\vartheta})||\, d\vartheta <$ Const. für alle R mit $0 \leqq R < 1$ bleibt.) Entsprechendes gilt für den Hilfssatz 3. — Dies ergibt sich daraus, daß man ein in $r<1$ reguläres Potential $P(re^{i\vartheta})$ mit $\int_{-\pi}^{\pi} |P(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta < C$ $(0 \leqq r < 1)$ durch ein Stieltjes-Poissonsches Integral mit einer Belegungsfunktion

[17]) Vgl. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, S. 579, Satz 12, insbesondere auch den letzten Teil dieses Satzes.

[18]) Siehe z. B. l. c. [3]), S. 261.

von beschränkter Schwankung darstellen kann, sowie aus der folgenden weiteren Tatsache.

Notwendig und hinreichend, damit die Belegungsfunktion $\mu(\vartheta)$ *von beschränkter Schwankung* $(-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi)$ *in dem durch* $(z = re^{i\alpha})$

$$P(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, \vartheta - \alpha)\, d\mu(\vartheta),$$

$$K(r, \vartheta - \alpha) \equiv \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \alpha)} = \frac{1 - r^2}{|z - e^{i\vartheta}|^2}$$

gegebenen in $|z| < 1$ *regulären Potential in* $\vartheta = \alpha_0$ *stetig ist, ist* $\lim P(z)(1 - |z|) = 0$ *für* $z \to e^{i\alpha_0}$ *im Winkelraum. Hinreichend ist bereits* $\underline{\lim}\,(1 - |z|) P(z) = 0$ für solche z.

Beim Beweise[19]) darf man $\alpha_0 = 0$ annehmen. Daß die Bedingung *notwendig* ist, sogar bei beliebiger allseitiger Annäherung an $e^{i\alpha_0}$, folgt aus:

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K(r, \vartheta - \alpha)\, d\mu(\vartheta) + O\left(\frac{1 - r^2}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\right)$$

$$0 < \delta < \pi.$$

Da nämlich mit $\mu(\vartheta)$ auch ihre Totalschwankung $M(\vartheta)$ in $\langle -\pi, \vartheta\rangle$ in $\vartheta = 0$ stetig ist, gilt also

$$(1 - r)\,|P(z)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{(1 - r)^2(1 + r)}{(1 - r)^2}\, dM(\vartheta) + O\left(\frac{1 - r^2}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\right)$$

$$\leqq \frac{1}{\pi}\,(M(\delta) - M(-\delta)) + O\left(\frac{1 - r^2}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\right),$$

woraus die Behauptung abzulesen ist.

---

[19]) Die hier zum Beweise dieses Satzes benutzten Umformungen gehen im wesentlichen auf ähnliche Überlegungen von Herrn Ostrowski beim Beweise des Satzes C (S. 259 u.) und des Hilfssatzes 2 (S. 205) seiner Arbeit [3]) zurück. Indessen wird unser Satz dort nicht formuliert. Es wird einerseits beim Beweise von Satz C gezeigt, daß im wesentlichen die obige Bedingung hinreichend ist, damit $\mu(\vartheta)$ in $\vartheta = \alpha$ stetig ist, falls $\mu(\vartheta)$ in einer Umgebung rechts und links von α konstant ist, und andererseits, daß dieselbe notwendig ist für alle ϑ, wenn $P(re^{i\vartheta})$ durch ein Poissonsches Integral darstellbar ist. (Dann ist $\mu(\vartheta)$ sogar totalstetig.) — Übrigens ist unser Hilfssatz 2 ein Spezialfall des zweiten Teiles des im Texte genannten Satzes.

Daß nun umgekehrt sogar $\lim P(z)(1-|z|) = 0$ für $z \to 1$ in einem festen Winkelraum hinreichend ist, folgt jetzt so:

$$P(z) = \frac{1-r^2}{2\pi|1-z|^2}\{\mu(+0)-\mu(-0)\} + \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=-\pi}^{-0} K(r,\vartheta-\alpha)\,d\mu(\vartheta)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta=+0}^{\pi} K(r,\vartheta-\alpha)\,d\mu(\vartheta),$$

oder wenn $m = \mu(+0)-\mu(-0)$, $\mu^*(\vartheta) = \mu(\vartheta)$ für $-\pi \leqq \vartheta < 0$, $\mu^*(\vartheta) = \mu(\vartheta) - m$ für $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ gesetzt wird, also $\mu^*(\vartheta)$ in $\vartheta = 0$ stetig ist,

$$(10)\quad P(z)(1-r) = m\frac{(1-r)^2(1+r)}{2\pi|1-z|^2} + \frac{1-r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(r,\vartheta-\alpha)\,d\mu^*(\vartheta).$$

Unter Benutzung des bereits bewiesenen Teiles folgt hieraus $m = 0$[20]. —

Hat nun $\varphi(z)$ die Eigenschaften (2), so gibt es zwei in $\langle -\pi, \pi\rangle$ nicht abnehmende Funktionen $\mu_1(\vartheta)$, $\mu_2(\vartheta)$, so daß in $|z| = |re^{i\alpha}| < 1$

$$\lg|\varphi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(r,\vartheta-\alpha)\,d\mu_1(\vartheta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(r,\vartheta-\alpha)\,d\mu_2(\vartheta)$$

gilt. Durch Subtraktion der „Sprungfunktion" $s(\vartheta) = 0$ für $-\pi \leqq \vartheta < 0$, $s(\vartheta) = \mu_1(+0)-\mu_1(-0)$ für $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ von $\mu_1(\vartheta)$ und $\mu_2(\vartheta)$ und eventuell Änderung von $\mu_1(0)$ kann man erreichen, daß $\mu_1(\vartheta) - s(\vartheta) = \bar{\mu}_1(\vartheta)$ monoton bleibt und in $\vartheta = 0$ stetig wird. Die Monotonie von $\bar{\mu}_2(\vartheta) = \mu_2(\vartheta) - s(\vartheta)$ könnte in $\vartheta = 0$ gestört sein, wenn nämlich $\bar{\mu}_2(+0) - \bar{\mu}_2(-0) = \bar{m} < 0$ ist. Nimmt man nun die Bedingung (1) von II für $\varphi(z)$ dazu, so ist dies nicht der Fall. Denn wegen $(1-r_\nu)\log|\varphi(z_\nu)| \leqq \varepsilon$ für z_ν in einem festen Winkelraum ergibt sich

$$(1-r_\nu)\int_{-\pi}^{\pi} K(r_\nu,\vartheta-\alpha_\nu)\,d\bar{\mu}_1(\vartheta) \leqq 2\pi\varepsilon + (1-r_\nu)\int_{-\pi}^{\pi} K(r_\nu,\vartheta-\alpha_\nu)\,d\bar{\mu}_2(\vartheta)$$

$$= 2\pi\varepsilon + (1+r_\nu)\frac{(1-r_\nu)^2}{|1-z_\nu|^2}\bar{m} + (1-r_\nu)\int_{-\pi}^{\pi} K(r_\nu,\vartheta-\alpha_\nu)\,d\mu_2^*(\vartheta).$$

---

[20]) Aus (10) folgt allgemeiner: $\lim_{r\uparrow 1} P(r)(1-r)$ existiert stets und ist $= \frac{m}{\pi}$ (vgl. den Beweis des Wolffschen Satzes von R. Nevanlinna, C. R. 188, S. 1027—1029).

wo $\mu_2^*(\vartheta)$ in $\vartheta = 0$ stetig ist. Daher folgt mit $z_\nu \to 1$ wegen der Willkür von ε $\overline{m} \geqq 0$.

Es ist also, da $\overline{\mu}_2(\vartheta)$ nicht abnimmt,

$$\lg|\varphi(z)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K(r, \vartheta - \alpha)\, d\,\overline{\mu}_1(\vartheta) = P(z) \geqq 0.$$

Zu $P(z)$ gibt es ein in $|z| < 1$ reguläres $\varphi_1(z)$ mit

$$|\varphi(z)| \leqq |\varphi_1(z)| = e^{P(z)} \geqq 1,$$

für das wegen der Stetigkeit von $\overline{\mu}_1(\vartheta)$ in $\vartheta = 0$

$$|\varphi_1(z)| \leqq e^{\frac{\varepsilon}{|1-z|}}$$

bei Annäherung im festen Winkelraum gilt. Daraus folgt die Behauptung am Anfang diesen Paragraphen.

(Eingegangen am 26. April 1933.)

Bemerkung zur vorstehenden Note von Herrn S. Warschawski.

Von

A. Ostrowski in Basel.

1. Herr S. Warschawski hat in seiner Abhandlung: Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung [Math. Zeitschr. **35** (1932), S. 376ff., Hilfssatz 10] einen wichtigen Satz aufgestellt, der sich folgendermaßen formulieren läßt:

I. *Es sei Γ eine geschlossene Jordankurve in der z-Ebene, z_1 ein Punkt auf Γ, $f(z)$ eine im Innern G von Γ reguläre und auf $G+\Gamma$ bis eventuell auf z_1 stetige Funktion. Gilt nun für alle $z \neq z_1$ auf Γ $|f(z)| \leqq \Omega$, und ist für gegen z_1 aus dem Innern von G konvergierende z $f(z) = O\left(\frac{1}{(z-z_1)^{\alpha}}\right)$ für ein positives α, so gilt $|f(z)| \leqq \Omega$ auch im ganzen Innern von G.*

In der vorstehenden Arbeit beweist Herr Warschawski diesen Satz mit Hilfe eines neuartigen Satzes aus dem Phragmén-Lindelöfschen Ideenkreis. Der Beweis von Herrn Warschawski zeichnet sich insbesondere durch seinen elementaren Charakter aus — bei ihm wird weder das Lebesguesche Integral, noch der Fatousche Satz über die Existenz der Randwerte einer beschränkten Funktion benutzt. Gleichwohl ist es vielleicht von Interesse, darauf hinzuweisen, daß der Satz von Herrn Warschawski sich in einigen Zeilen aus den beiden folgenden bereits bekannten Sätzen herleiten läßt:

II. *Es sei $P(r,\vartheta)$ der Logarithmus des absoluten Betrages einer im Einheitskreise $0 \leqq r < 1$, $-\pi \leqq \vartheta < \pi$ regulären Funktion $F(z)$, für die dort $P(r,\vartheta) < C$ gilt. Dann besitzt $P(r,\vartheta)$ für $r \uparrow 1$ für fast alle ϑ Randwerte $f(\vartheta)$, die eine nach Lebesgue integrable Funktion bilden, und es gilt für $0 \leqq r < 1$ die Ungleichung:*

$$P(r,\vartheta) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2) f(\varphi)\, d\varphi}{r^2 - 2r\cos(\vartheta-\varphi)+1}. \quad (1)$$

[1]) Vgl. A. Ostrowski, Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für die komplexe Funktionentheorie, Acta univ. Szeged, Bd. I (1923), S. 80—87, wo die Ungleichung (1) für noch allgemeinere Funktionsklassen bewiesen wird. Die Integrabilität von $f(\varphi)$ ist in einem Satze von Szegö enthalten.

III. *Ist $z = g(\zeta)$ eine Funktion, die das Innere eines schlichten einfach zusammenhängenden im Endlichen liegenden Gebietes G so auf das Innere des Einheitskreises der ζ-Ebene konform abbildet, daß dabei ein Randpunkt z_1 von G in $\zeta = 1$ übergeht; ist ferner der Punkt z_1 und ebenso der unendlich ferne Punkt, falls er ein Randpunkt von G ist, ein Randpunkt von höchstens abzählbarer Mehrfachheit, so läßt sich $\lg|g(\zeta) - g(1)|$ durch das Poissonsche Integral darstellen, dessen Belegung die Randfunktion von $\lg|g(\zeta) - g(1)|$ ist* ($\zeta = re^{i\vartheta}$):

$$\lg|g(\zeta) - g(1)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\lg|g(e^{i\vartheta}) - g(1)|}{r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi) + 1}\, d\varphi^{2}). \tag{2}$$

2. Beweis von I. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $\Omega = 1$ vorausgesetzt werden. Es sei $z = g(\zeta)$ die Abbildungsfunktion von G auf $|\zeta| < 1$, und es sei $z_1 = g(1)$. Es sei ferner $f^*(\zeta) = f(g(\zeta))$, und $F(\zeta) = f^*(\zeta)(g(\zeta) - g(1))^{\alpha}$. Dann gilt nach II für $F(\zeta)$, $\zeta = re^{i\vartheta}$ gesetzt, die Ungleichung

$$\lg|F(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\,\psi(\varphi)\,d\varphi}{r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi) + 1}, \tag{3}$$

wo $\psi(\varphi)$ die für fast alle φ existierende Randfunktion von $\lg|F(re^{i\varphi})|$ ist. Anderseits gilt für $g(\zeta)$ die Gleichung (2). Ziehen wir (2) nach Multiplikation mit α von (3) ab, so ergibt sich die Ungleichung

$$\lg|f^*(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\psi(\varphi) - \alpha\lg|g(e^{i\varphi}) - g(1)|)}{r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi) + 1}(1-r^2)\,d\varphi. \tag{4}$$

Hier ist aber $\psi(\varphi) - \alpha\lg|g(e^{i\varphi}) - g(1)|$ als Logarithmus der Randwerte von $|f^*(\zeta)|$, d. h. von $|f(z)|$ nach Voraussetzung nicht positiv, so daß $|f^*(\zeta)| = |f(z)| \leqq 1$ folgt, w. z. b. w.

3. Die Ungleichung (1) des Satzes II läßt sich unmittelbar aus dem bekannten Fatouschen Hilfssatz herleiten: *Wenn eine Folge von nicht negativen beschränkten Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... für fast alle x aus dem Intervall von $-\pi$ bis π gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert und wenn die Integrale*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\,dx$$

für alle n gleichmäßig nach oben beschränkt sind, so ist auch $f(x)$ integrabel und es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \leqq \varliminf \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\,dx.$$

---

[2]) Vgl. A. Ostrowski, Über quasianalytische Funktionen und Beschränktheit asymptotischer Entwicklungen, Acta math., Bd. 53 (1930), S. 181—266, insb. Satz B a. p. 254, der noch etwas allgemeiner ist.

Denn offenbar darf beim Beweis von II $C = 0$ vorausgesetzt werden. Dann gilt aber bekanntlich für $0 \leqq r < R < 1$ die Ungleichung

$$P(r, \vartheta) \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r^2)\, P(R, \varphi)\, d\varphi}{r^2 - 2rR\cos(\vartheta - \varphi) + R^2},$$

die sich z. B. aus der Jensenschen Ungleichung ergibt, wenn dort der Nullpunkt in den Punkt (r, ϑ) durch eine Kreisabbildung übergeführt wird. Ist $F(z)$ $(z = re^{i\vartheta})$ die im Einheitskreis reguläre Funktion mit dem Realteil $P(r, \vartheta)$, so ist $e^{F(z)}$ im Einheitskreis beschränkt und besitzt daher nach dem bekannten Fatouschen Satz für fast alle ϑ Randwerte. Daher besitzt auch $P(r, \vartheta)$ für fast alle ϑ für $r \uparrow 1$ eine (offenbar meßbare) Randfunktion $f(\vartheta)$. Wendet man den Fatouschen Hilfssatz auf

$$f_n(\varphi) = \frac{(r^2 - R_n^2)\, P(R_n, \varphi)}{r^2 - 2rR_n\cos(\vartheta - \varphi) + R_n^2}$$

für $R_n = 1 - \frac{1}{n}$ an, so ergibt sich die Existenz des Integrals auf der rechten Seite von (1) und zugleich die Ungleichung (1), w. z. b. w.

Bemerkung: Aus dem Satze II folgt ohne weiteres die bekannte Tatsache, daß, wenn $P(r, \vartheta)$ im Einheitskreise absolut genommen gleichmäßig beschränkt ist, in (1) das Gleichheitszeichen gilt. — Denn dann läßt sich (1) sowohl auf $P(r, \vartheta)$, als auch auf $-P(r, \vartheta)$ anwenden.

Offenbar bleibt unser Beweis des Satzes I gültig, wenn Γ als die Berandung eines beliebigen einfach zusammenhängenden Gebietes mit mehr als einem Randpunkt vorausgesetzt wird, für den der Punkt z_1 ein Randpunkt von höchstens abzählbarer Mehrfachheit ist. Ebenso darf die Voraussetzung der Stetigkeit durch die Annahme ersetzt werden, daß $\overline{\lim}\,|f(z)| \leqq \Omega$ bei allseitiger Annäherung an jeden von z_1 verschiedenen Punkt von Γ aus dem Innern von G gilt.

(Eingegangen am 26. April 1933.)

On a certain class of ovals*).

By

P. Ganapathi, Annamalainagar.

B. Su defines the *curvature-axis*[1]) of an oval as that straight line in the plane about which the moment of inertia of the oval is least, when it is loaded with material of density equal to the curvature. He proves that the curvature-axes of an oval and its parallel curves are concurrent at their common Steiner curvature-centroid, and that they become one and the same straight line when and only when

$$\int_0^{2\pi} \varrho \cos 2\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \varrho \sin 2\varphi \, d\varphi = 0, \tag{1}$$

where ϱ denotes, as usual, the radius of curvature at a point of the oval and φ the angle made by the corresponding tangent at the point with a fixed straight line. We shall give two interesting properties of such ovals. For brevity, we shall call an oval a *Su oval* if it satisfies equations (1).

Theorem I. *A Su oval whose curvature has a continuous derivative has at least six vertices, and all its vertices cannot lie on a conic.*

From equations (1), we deduce that, for a Su oval,

$$\oint (a x^2 + 2 h x y + b y^2 + 2 g x + 2 f y + c) \frac{d k}{d s} \, d s = 0, \tag{2}$$

where a, h, b, g, f and c are any arbitrary constants, and $k = \frac{1}{\varrho}$. For

$$\oint x^2 \frac{d k}{d s} \, d s = -2 \oint k x \frac{d x}{d s} \, d s = -2 \oint x \frac{d^2 y}{d s^2} \, d s.$$

$$= 2 \oint \frac{d x}{d s} \frac{d y}{d s} \frac{d s}{d \varphi} \, d \varphi = \int_0^{2\pi} \varrho \sin 2\varphi \, d \varphi = 0.$$

*) This investigation was carried out by me as a research student of the Annamalai University and is published with the permission of the University Authorities.

[1]) B. Su. On the curvature-axis of a convex closed curve. Science Reports of the Tohoku Imperial University, Vol. 17 (1928).

Similarly

$$\oint y^2 \frac{dk}{ds} ds = 0.$$

And

$$\oint xy \frac{dk}{ds} ds = -\oint k(xy' + yx') ds = \oint (xx'' - yy'') ds$$

$$= -\oint (x'^2 - y'^2) \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = -\int_0^{2\pi} \varrho \cos 2\varphi \, d\varphi = 0.$$

Also for any oval[2])

$$\oint (2gx + 2fy + c) \frac{dk}{ds} ds = 0.$$

Now every oval has at least 4 vertices and if a Su oval has just 4 vertices, we draw a pair of lines passing through them and express the equation of the pair of straight lines in the form

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Hence if (x, y) is a point on the Su oval, the expressions $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ and $\frac{dk}{ds}$ change signs at and only at each of the four vertices so that their product preserves the same sign for all the points of the oval, and the integral

$$\oint (ax^2 + \ldots + c) \frac{dk}{ds} ds$$

cannot, therefore, vanish. This leads to an absurdity on account of (2).

We find, therefore, that under the conditions specified, *the Su oval has at least six vertices.*

If all the vertices of the Su oval lie on a conic, let the equation of the conic be

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0;$$

then we are led to same absurdity as before, for the integral

$$\oint (Ax^2 + \ldots + C) \frac{dk}{ds} ds$$

cannot vanish, contradicting (2). Hence Theorem I.

Cor. *A curve of constant breadth is also a Su oval and hence has at least six vertices. All its vertices cannot lie on a conic.*

Theorem II. *On a Su oval there are at least four pairs of opposite points such that the sum of the radii of curvature at each pair is an extremum.*

[2]) Vide Blaschke, Diff. Geometrie I, p. 31.

The vector region of a Su oval is also a Su oval and has radius of curvature $\varrho + \varrho'$. Since a Su oval has at least six vertices, the vector region also has six vertices; but being a central curve it cannot have six vertices only. Hence the vector region has at least 8 vertices, and there are, therefore, at least 4 pairs of points on a Su oval at which $\varrho + \varrho'$ is an extremum.

Theorem III. *A Su oval with continuous curvature has at least three squares circumscribed to it.*

For a Su oval, we have

$$0 = \int_0^{2\pi} \varrho(\varphi) \cos 2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \{\varrho(\varphi) + \varrho(\varphi + \pi)\} \cos 2\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\mu + \frac{d^2\mu}{d\varphi^2}\right) \cos 2\varphi \, d\varphi,$$

where μ is the breadth of the oval.

Since

$$\int_0^{\pi} \frac{d^2\mu}{d\varphi^2} \cos 2\varphi \, d\varphi = -4 \int_0^{\pi} \mu \cos 2\varphi \, d\varphi,$$

we have,

$$0 = \int_0^{\pi} \mu(\varphi) \cos 2\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right] \cos 2\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} D(\varphi) \cos 2\varphi \, d\varphi,$$

where $$D(\varphi) \equiv \mu(\varphi) - \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

(3) $$0 = \int_0^{\pi/4} \left[D(\varphi) \cos 2\varphi - D\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \sin 2\varphi\right] d\varphi.$$

Now every oval has at least one square circumscribed to it, and at a point of contact $\mu(\varphi) = \mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ or $D(\varphi) = 0$. We may choose the initial line such that $D\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. If $D(\varphi)$ has no other zero in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

let us suppose that $D(\varphi) > 0$ in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ and consequently < 0 in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Now $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$ are both positive in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, hence the expression under the integral sign in (3) is positive throughout the interval of integration, and the integral cannot, therefore, vanish. This contradicts (3). Hence there must be at least one zero of $D(\varphi)$ in $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ say, and obviously this cannot be $D(0)$, since this will not remove the contradiction. Let, therefore, $D(\varphi_1) = 0$ $\left(0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{4}\right)$ and let $D(\varphi_1 - \varepsilon) < 0$, $D(\varphi_1 + \varepsilon) > 0$.

Case 1. $D(\varepsilon') > 0$. There is one change of sign of $D(\varphi)$ in $(\varepsilon', \varphi_1 - \varepsilon)$ and hence one zero of $D(\varphi)$ in $(0, \varphi_1)$.

Case 2. $D(\varepsilon') < 0$. Then $D\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon'\right) > 0$, while $D\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon''\right) < 0$. ($\varepsilon$, ε', ε'' arbitrarily small and positive.) Hence there must be at least one change of sign in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \varepsilon'\right)$. Hence in any case there are at least 3 zeros of $D(\varphi)$ in $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ and consequently three circumscribed squares for a Su oval[3]).

[3]) This method is analogous to that of Süss, Jahresber. d. D. Math. Ver. 33 (2 Abt.), S. 32. The proof may be simplified further if we remember that an oval has always an odd number of squares circumscribed to it. (See '*A note on the oval*' by the author in this volume of *Math. Zeitschr.*)

(Eingegangen am 5. Mai 1933.)

The Isoperimetric Deficit of a Convex Closed Curve*).

By

P. Ganapathi, Annamalainagar.

§ 1.

The Vector region of a Convex Closed Curve.

If all the vectors, whose extremities lie within a plane, convex, closed curve C, are displaced parallel to themselves so as to pass through a fixed point O, they cover a region W, whose boundary R is a convex closed curve with O as centre. W is called the vector region of the curve C.

We shall first consider a curve C which has a finite curvature at every point of it. For convenience we shall take O inside C. Let p, p' be the lengths of the perpendiculars from O on parallel tangents (or parallel *Stützgeraden*) of C, $\bar{p}$ the length of the perpendicular from O on a parallel tangent of R, φ the angle that these tangents make with a fixed initial line. Then we easily deduce that

$$\bar{p} = p + p'. \tag{1}$$

Let $L(C), F(C)$ be the perimeter and area of C and let $L(R), F(R)$ be the corresponding magnitudes for R. Then

$$L(C) = \int_0^{2\pi} p \, d\varphi,$$

and

$$L(R) = \int_0^{2\pi} \bar{p} \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (p + p') \, d\varphi = 2 L(C). \tag{2}$$

Also by a formula of Blaschke[1]),

$$F(C) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ p^2 - \left(\frac{dp}{d\varphi} \right)^2 \right\} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ p'^2 - \left(\frac{dp'}{d\varphi} \right)^2 \right\} d\varphi,$$

*) This investigation was conducted by me as a research student of the Annamalai University and is published with the permission of the University Authorities.

[1]) W. Blaschke, Beweis zu Sätzen von Brunn und Minkowski, Jahresber. d. D. Math. Ver. **23** (1914).

and

$$F(R) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\bar{p}^2 - \left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2\right\} d\varphi$$

$$F(R) - 4F(C) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\bar{p}^2 - \left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2\right\} d\varphi$$

$$- \int_0^{2\pi} \left\{p^2 - \left(\frac{dp}{d\varphi}\right)^2\right\} d\varphi - \int_0^{2\pi} \left\{p'^2 - \left(\frac{dp'}{d\varphi}\right)^2\right\} d\varphi,$$

and this reduces, by (1), to

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{dp}{d\varphi} - \frac{dp'}{d\varphi}\right)^2 - (p-p')^2\right\} d\varphi.$$

Now by a Lemma of Wirtinger[2]), if $f(\varphi)$ is a function of period 2π which possesses a derivative of finite variation and if

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0,$$

then

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)^2\, d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} f'(\Phi)^2\, d\Phi,$$

and the equality holds only when $f(\varphi)$ is of the form $a\cos\varphi + b\sin\varphi$. When $f(\varphi) = p - p'$ it satisfies the conditions of the lemma. Therefore,

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{dp}{d\varphi} - \frac{dp'}{d\varphi}\right)^2 - (p-p')^2\right\} d\varphi \geqq 0$$

and the equality holds only when C has a centre[3]). Hence,

$$F(R) - 4F(C) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{dp}{d\varphi} - \frac{dp'}{d\varphi}\right)^2 - (p-p')^2\right\} d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \left\{\left(\frac{dp}{d\varphi} - \frac{dp'}{d\varphi}\right)^2 - (p-p')^2\right\} d\varphi.$$

[2]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, p. 105.

[3]) This result has been proved independently by Rademacher, Jahresber. d. D. Math. Ver. 34 (1925).

Now the locus of the midpoints of diameters of C, viz. the medial locus M is a closed curve such that the tangent at any point of it is parallel to the corresponding tangents of C, and in which the tangent returns to its original position after turning through the angle π. Hence if p^* is the length of the perpendicular from O on the corresponding tangent of the medial M,

$$p^* = \frac{1}{2}(p - p')$$

and the area of the medial M may be defined as the *positive* expression

$$F(M) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left\{\left(\frac{d\,p^*}{d\,\varphi}\right)^2 - p^{*2}\right\} d\,\varphi$$

and we have

$$F(R) - 4F(C) = 4\int_0^{\pi} \left\{\left(\frac{d\,p^*}{d\,\varphi}\right)^2 - p^{*2}\right\} d\,\varphi = 8F(M). \tag{3}$$

The formulae (2) and (3) can be extended to include any convex closed curve C in a plane.

We have thus found expressions for the perimeter and area of the vector region in terms of those of C and M.

§ 2.

A new isoperimetric inequality.

Now R is a convex closed curve with a centre; and if D and Δ be the maximum and minimum diameters of C, the least circle enclosing R is of radius D and the greatest circle enclosed by R is of radius Δ. Hence by Bonnesen's[4]) inequality,

$$\frac{L(R)^2}{4\pi} - F(R) \geqq (D - \Delta)^2$$

where the equality holds only when R is a circle, *i. e.* when C is a curve of constant breadth. From (2) and (3)

$$\frac{L(C)^2}{\pi} - 4F(C) - 8F(M) \geqq (D - \Delta)^2$$

where the equality holds only when C is of constant breadth. *Hence we have the new inequality for the isoperimetric deficit of a curve C:*

$$\frac{L^2}{4\pi} - F \geqq 2F(M) + \frac{(D - \Delta)^2}{4}, \tag{4}$$

---

[4]) Bonnesen, Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren, Math. Ann. **91** (1924).

where L, F are the perimeter and area, $F(M)$ the area of the medial and D, Δ the maximum and minimum diameters of C. The equality holds when and only when the curve is of constant breadth.

§ 3.

The isoperimetric deficit of an oval of constant breadth.

When an oval is of constant breadth, we have, therefore,

$$\frac{L^2}{4\pi} - F = 2F(M). \tag{5}$$

Thus *the isoperimetric deficit of an oval of constant breadth is twice the area of the medial locus of the curve.*

Cor. By a theorem of Blaschke, among all curves of the same constant breadth b, the Realeaux triangle has the least area. Hence from (5), we see that among all curves of the same constant breadth b, *the medial locus has a maximum area for the Realeaux triangle of the same breadth.*

(Eingegangen am 5. Mai 1933.)

Über die automorphen Transformationen beschränkter nicht-singulärer hermitescher Formen.

Von

Aurel Wintner in Baltimore.

Im nachstehenden sollen die Resultate einer früheren Arbeit[1]) auf diejenigen beschränkten nicht-singulären Matrizen L angewandt werden, die die zu einer gegebenen beschränkten nicht-singulären hermiteschen Matrix H gehörige Form invariant lassen. In der Matrizensymbolik besagt dies

$$L^* H L = H, \qquad H = H^*, \tag{1}$$

wobei A^* die komplex-konjugierte Matrix der Transponierten A' von A bezeichnet. Dabei heißt eine beschränkte Matrix nicht-singulär, wenn sie im Toeplitzschen Sinne genau eine beschränkte Reziproke hat.

Im Falle endlicher Matrizen folgt aus dem Bestehen von (1) und aus der Existenz von H^{-1}

$$|\det L|^2 \det H = \det H \neq 0,$$

also

$$|\det L| = 1 \neq 0,$$

so daß die Existenz von L^{-1} eine Folge der übrigen Annahmen ist. Für unendliche beschränkte Matrizen gilt dies aber nicht. Wählen wir nämlich H gleich der Einheitsmatrix, so ist (1) durch

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

[1]) Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 254—263.

befriedigt, obwohl diese Toeplitzsche Matrix L bekanntlich *nicht* nicht-singulär ist.

Jede der Beziehung (1) genügende beschränkte nicht-singuläre Matrix L wollen wir eine H-unitäre Matrix nennen. Bezeichnet E die Einheitsmatrix, so sind die E-unitären Matrizen offenbar die unitären Matrizen in dem üblichen Sinne des Wortes. Die H-unitären Matrizen sind also die Drehungen desjenigen komplexen pseudoeuklidischen Raumes mit unendlich vielen Dimensionen, dessen Grundfläche nicht durch E, sondern durch die im allgemeinen *indefinite* Matrix H festgelegt ist. Man rechnet auf Grund von (1) und unter Benutzung der Hilbertschen Faltungssätze leicht nach, daß das Produkt zweier H-unitären Matrizen sowie die Reziproke einer solchen wieder H-unitär sind, d. h. daß die H-unitären Matrizen, im Einklang mit der Deutung von (1) als eine Transformation der *Form* H in sich, eine Gruppe bilden.

Eine Matrix heißt eine polare Matrix und soll mit F bezeichnet werden, wenn sie eine Diagonalmatrix ist, die in ihrer Diagonale keine von $+1$ und -1 verschiedene Zahl enthält. Eine solche Matrix ist stets beschränkt, nicht-singulär und hermitesch,

$$F = F^{-1} = F^*. \tag{2}$$

A. a. O. ist gezeigt worden, daß zu jeder beschränkten nicht-singulären hermiteschen Matrix H beschränkte nicht-singuläre Matrizen T derart bestimmt werden können, daß

$$T^* H T = F \tag{3a}$$

wird, wobei die polare Matrix F bis auf Permutationen ihrer Diagonalelemente durch H allein bestimmt ist. Andererseits folgt aus (1) für jede beschränkte nicht-singuläre Matrix T

$$K^*(T^* H T)K = (T^* H T) \quad \text{mit} \quad K = T^{-1} L T \tag{3b}$$

und umgekehrt. Demnach ist es erlaubt, an Stelle von H-unitären Matrizen nur F-unitäre Matrizen zu betrachten, wobei F irgendeine fest gewählte polare Matrix ist. Die Matrix F selbst ist eine F-unitäre Matrix, da

$$L^* F L = F \tag{4}$$

durch $L = F$ wegen (2) befriedigt wird. Daraus folgt, daß zugleich mit L auch L^* eine F-unitäre Matrix ist. Denn L^* kann mit Rücksicht auf (4) als Produkt dreier Matrizen dargestellt werden, die Elemente der F-unitären Gruppe sind.

A. a. O. ist in Weiterführung einer aus der Kinematik der Kontinua bekannten Tatsache bewiesen worden, daß jede beschränkte nicht-singuläre Matrix M auf genau eine Weise in der Gestalt $M = PU$ geschrieben werden kann, wobei P und U beschränkt und nicht-singulär sind, P eine hermitesche positiv-definite und U eine E-unitäre Matrix ist. Diese durch M eindeutig bestimmten Matrizen P, U können als die Polarkomponenten von M bezeichnet werden, obwohl sie im allgemeinen nicht vertauschbar sind. Es soll nun bewiesen werden, *daß beide Polarkomponenten jeder F-unitären Matrix F-unitär sind* in bezug auf dieselbe polare Matrix F wie die gegebene Matrix selbst.

Da das Produkt zweier F-unitären Matrizen wieder F-unitär ist, so kann dieser Satz als eine ein-eindeutige Parameterdarstellung aller F-unitären Matrizen gedeutet werden. Die Mannigfaltigkeit der E-unitären Polarkomponenten der F-unitären Matrizen ist nach dem zu beweisenden Satz identisch mit der Mannigfaltigkeit derjenigen E-unitären Matrizen, die zugleich F-unitär sind (man beachte dabei, daß E positiv-definit ist, also als ein P in $L = PU$ gedeutet werden kann). Es ist also klar, daß die E-unitären Polarkomponenten der F-unitären Matrizen eine Untergruppe aller F-unitären Matrizen bilden und dadurch gekennzeichnet sind, daß in (4) $L^* = L^{-1}$ gesetzt werden kann, d. h. dadurch, daß sie mit F vertauschbar sind. Nicht so einfach ist die Kennzeichnung der Mannigfaltigkeit der positiv-definiten F-unitären Matrizen P; sie bilden keine Gruppe. Da die Polarkomponenten einer reellen beschränkten nicht-singulären Matrix reell sind, so gilt der zu beweisende Satz auch innerhalb der reellen Untergruppe der F-unitären Matrizen, wobei (4) in $L'FL = F$ übergeht.

Endlich gilt der zu beweisende Satz erst recht für endliche Matrizen sowohl in dem komplexen als auch in dem reellen Bereich. Wählt man insbesondere

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

so folgt aus dem Satz die bekannte Reduktion reeller Lorentz-Transformationen mittels reellen Lorentz-Transformationen. Denn zunächst ist die E-unitäre Polarkomponente U der reellen Lorentzschen Matrix $L = PU$, wie erwähnt, eine mit F vertauschbare Matrix, was aber nur so möglich ist, daß in der vierten Zeile und in der vierten Spalte von U die drei ersten Elemente verschwinden. Demnach ist der dritte Abschnitt von U eine Drehung oder Spiegelung in dem dreidimensionalen euklidischen

Raume, und U entsteht aus diesem Abschnitt durch Hinzufügen von $+1$ oder -1 als viertes Element in der vierten Zeile. Transformiert man nun den dritten Abschnitt der reellen symmetrischen Matrix $P = LU^{-1}$ mittels einer dreidimensionalen orthogonalen Matrix auf die Diagonalform, so ergibt sich genau die übliche[2]), durch reelle Lorentz-Transformationen erreichbare reduzierte Darstellung von L.

Der Beweis des Satzes, wonach beide Polarkomponenten jeder F-unitären Matrix wieder F-unitär sind, verläuft nun wie folgt. Es seien P und U die Polarkomponenten der gegebenen F-unitären Matrix L. Dann gilt

$$P = P^*, \qquad U^* = U^{-1}, \tag{5}$$

da P eine hermitesche und U eine E-unitäre Matrix ist. Da P positiv-definit ist, so ist P^{-1} und daher auch

$$R = W P^{-1} W^{-1} \tag{6}$$

positiv-definit, wobei W irgendeine E-unitäre Matrix bezeichnet. Da F wegen (2) und U nach Definition E-unitär ist und da die E-unitären Matrizen eine Gruppe bilden, so dürfen wir insbesondere

$$W = U F U^{-1} \tag{7}$$

setzen. Geht man nun mit der Polarzerlegung $L = PU$ von L in (4) ein, so folgt wegen (5) die Beziehung $U^{-1} P F P U = F$, die, wenn

$$N = PF \tag{8}$$

gesetzt wird, nach N aufgelöst in der Gestalt

$$N = U F U^{-1} P^{-1}$$

geschrieben werden kann. Wegen (7) folgt daraus

$$N = W P^{-1},$$

das heißt

$$N = W P^{-1} W^{-1} W.$$

also nach (6)

$$N = RW. \tag{9}$$

Nun haben wir gesehen, daß alle vier Matrizen P, R, F, W beschränkt und nicht-singulär, P und R beide hermitesch und positiv-definit, F und W beide E-unitär sind. Andererseits läßt die beschränkte nicht-singuläre

[2]) Vgl. z. B. J. Chazy, La théorie de la relativité et la mécanique céleste, Bd. 2, S. 5—6, Paris 1930.

Matrix N nur *eine* Polarzerlegung zu (vgl. a. a. O.). Aus (8) und (9) folgt daher

$$R = P,$$

$$W = F,$$

also wegen (6)

$$F P^{-1} F^{-1} = P,$$

$$W = F,$$

mithin nach (7)

$$F P^{-1} F^{-1} = P,$$

$$U F U^{-1} = F,$$

was mit Rücksicht auf (2) und (5) in der Gestalt

$$P^* F P = F,$$

$$U^* F U = F$$

geschrieben werden kann. Demnach ist (4) sowohl durch $L = P$ als auch durch $L = U$ befriedigt, w. z. b. w.

Man kann auch infinitesimale, d. h. solche F-unitäre Matrizen betrachten, die (4) nur unter der Annahme befriedigen, daß man höhere Potenzen ihrer Abweichung von E gleich Null setzt. Für diese infinitesimalen F-unitären Matrizen folgt aus (4) die Bedingung, daß ihre Abweichung von E von der Gestalt iFG sein muß, wobei G hermitesch und beschränkt ist. Will man also die nicht infinitesimale F-unitäre Gruppe aus der infinitesimalen im Lieschen Sinne erzeugen, so liegt es nahe, die letztere in der Form $\exp iFG$ mit $G = G^*$ anzusetzen. Dabei beachte man, daß durch die Exponentialreihe jeder beschränkten Matrix A eine beschränkte Matrix $\exp A$ zugeordnet wird, die die vordere und die hintere beschränkte Reziproke $\exp -A$ hat, also mit Rücksicht auf die Toeplitzschen Formalsätze nicht-singulär ist. Setzt man insbesondere $A = iFG$, so folgt

$$(\exp iFG)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[i^n (FG)^n]^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (G^* F^*)^n}{n!},$$

also wegen $G = G^*$, $F = F^*$

$$(\exp iFG)^* F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (GF)^n F}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n G (FG)^{n-1} FF}{n!}.$$

Dies kann, da nach (2)

$$(-i)^n G (FG)^{n-1} FF = (-i)^n FFG (FG)^{n-1} = F(-iFG)^n$$

ist, in der Gestalt

$$(\exp iFG)^* F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(-iFG)^n}{n!} = F \exp -iFG$$

geschrieben werden. Wegen

$$(\exp A)^{-1} = \exp -A$$

folgt daraus, daß $\exp iFG$, wie erwartet, eine F-unitäre Matrix darstellt. Es wäre interessant zu wissen, ob *jede* F-unitäre Matrix in dieser Form darstellbar ist. Man kann freilich an Stelle dieser Lieschen Darstellung auch die Cayleysche ansetzen, die aber für gewisse F-unitäre Matrizen von vornherein versagt.

(Eingegangen am 24. Juli 1933.)

Weiterführung der N. Wienerschen Methode.

Von

J. Karamata in Beograd.

In der Arbeit „Über Summierbarkeit durch typische Mittel", Acta Lit. ac Scient. Univ. Hung. 2 (1924), S. 18—31, gibt M. Riesz u. a. den folgenden Satz:

Satz A. *Sei* $a(x)$ *von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervalle und*

$$A(x) = e^{-x}\int_0^x e^t\, d\{a(t)\} = O(1), \quad \text{bei } x \to \infty,$$

also

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, d\{a(u)\}$$

konvergent für $R(s) > 0$.

Sei weiter 1. $g(\sigma + it)$ *gleichmäßig beschränkt für* $0 \leqq \sigma < a$, $0 \leqq |t| < \mu$, 2. $g(\sigma + it) \to q(t)$ *fast überall für* $|t| < \mu$, *bei* $\sigma \to 0$, *und* 3. *erfülle* $q(t)$ *irgendeine Konvergenzbedingung der Fourierreihe für* $t = 0$;

I. *dann ist* $a(x) = O(1)$, *bei* $x \to \infty$;

II. *wird aber* $A(x) = o(1)$, *bei* $x \to \infty$

vorausgesetzt, so folgt sogar, daß

$$a(x) \to q(0), \quad \text{bei } x \to \infty.$$

Durch Weiterführung der Wienerschen Methode kann ein analoger Satz hergeleitet werden, der sich seiner Form nach dem Heilbronn-Landauschen[1]) Satze nähert und welcher den vorstehenden Rieszschen Satz enthält. Dieser Satz lautet:

Satz B. *Sei*

(1) $$A(x) = O(1), \text{ bei } x \to \infty$$

also

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-su} A(u)\, du$$

konvergent für $R(s) > 0$.

---

[1]) K. Heilbronn und E. Landau, Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner, Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 10—16, wie auch E. Landau, Über Dirichletsche Reihen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, Nr. 30 (1932), S. 525—527.

Wenn

$$G(\sigma + it) \to Q(t) \quad \text{für fast alle } 0 \leqq |t| < 4\lambda, \quad \text{bei } \sigma \to 0, \tag{2}$$

derart, daß

$$\int_{-x}^{+x} G(\sigma + it)\,dt \to \int_{-x}^{+x} Q(t)\,dt \quad \text{für} \quad 0 \leqq |x| \leqq 4\lambda, \quad \text{bei } \sigma \to 0, \tag{3}$$

und daß

$$\frac{1}{\pi}\int_{-4\lambda}^{+4\lambda} \frac{\sin xt}{t}\, Q(t)\,dt \to Q(0), \quad \text{bei} \quad x \to \infty\ ^{2}), \tag{4}$$

I. *so wird*

$$\limsup_{x=\infty} \left| \int_0^x A(t)\,dt - Q(0) \right| \leqq W(\lambda) \to 0, \quad \text{bei } \lambda \to \infty: \tag{5}$$

II. *wird aber*

$$A(x) = o(1), \quad \text{bei } x \to \infty \tag{6}$$

vorausgesetzt, so folgt sogar, daß

$$\int_0^\infty A(t)\,dt = Q(0). \tag{7}$$

Wird nämlich in diesem Satze

$$A(x) = e^{-x}\int_0^x e^t\,d\{a(t)\}, \quad a(0) = 0,$$

gesetzt, so folgt daraus der Rieszsche Satz, da in diesem Falle

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-su} A(u)\,du = \frac{1}{1+s}\int_0^\infty e^{-su}\,d\{a(u)\} = \frac{g(s)}{(1+s)},$$

und

$$a(x) = A(x) + \int_0^x A(t)\,dt \text{ ist.}$$

Was den Satz B betrifft, so wird er sogar in der folgenden Fassung bewiesen:

Satz B'. *Sei*

$$|A(x)| \leqq M \quad \text{für} \quad x \geqq 0, \tag{8}$$

und

$$M_1 = \limsup_{x=\infty} |A(x)|; \tag{9}$$

aus den Bedingungen (2), (3) *und* (4) *des vorigen Satzes folgt dann die Existenz zweier von* $A(x)$ *unabhängigen Funktionen* $m(x)$ *und* $m_1(x)$, *derart, daß*

$$m(x) \to 0, \quad \text{bei} \quad x \to -\infty, \tag{10}$$

---

[2]) Die Bedingungen (3) und (4) werden insbesondere erfüllt, wenn (2) in bezug auf t gleichmäßig stattfindet und wenn $G(s)$ in $s = 0$ regulär ist.

und daß

$$\text{(11)}\qquad \limsup_{x=\infty}\left|\int_0^x A(t)\,dt - Q(0)\right| \leqq \frac{1}{\lambda}\{M\,m(\delta\lambda) + M_1 m_1(\delta\lambda)\}$$

bei beliebigem reellen δ wird.

Dieser Satz enthält den Satz B, da im Falle I. nur $\delta = 0$ zu setzen ist, um (5) mit

$$W(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\{M\,m(0) + M_1 m_1(0)\}$$

zu erhalten. Im Falle II. ist hingegen $M_1 = 0$, so daß bei $\delta \to -\infty$ (7) aus (10) und (11) folgt.

Zum Beweis des Satzes B′ schicke ich folgende Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Es ist*

$$I(\lambda) = \frac{1}{(2\lambda)^3}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\cdots\int f(t_1+t_2+t_3+t_4)\,dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4 = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} f(t)\,k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right)dt,$$

wo

$$\text{(12)}\qquad k(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4x^2 + 4x^3 & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3}(1-x)^3 & \text{für } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1, \\ 0 & \text{für } 1 \leqq x < \infty \end{cases}$$

ist, so daß erst $k'''(x)$ unstetig wird.

Beweis. Sei

$$\text{(13)}\qquad \varrho_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq |x| \leqq 1, \\ 0 & \text{für } 1 < |x| < \infty, \end{cases}$$

gesetzt, dann wird

$$I(\lambda) = \frac{1}{(2\lambda)^3}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\int\int dt_1\,dt_2\,dt_3\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1+t_2+t_3+t_4)\,\varrho_1\left(\frac{t_4}{\lambda}\right)dt_4,$$

oder, wenn $t_1+t_2+t_3+t_4 = t$ gesetzt wird, ist

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\,\frac{1}{(2\lambda)^3}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\int\int \varrho_1\left(\frac{t-t_1-t_2-t_3}{\lambda}\right)dt_1\,dt_2\,dt_3.$$

Wird hier $-\lambda t_i$ statt t_i $(i = 1, 2, 3)$ gesetzt, so folgt weiter

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\,\frac{1}{2^3}\int_{-1}^{+1}\int\int \varrho_1\left(t_1+t_2+t_3+\frac{t}{\lambda}\right)dt_1\,dt_2\,dt_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varrho_4\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt,$$

wo also

$$\varrho_4(x) = \frac{1}{2^3}\int_{-1}^{+1}\int\int \varrho_1(t_1+t_2+t_3+x)\,dt_1\,dt_2\,dt_3$$

ist.

$\varrho_4(x)$ wird also aus der Rekursionsformel

$$\varrho_k(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varrho_{k-1}(x+t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \varrho_{k-1}(t)\,dt, \quad k = 2, 3, 4$$

erhalten, wenn dabei $\varrho_1(x)$ die Funktion (13) bedeutet. Daraus folgt Schritt für Schritt:

$$\varrho_2(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{2} & \text{für } 0 \leqq |x| \leqq 2, \\ 0 & \text{für } 2 \leqq |x| < \infty, \end{cases}$$

$$\varrho_3(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{4} & \text{für } 0 \leqq |x| \leqq 1, \\ \dfrac{(3 - |x|)^2}{8} & \text{für } 1 \leqq |x| \leqq 3, \\ 0 & \text{für } 3 \leqq |x| < \infty, \end{cases}$$

$$\varrho_4(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - 4\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + 4\left|\dfrac{x}{4}\right|^3 & \text{für } 0 \leqq |x| \leqq 2, \\ \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{|x|}{4}\right)^3 & \text{für } 2 \leqq |x| \leqq 4, \\ 0 & \text{für } 4 \leqq |x| < \infty, \end{cases}$$

wo also $\varrho_4(x)$ mit (12) übereinstimmt, wenn $x/4$ durch x ersetzt wird.

Hilfssatz 2. *Sei*

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

und

$$J_\sigma(x) = \frac{1}{2(2\lambda)^3}\int_{-x}^{+x} dv \int_{-\lambda}^{+\lambda} \cdots \int e^{vti} G(\sigma + it)\,dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4$$

gesetzt, dann wird wegen (1), (2) *und* (3)

$$J_\sigma(x) \to \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} \frac{\sin xt}{t}\, k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right) Q(t)\,dt, \quad \textit{bei} \quad \sigma \to 0. \tag{14}$$

Beweis. Es ist

$$J_\sigma(x) = \frac{1}{(2\lambda)^3}\int_{-\lambda}^{+\lambda} \cdots \int \frac{\sin xt}{t} G(\sigma + it)\,dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4.$$

Sei jetzt zur Abkürzung

$$\frac{\sin xt}{t}\, k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right) = K(t) \tag{15}$$

und

$$\tfrac{1}{2}\int_{-y}^{+y} G(\sigma + it)\,dt = f_\sigma(y), \tag{16}$$

gesetzt, wo $k(x)$ die Funktion (12) bedeutet. Dann folgt wegen des Hilfssatzes 1, daß

$$J_\sigma(x) = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} K(t)\, G(\sigma + it)\, dt$$

ist, was durch partielle Integration, wegen $K(\pm 4\lambda) = 0$,

$$J_\sigma(x) = -\int_{-4\lambda}^{+4\lambda} K'(t)\, dt \int_0^t G(\sigma + i\tau)\, d\tau$$

ergibt. Wird hier t durch $-t$ ersetzt, dann folgt, da wegen (15) $K'(-t) = -K'(t)$ ist, daß

$$J_\sigma(x) = -\int_{-4\lambda}^{+4\lambda} K'(t)\, dt \int_{-t}^{0} G(\sigma + i\tau)\, d\tau$$

ist. Werden die zwei letzten Integrale addiert und mit 2 dividiert, so wird

$$J_\sigma(x) = -\int_{-4\lambda}^{+4\lambda} K'(t)\, f_\sigma(t)\, dt,$$

wo $f_\sigma(t)$ die Funktion (16) bedeutet.

Eine zweite partielle Integration ergibt dann

$$J_\sigma(x) = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} K''(t)\, dt \int_0^t f_\sigma(\tau)\, d\tau, \tag{17}$$

da $K'(\pm 4\lambda) = 0$ ist.

Nun wird, wegen (3),

$$f_\sigma(y) = \int_0^\infty e^{-\sigma u} \frac{\sin y\, u}{u} A(u)\, du = \frac{1}{2} \int_{-y}^{+y} G(\sigma + it)\, dt \to \frac{1}{2} \int_{-y}^{+y} Q(t)\, dt, \text{ bei } \sigma \to 0.$$

Also folgt, aus (1) und einem bekannten Tauberschen Satze, daß $\int_0^\infty \frac{\sin y\, u}{u} A(u)\, du$ konvergiert und daß

$$\int_0^\infty \frac{\sin y\, u}{u} A(u)\, du = \frac{1}{2} \int_{-y}^{+y} Q(t)\, dt \tag{18}$$

ist. Weiter ist:

1. wegen (8):

$$\left| \int_0^t f_\sigma(\tau)\, d\tau \right| = \left| \int_0^\infty e^{-\sigma u} \frac{1 - \cos u\, t}{u^2} A(u)\, du \right| \leqq \int_0^\infty \frac{1 - \cos u\, t}{u^2} |A(u)|\, du$$

$$\leqq M \int_0^\infty \frac{1 - \cos u\, t}{u^2} du = \frac{\pi}{2} M |t|,$$

das heißt

$$\left|\int_0^t f_\sigma(\tau)\,d\tau\right| \leqq 2\pi\lambda M, \quad \text{für} \quad |t| \leqq 4\lambda;$$

2. wegen (8) und (18), bei $\sigma \to 0$:

$$\int_0^t f_\sigma(\tau)\,d\tau \to \int_0^\infty \frac{1-\cos u\,t}{u^2} A(u)\,du = \int_0^\infty A(u)\,du \int_0^t \frac{\sin \tau\,u}{\tau}\,d\tau$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{\sin \tau\,u}{u} A(u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{-\tau}^{+\tau} Q(\zeta)\,d\zeta.$$

Also folgt aus (17), daß

$$J_\sigma(x) \to \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} K''(t)\,dt\ \tfrac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{-\tau}^{+\tau} Q(\zeta)\,d\zeta = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} K(t)\,Q(t)\,dt, \quad \text{bei} \quad \sigma \to 0,$$

was, mit (15), die Behauptung (14) darstellt.

Beweis des Satzes B'. Sei zur Abkürzung

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 = S(x)$$

gesetzt, dann nimmt (14) die Form

$$\int_0^\infty e^{-\sigma u} A(u)\,du \int_{-x}^{+x} \lambda S\{\lambda(v-u)\}\,dv \to \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} \frac{\sin x\,t}{t} k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right) Q(t)\,dt, \quad \text{bei} \quad \sigma \to$$

an, woraus aber

$$\int_0^\infty A(u)\,du \int_{-x}^{+x} \lambda S\{\lambda(v-u)\}\,dv = \int_{-4\lambda}^{+4\lambda} \frac{\sin x\,t}{t} k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right) Q(t)\,dt, \tag{19}$$

folgt, da wegen (8) das Integral linker Hand konvergiert.

Weiter ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda S\{\lambda(v-u)\}\,dv = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\lambda w)\,d\lambda w = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t)\,dt = \tfrac{2}{3}\pi.$$

Wird also (19) durch $\frac{2}{3}\pi$ dividiert und von

$$\frac{3}{2\pi}\int_0^{x'} A(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda S\{\lambda(v-u)\}\,dv = \int_0^{x'} A(u)\,du$$

abgenommen, so folgt, wenn

$$\int_0^{x'} A(u)\,du - \frac{3}{2\pi}\int_{-4\lambda}^{+4\lambda} \frac{\sin x\,t}{t} k\left(\frac{|t|}{4\lambda}\right) Q(t)\,dt = D(x, x') \tag{20}$$

gesetzt wird, daß

$$D(x, x') = \frac{3}{2\pi}\int_0^{x'} A(u)\,du\Big[\int_{-\infty}^{-x} + \int_{+x}^{+\infty} \lambda S\{\lambda(v-u)\}\,dv\Big]$$

$$- \frac{3}{2\pi}\int_{x'}^{\infty} A(u)\,du \int_{-x}^{+x} \lambda S\{\lambda(v-u)\}\,dv$$

ist. Daraus folgt wegen (8), wenn noch

$$\operatorname*{Max}_{x \leqq u < \infty} |A(u)| = M(x)$$

gesetzt wird, daß

$$|D(x, x')| \leqq \frac{3M}{2\pi}\int_0^{x'} du\Big[\int_{-\infty}^{-x} + \int_{+x}^{+\infty} \lambda S\{\lambda(v-u)\}\,dv\Big]$$

$$+ \frac{3M(x')}{2\pi}\int_{x'}^{\infty} du \int_{-x}^{+x} \lambda S\{\lambda(v-u)\}\,dv,$$

oder wenn $\lambda(v-u) = -w$, dann $\lambda(u-x) = t$ und $x' - x = \delta$ gesetzt wird, daß

$$(21)\quad |D(x, x')| \leqq \frac{3M}{2\pi\lambda}\int_{-x\lambda}^{\delta\lambda} dt\Big[\int_{-\infty}^{t} + \int_{t+2x\lambda}^{\infty} S(w)\,dw\Big] + \frac{3M(x')}{2\pi\lambda}\int_{\delta\lambda}^{\infty} dt \int_{t}^{t+2x\lambda} S(w)\,dw.$$

Nun wird:

$$1.\quad \frac{3}{2\pi}\int_{-\lambda x}^{\delta\lambda} dt \int_{-\infty}^{t} S(w)\,dw < \frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\delta\lambda} dt \int_{-\infty}^{t} S(w)\,dw = m(\delta\lambda) \to 0,\ \delta \to -\infty,$$

$$2.\quad \int_{-\lambda x}^{\delta\lambda} dt \int_{t+2\lambda x}^{\infty} S(w)\,dw < \int_{-\lambda x}^{\delta\lambda} dt \int_{t+2\lambda x}^{\infty} \frac{dw}{w^4} = \frac{1}{6\lambda^2}\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+x')^2}\right\} = o(1),$$

$$x \to \infty,\quad \text{für}\quad \delta > -2x,$$

$$3.\quad \frac{3}{2\pi}\int_{\delta\lambda}^{\infty} dt \int_{t}^{t+2\lambda x} S(w)\,dw < \frac{3}{2\pi}\int_{\delta\lambda}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} S(w)\,dw = m_1(\delta\lambda).$$

Also zusammengesetzt gibt (21):

$$(22)\quad |D(x, x')| \leqq \frac{1}{\lambda}\{M\,m(\delta\lambda) + M(x')\,m_1(\delta\lambda)\} + o(1),\quad \text{bei}\quad x \to \infty,\ \delta > -2x.$$

Wegen (4) und (12) ist weiter:

$$\frac{3}{2\pi}\int_{-4\lambda}^{+4\lambda} \frac{\sin xt}{t}\, k\Big(\frac{|t|}{4\lambda}\Big) Q(t)\,dt \to Q(0),\quad \text{bei}\quad x \to \infty,$$

so daß, wegen (20), bei festem $\delta = x' - x$

$$\limsup_{x=\infty} |D(x, x')| = \limsup_{x=\infty} \left| \int_0^x A(u)\,du - Q(0) \right|$$

wird. Daraus folgt also mit (22) die Behauptung (10).

Es sei noch folgendes bemerkt. Durch Kombination des Satzes B (oder B') mit dem erwähnten Heilbronn-Landauschen Satze:

Satz C. *Sei*

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-su} A(u)\,du \quad \textit{konvergent für } R(s) > 0,$$

(23) $$e^{cx}\{A(x) + C\}, \quad c \geqq 0, \quad C \geqq 0 \quad \textit{nicht abnehmend,}$$

und

$$G(\sigma + it) \to Q(t) \textit{ gleichmäßig für } 0 \leqq |t| < 4\lambda, \textit{ bei } \sigma \to 0,$$

so wird

$$\limsup_{x=\infty} |A(x)| \leqq W(\lambda) \to 0, \quad \textit{bei } \lambda \to \infty,$$

in welchem die Bedingung (23) sogar durch die weitere

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname{Min}_{x \leqq x' \leqq x+h} e^{-cx}\{e^{cx'} A(x') - e^{cx} A(x)\} \geqq -w(h) \to 0, \text{ bei } h \to 0,\ c \geqq 0$$

ersetzt werden kann (wie ich es in einer andern Arbeit zeigen werde), geht noch folgendes hervor:

Im Satze A, I *kann die Bedingung* $A(x) = O(1)$ *durch die folgende*

(24) $$\liminf_{x=\infty} \operatorname{Min}_{x \leqq x' \leqq x+h} \{a(x') - a(x)\} \geqq -w(h)$$

ersetzt werden; in II *hingegen kann die Voraussetzung* $A(x) = o(1)$ *durch die Bedingung* (24) *mit* $w(h) \to 0$, *bei* $h \to 0$, *und der Gültigkeit von* 1. *und* 2. *für jedes reelle* $\mu > 0$ *ersetzt werden.*

Daraus entsteht eine Verallgemeinerung einiger weiterer Sätze von Heilbronn-Landau[3]).

Beograd, den 8. Juli 1933.

---

[3]) H. Heilbronn und E. Landau, „Ein Satz über Potenzreihen" und „Anwendungen der N. Wienerschen Methode", Math. Zeitschr. 37 (1933), S. 17—21.

(Eingegangen am 29. Juli 1933.)

Über Beziehungen zwischen Potentialtheorie und Liniengeometrie.

Von

C. W. Oseen in Stockholm.

1. Über „Paare" von Funktionen. Im Laufe meiner Untersuchungen über die flüssigen Kristalle bin ich wiederholt zu Systemen von partiellen Differentialgleichungen geführt worden, von denen ich zeigen konnte, daß sie Klassen von Lösungen besitzen, in welchen die abhängigen Veränderlichen, also die Winkel, welche die Orientierung der Moleküle festlegen, in bestimmter Weise von zwei Größen φ und ψ abhängen, welche der Bedingung unterworfen sind, daß sie in dem Sinne ein „Paar" bilden, daß sie den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} &\sum_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 = \sum_j \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)^2 \quad (j = 1, 2, 3), \\ &\sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0, \\ &\Delta \varphi = \sum_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = 0, \quad \Delta \psi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

genügen, sonst aber willkürlich sind. Man sieht sofort, daß, wenn φ und ψ ein Paar bilden, auch der Real- und Imaginärteil, U, V, einer beliebigen analytischen Funktion $F = U + iV$ der Größe $\varphi + i\psi$ ein Paar bilden. Die Kenntnis eines Paares genügt also, um unendlich viele Lösungen der obenerwähnten Systeme von Differentialgleichungen herzustellen.

Um in allgemeiner Weise Paare von Funktionen zu bilden, hat man das System (1) zu integrieren. Dieses System nimmt, wenn man die komplexe Größe $\varphi + i\psi = \Phi$ einführt, die einfache Form

$$\sum_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)^2 = 0, \tag{2}$$

$$\Delta \Phi = 0 \tag{3}$$

an.

Auf die Gleichung (2) kann man die gewöhnlichen Methoden der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung anwenden. Man sieht sofort, daß sowohl Φ wie die Größen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = p_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

auf den charakteristischen Streifen konstante Werte besitzen und daß die Projektionen dieser Streifen auf den Punktraum x_1, x_2, x_3 die isotropen Geraden dieses Raumes sind. Wir betrachten jetzt einen beliebigen Punkt y_1, y_2, y_3 einer Integralfläche $\Phi = \text{Konst.}$ p_1, p_2, p_3 seien die zugehörigen Werte der Größen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Die Gerade

$$\frac{x_1 - y_1}{p_1} = \frac{x_2 - y_2}{p_2} = \frac{x_3 - y_3}{p_3}$$

gehört der Integralfläche. Auf dieser Geraden haben die Ableitungen der Funktion Φ in bezug auf x_1, x_2, x_3 die konstanten Werte p_1, p_2, p_3. Die Gerade schneidet die Ebene $x_1 = 0$ im Punkte

$$x_1 = 0, \quad x_2 = y_2 - \frac{p_2}{p_1} y_1, \quad x_3 = y_3 - \frac{p_3}{p_1} y_1.$$

Man hat in diesem Punkte

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = p_j,$$

$$p_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\left(p_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + p_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right), \tag{4}$$

$$p_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = p_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + 2 p_2 p_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} + p_3^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}.$$

Wir ziehen jetzt die Tatsache heran, daß die Funktion $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ auch der Gleichung (3) genügen soll. Aus dieser Gleichung folgt wegen (4), daß die Funktion $\Phi(0, x_2, x_3)$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = 0$$

befriedigen muß. Diese Gleichung läßt sich auch in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2}} = 0$$

schreiben. Sie spricht aus, daß die Schnittkurven unserer Fläche $\Phi = \text{Konst}$ mit der $x_2 x_3$-Ebene Orthogonaltrajektorien eines Systems von Parallelkurven sind, d. h. daß sie eine Schar von geraden Linien bilden. Wir schreiben die Gleichung dieser Schar in der Form:

$$s_0 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0. \tag{5}$$

s_0, s_2, s_3 sind hier als Funktionen von Φ aufzufassen. Differenzierung in bezug auf x_2 und x_3 ergibt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(s_0' + s_2' x_2 + s_3' x_3) + s_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}(s_0' + s_2' x_2 + s_3' x_3) + s_3 = 0.$$

Also, da

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = p_2, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = p_3:$$

$$p_j (s_0' + s_2' x_2 + s_3' x_3) + s_j = 0 \quad (j = 2, 3). \tag{6}$$

In die Gleichung (5) führen wir jetzt die Ausdrücke

$$y_2 - \frac{p_2}{p_1} y_1, \quad y_3 - \frac{p_3}{p_1} y_1$$

für x_2, x_3 ein. Wir erhalten so, wenn wir

$$\frac{s_2 p_2 + s_3 p_3}{p_1} = - s_1 \tag{7}$$

setzen:

$$s_0 + s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3 = 0. \tag{8}$$

Wir haben dabei

$$p_1 (s_0' + s_2' x_2 + s_3' x_3) + s_1 = 0 \tag{9}$$

und folglich

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 0. \tag{10}$$

Wir haben hiermit das folgende Ergebnis gewonnen: Um in allgemeiner Weise „Paare" von Funktionen zu finden, welche den Gleichungen (1) genügen, hat man die Koeffizienten der Gleichung einer Minimalebene als analytische Funktionen eines Parameters Φ aufzufassen. Die Lösung der Gleichung in bezug auf Φ und die Zerlegung von Φ in den Real- und den Imaginärteil gibt ein Paar von Funktionen.

2. Der Zyklus. Eine Minimalebene enthält stets eine reelle Gerade, den Schnitt mit der konjugierten Minimalebene. Wir fassen diese Gerade als Trägerin zweier orientierter Geraden oder „Speere" (Study) auf und ordnen der Minimalebene

$$s_0 + s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0 \tag{11}$$

denjenigen dieser Speere zu, der die Richtungskosinus

$$\frac{1}{\varrho}(s_2' s_3'' - s_3' s_2''), \quad \frac{1}{\varrho}(s_3' s_1'' - s_1' s_3''), \quad \frac{1}{\varrho}(s_1' s_2'' - s_2' s_1''),$$

$$s_1 = s_1' + i s_1'' \text{ usw.}, \quad \varrho = s_1'^2 + s_2'^2 + s_3'^2$$

besitzt. Konjugierten Minimalebenen entsprechen entgegengesetzte, parallelen Minimalebenen gleichgerichtete (syntaktische) Speere. Ein Bündel syntaktischer Speere gibt eine reelle Darstellung eines bestimmten Punktes des unendlich fernen Kugelkreises[1]).

---

[1]) Man vergleiche hierzu: E. v. Weber, Die komplexen Bewegungen. Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wissensch., Math.-Phys. Klasse, Bd. 55, 1903. — Das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen II. Ordnung. Ber. d. K. Bay. Ak. d. Wissensch. Math.-Phys. Klasse, Bd. 34, 1904.

Die vier homogenen Speerkoordinaten s_0, s_1, s_2, s_3 sind wegen (10) nicht voneinander unabhängig. Es ist deshalb zweckmäßig, neben diesen Koordinaten ein anderes System zu benutzen, welches nicht an diesem Übelstand leidet. Wir wählen hierzu ein schon von Study[2]) angegebenes System, indem wir setzen:

$$(12) \qquad s_0 = t_{00}, \quad s_1 = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2), \quad s_2 = \frac{1}{2i}(t_1^2 - t_2^2), \quad s_3 = \frac{1}{i} t_1 t_2.$$

Diese Koordinaten sind in dem Sinne homogen, daß die Substitution

$$t_{00} \to t'_{00} = \varrho^2 t_{00}, \quad t_1 \to t'_1 = \varrho t_1, \quad t_2 \to t'_2 = \varrho t_2$$

die identische Transformation darstellt. Eine Translation wird in diesen Koordinaten durch die Formel

$$t_{00} \to t'_{00} = t_{00} + \alpha_{11} t_1^2 + 2\alpha_{12} t_1 t_2 + \alpha_{22} t_2^2$$

ausgedrückt. Reell ist die Translation, wenn

$$\alpha_{11} = \bar{\alpha}_{22}, \quad \alpha_{12} = -\bar{\alpha}_{12}.$$

Eine Drehung des Bezugssystems um den Anfangspunkt wird durch die Formeln

$$t_0 \to t'_{00} = \delta^2 t_{00}, \qquad t_1 \to t'_1 = \beta_{11} t_1 + \beta_{12} t_2,$$
$$t_2 \to t'_2 = \beta_{21} t_1 + \beta_{22} t_2, \quad \delta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}$$

dargestellt. Reell ist die Drehung, wenn

$$\beta_{11} = \bar{\beta}_{22}, \quad \beta_{12} = -\bar{\beta}_{21}.$$

Die Ähnlichkeitstransformation wird schließlich durch die Formel

$$t_{00} \to t'_{00} = K t_{00}$$

ausgedrückt. Sie ist reell, wenn K reell ist.

Von den vier homogenen Speerkoordinaten s sind wegen der Homogenität und der Beziehung (10) nur zwei unabhängig. Die Speerkoordinaten als Funktionen eines Parameters auszudrücken ist also im allgemeinen damit gleichbedeutend, zwischen den Koordinaten s eine homogene Beziehung einzuführen.

Ein Zyklus ist durch eine lineare Beziehung zwischen den Speerkoordinaten s gekennzeichnet. Man kann eine solche Beziehung:

$$\sum_{0 \dots 3} z_j s_j = 0,$$

wenn nicht $z_0 = 0$, durch eine reelle Translation auf die Form

$$s_0 + i \sum_{1 \dots 3} z'_j s_j = 0$$

---

[2]) W. Blaschke, Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der Euklidischen Ebene. Monatsh. f. Math. und Physik. XXI. Jahrg. 1910. Siehe besonders S. 49!

bringen, wo z_1', z_2', z_3' reell sind. Durch eine reelle Drehung und eine reelle Ähnlichkeitstransformation kann man sie dann, wenn nicht z_1', z_2', z_3' alle den Wert Null haben, auf die Form

$$s_0 - i s_3 = 0$$

bringen. Wir erhalten also drei Fälle:

$$1: z_0 = 0, \sum_{1 \ldots 3} z_j s_j = 0; \quad 2: s_0 = 0; \quad 3: s_0 = i s_3.$$

Im ersten Fall können wir $s_0 = -\Phi$ setzen und erhalten:

$$\Phi = \sum_{1 \ldots 3} s_j x_j,$$

also:

$$\varphi = \text{reellem Teil von } \sum_{1 \ldots 3} s_j x_j = \sum_{1 \ldots 3} s_j' x_j,$$

$$\psi = \text{imaginärem Teil von } \sum_{1 \ldots 3} s_j x_j = \sum_{1 \ldots 3} s_j'' x_j$$

mit:

$$\sum_{1 \ldots 3} s_j'^2 = \sum_{1 \ldots 3} s_j''^2, \quad \sum_{1 \ldots 3} s_j' s_j'' = 0.$$

Durch eine reelle Drehung kann man bewirken, daß $s_2' = s_3' = 0$, also auch: $s_1'' = 0$. Durch eine Drehung des $x_2 x_3$-Kreuzes kann man dann erreichen, daß $s_3'' = 0$. Also $\varphi = s_1' x_1$, $\psi = s_2'' x_2$ mit $s_1'^2 = s_2''^2$. Offenbar erhält man in dieser Weise die gewöhnlichen analytischen Funktionen von $x_1 \pm i x_2$. Die Funktionenpaare, die man in diesem ersten Fall bekommt, können als trivial bezeichnet werden.

Im zweiten Fall gibt die Gleichung der Minimalebene (11), wenn wir s_1, s_2, s_3 durch t_1 und t_2 ausdrücken und $t_1/t_2 = i\Phi$ setzen:

$$(1 - \Phi^2) x_1 + i (1 + \Phi^2) x_2 + 2 \Phi x_3 = 0.$$

Dies ergibt:

$$\Phi = \frac{x_1 + i x_2}{R - x}$$

oder:

$$\Phi = -\frac{x_1 + i x_2}{R + x_3} \qquad (R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}).$$

Wir haben damit das Funktionenpaar:

$$\varphi = \frac{x_1}{R - x_3}, \quad \psi = \frac{x_2}{R - x_3},$$

sowie das durch Umkehrung der Vorzeichen von R, φ, ψ daraus hervorgehende Paar:

$$\varphi = \frac{x_1}{R + x_3}, \quad \psi = \frac{x_2}{R + x_3}$$

gewonnen. Beide Funktionenpaare haben konstante Werte auf den vom Anfangspunkt ausgehenden Speeren. Man erhält diese Werte, indem man den Schnittpunkt des Speeres mit der Kugel $R = 1$ vom Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ oder vom Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ aus

stereographisch auf die $x_1 x_2$-Ebene abbildet. Die Koordinaten des Bildpunktes sind φ und ψ.

Eine beliebige analytische Funktion von

$$\frac{x_1 + i x_2}{R - x_3} \quad \text{oder:} \quad \frac{x_1 + i x_2}{R + x_3}$$

ergibt, wenn sie in den Real- und Imaginärteil zerlegt wird, ein Funktionenpaar. Das spezielle Paar:

$$\log \sqrt{\frac{R - x_3}{R + x_3}}, \quad \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1},$$

oder in Polarkoordinaten:

$$x_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad x_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad x_3 = R \cos\vartheta$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \ \varphi$$

verdient ein besonderes Interesse. Man erhält dieses Paar durch Zerlegung der Funktion

$$\log \left(\frac{x_1 + i x_2}{R + x_3} \right)$$

in ihren Real- und Imaginärteil.

Im dritten Fall $s_0 = i s_3$ haben wir:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 (x_3 + i) = 0$$

oder, wenn wir wieder s_1, s_2, s_3 durch t_1, t_2 ausdrücken und $t_1/t_2 = i \Phi$ setzen:

$$(1 - \Phi^2) x_1 + i (1 + \Phi^2) x_2 + 2 \Phi (x_3 + i) = 0.$$

Diese Gleichung ergibt:

$$\Phi = \frac{x_3 + i \pm \sqrt{R^2 - 1 + 2 i x_3}}{x_1 - i x_2}$$

$$(R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Φ ist hier eine zweiwertige Funktion der Koordinaten x_1, x_2, x_3. Dagegen ist Φ eine eindeutige Funktion der Speere. So nimmt Φ auf der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ die zwei Werte 0 und ∞ an. Einer dieser Werte (und zwar der Wert 0) kommt dem Speere $x_1 + i x_2 = 0$ zu. Der andere Wert (∞) gehört dem Speere $x_1 - i x_2 = 0$. Die beiden Werte, welche Φ als Funktion von x_1, x_2, x_3 annehmen kann, werden permutiert, wenn der Punkt x_1, x_2, x_3 den Schnitt zwischen der Kugel $R = 1$ und der Ebene $x_3 = 0$ umkreist. Der Kreis $R = 1, x_3 = 0$ ist also eine Verzweigungskurve der Potentialfunktionen, die wir durch Betrachtung des Zykels $s_0 = i s_3$ gewinnen.

Wenn wir:

$$\sqrt{R^2 - 1 + 2 i x_3} = R_1 + i R_2$$

setzen, wo R_1 und R_2 reell angenommen werden, so erhalten wir für unser Paar φ, ψ die Darstellung:

$$(13) \qquad \varphi = \frac{x_1(x_3 \pm R_1) - x_2(1 \pm R_2)}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \psi = \frac{x_1(1 \pm R_2) + x_2(x_3 \pm R_1)}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Man hat dabei:

$$R_1 = \left| \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2-1)^2 + 4x_3^2} + \tfrac{1}{2}(R^2-1)} \right|,$$

$$R_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2-1)^2 + 4x_3^2} - \tfrac{1}{2}(R^2-1)}$$

$$(R_1 R_2 = x_3).$$

Unter den Paaren von Funktionen, welche wir durch Zerlegung der Funktionen $F(\varphi + i\psi)$ in die Real- und Imaginärteile erhalten, verdient wieder das spezielle Paar, das wir durch Zerlegung der Funktion $\log(\varphi + i\psi)$ bekommen, ein besonderes Interesse. Wir haben:

$$|\Phi|^2 = \varphi^2 + \psi^2 = \frac{(x_3 \pm R_1)^2 + (1 \pm R_2)^2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1 - |\Phi|^2}{1 + |\Phi|^2} = \mp R_2.$$

Wenn wir

$$\left(\frac{1 - |\Phi|^2}{1 + |\Phi|^2}\right)^2 = \alpha$$

setzen, so haben wir folglich:

$$\alpha = R_2^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(R^2-1)^2 + 4x_3^2} - \tfrac{1}{2}(R^2-1)$$

und

$$\alpha^2 + \alpha(R^2-1) - x_3^2 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich auch in der Form

$$(14) \qquad \frac{x_1^2 + x_2^2}{1-\alpha} - \frac{x_3^2}{\alpha} = 1$$

schreiben. Sie zeigt, daß die Flächen, auf welchen der reelle Teil von $\log(\varphi + i\psi)$ konstante Werte besitzt, einschalige Rotationshyperboloide sind, welche den Kreis $R = 1$, $x_3 = 0$ zur Fokalkurve haben. Die Geraden, welche zu unserem Zyklus gehören, sind die geradlinigen Erzeugenden dieser Hyperboloide. Wir haben hiermit einen der grundlegenden Sätze in diesem Kapitel der Liniengeometrie wiedergefunden.

Die Flächen, auf welchen der imaginäre Teil von $\log(\varphi + i\psi)$ konstante Werte besitzt, sind durch die Bedingung $\varphi/\psi = \text{Konst}$ gekennzeichnet. Man findet unter Verwendung der Beziehung $R_1 R_2 = x_3$:

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{x_1 \pm x_2 R_1}{\pm x_1 R_1 + x_2}.$$

Für die Fläche

$$\psi = k\varphi$$

erhält man hieraus leicht die Gleichung

$$(15) \qquad (k x_2 - x_1)^4 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)(k x_2 - x_1)^2 (k x_1 - x_2)^2 - x_3^2 (k x_1 - x_2)^4 = 0.$$

Diese Schar von Regelflächen sechster Ordnung schneidet also die Schar (14) orthogonal.

3. Die Hyperzykel. Ein Speer einer Ebene kann durch vier homogene Koordinaten S_0, S_1, S_2, S_3, welche der Bedingung

$$(16) \qquad S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 = 0$$

genügen, festgelegt werden. Eine homogene quadratische Beziehung zwischen S_0, S_1, S_2, S_3, welche nicht mit dieser Bedingung zusammenfällt, definiert eine Schar von Speeren, deren Mannigfaltigkeit dadurch gekennzeichnet werden kann, daß man sie auf die Mannigfaltigkeit der komplexen Zahlen abbilden kann. Man nennt nach Laguerre[3]) und Blaschke[4]) die von einer solchen „eindimensionalen" Schar von Speeren eingehüllte ebene Kurve einen Hyperzykel. Man kann die Speere einer Ebene durch die Zuordnung

$$(17) \qquad s_k = S_k \quad k = 0, 1, 2; \quad i s_3 = S_3$$

auf die Minimalebenen, also auch auf die reellen Speere eines dreidimensionalen Raumes abbilden. Der Schar von ebenen Speeren, welche einen Hyperzykel einhüllt, entspricht bei dieser Abbildung eine Schar von reellen räumlichen Speeren, die durch eine Beziehung von der Form:

$$(18) \qquad \sum_{jk} a_{jk} s_j s_k = 0$$

definiert ist. Wir nennen im folgenden eine solche Schar von räumlichen Speeren einen räumlichen Hyperzykel.

Mit einer sehr speziellen Art von räumlichen Hyperzykeln hat sich Herr E. v. Weber in seiner obenerwähnten Arbeit: „Das Imaginäre in der Geometrie der konfokalen Flächen zweiter Ordnung" beschäftigt. In dem von ihm behandelten Fall hat die Beziehung (18) die Gestalt:

$$s_0^2 = a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + a_3^2 s_3^2,$$
$$a_1^2 > a_2^2 > a_3^2,$$

a_1, a_2, a_3 sind also reelle Zahlen. Die Träger der Speere sind in diesem Fall die geradlinigen Erzeugenden der einschaligen Hyperboloide der konfokalen Schar

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 - \lambda} = 1.$$

---

[3]) E. Laguerre, Sur les hypercycles. Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. 1882; Oeuvres T. 2, p. 620.

[4]) W. Blaschke, loc. cit., vgl. auch Vorlesungen über Differentialgeometrie III.

Herr v. Weber drückt die homogenen Speerkoordinaten s_0, s_1, s_2, s_3 durch eine komplexe Hilfsgröße φ aus, indem er

$$\varrho s_0 = \left|\sqrt{a_1^2 - a_2^2}\right| cn\varphi\, dn\varphi, \quad \varrho s_1 = 1 - k\, sn^2\varphi,$$
$$\varrho s_2 = i(1 + k\, sn^2\varphi), \quad \varrho s_3 = -2\sqrt{k}\, sn\varphi$$

setzt. k ist der Modul der hier eingeführten elliptischen Funktionen und man hat:

$$k = \alpha - \left|\sqrt{\alpha^2 - 1}\right|,$$
$$\alpha = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Um das dem Hyperzykel entsprechende Funktionenpaar zu bilden, hat man φ als Funktion von x_1, x_2, x_3 darzustellen und in den reellen und imaginären Teil zu zerlegen. Die hierzu nötigen Formeln hat Herr v. Weber nicht gegeben.

Die Beziehungen von der Form (18) zerfallen in bezug auf die Gruppe der komplexen Bewegungen und der Ähnlichkeitstransformation in mehrere Klassen. Wir müssen zunächst zwischen den Fällen $a_{00} \neq 0$ und den Fällen $a_{00} = 0$ unterscheiden. Wenn $a_{00} \neq 0$, kann man die Beziehung (18) durch eine (im allgemeinen komplexe) Translation auf die Form

$$s_0^2 + \sum_{\substack{jk \\ 1\ldots3}} a_{jk} s_j s_k = 0 \tag{19}$$

bringen. Durch eine (im allgemeinen) komplexe Drehung kann man dann die quadratische Form

$$\sum_{\substack{jk \\ 1\ldots3}} a_{jk} s_j s_k$$

auf Hauptachsen bringen. Man erhält so

$$s_0^2 + a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + a_3^2 s_3^2 = 0. \tag{20}$$

Die Größen a_1, a_2, a_3 sind im allgemeinen komplex.

Wenn zwei der Größen $a_j (j = 1, 2, 3)$ zusammenfallen, kann man die Beziehung (20) mit Hilfe von (10) in eine Gleichung von der Form

$$s_0^2 + a_1^2 s_1^2 = 0$$

überführen. Der Hyperzykel zerfällt ersichtlich in diesem Fall in zwei Zykel. Wenn wir diesen Fall ausschließen, so können wir also stets annehmen, daß die drei Größen a_1, a_2, a_3 verschieden sind.

Durch unsere Transformationen haben wir erreicht, daß unsere Grundgleichungen die Form

$$s_0^2 + a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + a_3^2 s_3^2 = 0, \tag{21}$$

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 0, \tag{10}$$

$$s_0 + s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3 = 0 \tag{22}$$

besitzen. Dabei ist

$$y_j = \sum_k c_{jk}(x_k - \xi_k),$$

$$\sum_l c_{jl} c_{kl} = \delta_{jk}. \tag{23}$$

Die Größen c_{jk} und ξ_k sind (im allgemeinen) komplex.

Die Gleichungen (21), (10), (22) ergeben:

$$f = (s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3)^2 + a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + a_3^2 s_3^2 = 0,$$
$$f_1 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 0.$$

Die Aufgabe $s_1 : s_2 : s_3$ aus diesen Gleichungen zu bestimmen, kann geometrisch als die Aufgabe, die vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu finden, aufgefaßt werden. Bekannte Formeln aus der Theorie der Kegelschnitte ergeben die Lösung dieser Aufgabe.

Die quadratischen Formen f und f_1 haben die Invarianten:

$$\delta = a_1^2 a_2^2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2 y_1^2 + a_3^2 a_1^2 y_2^2 + a_1^2 a_2^2 y_3^2,$$
$$\delta_1 = 1,$$
$$\Theta = a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2 + a_1^2 a_2^2 + (a_2^2 + a_3^2) y_1^2 + (a_3^2 + a_1^2) y_2^2 + (a_1^2 + a_2^2) y_3^2,$$
$$\Theta_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

Die Gleichung

$$\frac{y_1^2}{a_1^2 - \lambda} + \frac{y_2^2}{a_2^2 - \lambda} + \frac{y_3^2}{a_3^2 - \lambda} + 1 = 0 \tag{24}$$

läßt sich mit Hilfe dieser Invarianten in der Form

$$\lambda^3 - \Theta_1 \lambda^2 + \Theta \lambda - \delta = 0 \tag{24a}$$

schreiben. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ seien die Wurzeln dieser Gleichung.

Wir setzen ferner:

$$D_{11} = \lambda_1^2 - \lambda_1 (a_2^2 + a_3^2 + y_2^2 + y_3^2) + a_2^2 a_3^2 + a_2^2 y_3^2 + a_3^2 y_2^2,$$
$$D_{12} = \lambda_1^2 - \lambda_1 (a_3^2 + a_1^2 + y^2 + y_1^2) + a_3^2 a_1^2 + a_3^2 y_1^2 + a_1^2 y_3^2$$

usw. oder allgemein:

$$D_{jk} = \lambda_j^2 - \lambda_j (\Theta_1 - a_k^2 - y_k^2) + \Theta - a_k^2 \Theta_1 + a_k^4 + y_k^2 (2 a_k^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2). \tag{25}$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $f_1 = 0$ sind in diesen Bezeichnungen, wenn ϱ wieder ein Proportionalitätsfaktor ist:

$$\begin{aligned}
\varrho s_1 &= (\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{D_{11}} + (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{D_{21}} + (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{D_{31}}, \\
\varrho s_2 &= (\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{D_{12}} + (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{D_{22}} + (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{D_{32}}, \\
\varrho s_3 &= (\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{D_{13}} + (\lambda_3 - \lambda_1)\sqrt{D_{23}} + (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{D_{33}}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Man findet durch direkte Ausrechnung

$$(\lambda_j - a_1^2)\, D_{j1} = y_1^2\, (\lambda_j - a_2^2)(\lambda_j - a_3^2),$$
$$(\lambda_j - a_2^2)\, D_{j2} = y_2^2\, (\lambda_j - a_3^2)(\lambda_j - a_1^2)$$

allgemein, wenn wir

$$(\lambda_j - a_1^2)(\lambda_j - a_2^2)(\lambda_j - a_3^2) = \varphi(\lambda_j)$$

setzen:

$$D_{jk} = \frac{y_k^2\, \varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j - a_k^2)^2}. \tag{27}$$

Die Gleichungen (26) lassen sich also auch in der Form

$$\varrho \frac{s_1}{y_1} = (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}{\lambda_1 - a_1^2} + (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_2)}}{\lambda_2 - a_1^2} + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}}{\lambda_3 - a_1^2},$$
$$\varrho \frac{s_2}{y_2} = (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}{\lambda_1 - a_2^2} + (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_2)}}{\lambda_2 - a_2^2} + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}}{\lambda_3 - a_2^2},$$
$$\varrho \frac{s_3}{y_3} = (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}{\lambda_1 - a_3^2} + (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_2)}}{\lambda_2 - a_3^2} + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}}{\lambda_3 - a_3^2}$$

schreiben. Aus diesen Gleichungen folgt wegen (24):

$$-\varrho s_0 = \varrho \sum_{1 \dots 3} s_j y_j = (\lambda_2 - \lambda_3) \sqrt{\varphi(\lambda_1)} + (\lambda_3 - \lambda_1) \sqrt{\varphi(\lambda_2)} + (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{\varphi(\lambda_3)}. \tag{28}$$

Die Wurzeln $\sqrt{\varphi(\lambda_j)}$ können in einer dieser Gleichungen mit beliebigen Vorzeichen genommen werden. In den übrigen drei Gleichungen müssen sie dann mit denselben Vorzeichen genommen werden.

Wir führen jetzt in der üblichen Weise die elliptischen Funktionen ein. In den wohlbekannten Formeln:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 = -\tfrac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = -\tfrac{1}{4} g_2,$$
$$e_1 e_2 e_3 = \tfrac{1}{4} g_3$$

mögen e_1, e_2, e_3 die Werte

$$e_1 = \tfrac{1}{3}(2a_1^2 - a_2^2 - a_3^2), \quad e_2 = \tfrac{1}{3}(2a_2^2 - a_3^2 - a_1^2), \quad e_3 = \tfrac{1}{3}(2a_3^2 - a_1^2 - a_2^2)$$

haben. Wenn wir dann

$$\lambda_j = \tfrac{1}{3}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + p(t_j) \tag{29}$$

setzen, so erhalten wir:

$$\varphi(\lambda_j) = \sqrt{(p(t_j) - e_1)(p(t_j) - e_2)(p(t_j) - e_3)} = \mp \tfrac{1}{2} p'(t_j)$$

und

$$\varrho\,\frac{s_j}{y_j} = \pm\,(p(t_2)-p(t_3))\,\frac{p'(t_1)}{p(t_1)-e_j} \pm (p(t_3)-p(t_1))\,\frac{p'(t_2)}{p(t_2)-e_j} \pm (p(t_1)-p(t_2))\,\frac{p'(t_3)}{p(t_3)-e_j},$$

(30)

$$j = 1, 2, 3$$

$$-\varrho\, s_0 = \varrho \sum s_j y_j = \pm\,(p(t_2)-p(t_3))\,p'(t_1) \pm (p(t_3)-p(t_1))\,p'(t_2) \pm (p(t_1)-p(t_2))\,p'(t_3).$$

In diesen vier Formeln kann an allen drei Stellen entweder das obere oder das untere Vorzeichen gewählt werden. In allen vier Formeln muß aber an entsprechenden Stellen in derselben Weise gewählt werden.

Die in (30) rechts vorkommenden elliptischen Funktionen lassen sich offenbar durch die Weierstraßschen σ-Funktionen ausdrücken. Man findet, wenn man überall das obere Vorzeichen wählt:

$$\varrho\,\frac{s_j}{y_j} = 2\sigma^2(\omega_j)\,\frac{\sigma(t_1+t_2+t_3-\omega_j)\,\sigma(t_2-t_3)\,\sigma(t_3-t_1)\,\sigma(t_1-t_2)}{\sigma^2(t_1)\,\sigma^2(t_2)\,\sigma^2(t_3)\,\sigma(t_1-\omega_j)\,\sigma(t_2-\omega_j)\,\sigma(t_3-\omega_j)},$$

(31)

$$-\varrho\, s_0 = \sum \varrho\, s_j\, y_j = 2\,\frac{\sigma(t_1+t_2+t_3)\,\sigma(t_2-t_3)\,\sigma(t_3-t_1)\,\sigma(t_1-t_2)}{\sigma^3(t_1)\,\sigma^3(t_2)\,\sigma^3(t_3)}.$$

Wenn wir:

$$y_j = \frac{\sqrt{(p(t_1)-e_j)\,(p(t_2)-e_j)\,(p(t_3)-e_j)}}{\sqrt{(e_j-e_k)\,(e_j-e_l)}} = \frac{\sigma_j(t_1)\,\sigma_j(t_2)\,\sigma_j(t_3)}{\sqrt{(e_j-e_k)\,(e_j-e_l)}\cdot\sigma(t_1)\,\sigma(t_2)\,\sigma(t_3)}$$

setzen, so folgt endlich:

$$\varrho\, s_j = \frac{\sigma_j(t_1+t_2+t_3)}{\sqrt{(e_j-e_k)\,(e_j-e_l)}} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

(32)

$$\varrho\, s_0 = \sigma(t_1+t_2+t_3).$$

Man findet in derselben Weise, wenn man die Vorzeichen in anderer Weise wählt:

$$\varrho\, s_j = \frac{\sigma_j(t_1-t_2-t_3)}{\sqrt{(e_j-e_k)\,(e_j-e_l)}} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

$$\varrho\, s_0 = \sigma(t_1-t_2-t_3);$$

$$\varrho\, s_j = \frac{\sigma_j(-t_1+t_2-t_3)}{\sqrt{(e_j-e_k)\,(e_j-e_l)}} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

$$\varrho\, s_0 = \sigma(-t_1+t_2-t_3);$$

$$\varrho\, s_j = \frac{\sigma_j(-t_1-t_2+t_3)}{\sqrt{(e_j-e_k)\,(e_j-e_l)}} \qquad (j = 1, 2. 3),$$

$$\varrho\, s_0 = \sigma(-t_1-t_2+t_3).$$

Die vier Speerkoordinaten s_0, s_1, s_2, s_3 sind durch diese Formeln als Funktionen eines Parameters $t_1 + t_2 + t_3$, bzw. $t_1 - t_2 - t_3$, $-t_1 + t_2 - t_3$, $-t_1 - t_2 + t_3$ ausgedrückt. Als Funktionen der Koordinaten eines Raumpunktes werden diese Parameter durch die Gleichungen (29), (24) oder (24a) und (23) bestimmt. Die Zerlegung dieser Parameter in ihre Real- und Imaginärteile ergibt vier Funktionenpaare, und daraus kann man in der wohl bekannten Weise unendlich viele neue Funktionenpaare ableiten.

Man kann in vielfacher Weise die Quotienten der σ-Funktionen durch die Jacobischen elliptischen Funktionen ausdrücken. Unter anderem kann man hierzu die Formeln anwenden, die Herr v. Weber seiner oben erwähnten Untersuchung zugrunde gelegt hat. Bis auf einen konstanten Faktor hat das φ des Herrn v. Weber einen der Werte $t_1 + t_2 + t_3$, $t_1 - t_2 - t_3$, $-t_1 + t_2 - t_3$, $-t_1 - t_2 + t_3$. Unser Ergebnis vervollständigt also die Untersuchungen von Herrn v. Weber. Um zu dem von ihm behandelten Fall zu kommen, muß man allerdings annehmen, daß die Größen c_{jk}, ξ_k, a_1, a_2, a_3 reell sind.

Die hier gefundenen Ergebnisse stimmen andererseits mit denjenigen überein, zu denen ich in meinem XIV. Beitrag zur Theorie der anisotropen Flüssigkeiten gelangte. Als nicht triviales Beispiel eines Funktionenpaars gab ich damals: $\varphi = \tau_2$, $\psi = \tau_1 + \tau_3$ an. Dabei war:

$$\tau_1 = t_1, \quad i\tau_2 = t_2 - \omega_1, \quad \tau_3 = t_3 - \omega_2.$$

Also:

$$t_1 + t_2 + t_3 = \tau_1 + \tau_3 + i\tau_2 + \omega_1 + \omega_2.$$

Die Zerlegung von $t_1 + t_2 + t_3$ in den Real- und Imaginärteil ergibt also in diesem Fall (ω_1 reell, ω_2 rein imaginär):

$$\tau_1 + \tau_3 + \omega_1, \quad \tau_2 - i\omega_2.$$

Die Potentialfunktionen, zu welchen wir durch die bis jetzt betrachteten Hyperzykel geführt werden, sind in dem Sinne vollständig bekannt, daß man explizite Ausdrücke für λ_1, λ_2, λ_3 also auch für t_1, t_2, t_3 angeben kann. Aber von einer wirklichen Kenntnis dieser Funktionen sind wir noch weit entfernt. Die Verzweigungskurve derselben ist im allgemeinen Schnittkurve zwischen einer algebraischen Fläche achter Ordnung und einer Fläche siebenter Ordnung. Wie die reellen Züge dieser Kurve aussehen, darüber wissen wir zur Zeit nichts. Nur in einem Fall, dem von Herrn v. Weber behandelten Spezialfall, c_{jk} und ξ_k sowie a_1, a_2, a_3 reell, ist alles klar. Die Verzweigungskurve ist in diesem Fall das System der beiden Fokalkegelschnitte.

Wir kehren zu der Gleichung (18) zurück und wollen jetzt annehmen, daß $a_{00} = 0$. Die durch (18) in Ebenenkoordinaten dargestellte Fläche

zweiter Klasse ist in diesem Fall ein Paraboloid. Durch eine komplexe Bewegung kann man die Grundgleichungen (18), (10), (11) auf die Form

$$a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 + 2b s_0 s_3 = 0,$$

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 0, \tag{33}$$

$$s_0 + s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3 = 0$$

bringen. Man hat dabei

$$y_j = \sum_k c_{jk}(x_k - \xi_k) \tag{34}$$

mit

$$\sum_m c_{jm} c_{km} = \delta_{jk}.$$

Die Größen c_{jk} und ξ_k sind im allgemeinen komplex. Aus den Gleichungen (33) folgt:

$$a_1^2 s_1^2 + a_2^2 s_2^2 - 2b s_3 (s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und (10) folgt, wenn wir

$$\delta = -a_2^2 b^2 y_1^2 - a_1^2 b^2 y_2^2 - 2 a_1 a_2 b y_3, \tag{35}$$

$$\Theta = -b^2 (y_1^2 + y_2^2) - 2b y_3 (a_1^2 + a_2^2) + a_1^2 a_2^2, \tag{36}$$

$$\Theta_1 = a_1^2 + a_2^2 - 2b y_3 \tag{37}$$

setzen und wieder mit λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 - \Theta_1 \lambda^2 + \Theta \lambda - \delta = 0 \tag{24 a}$$

bezeichnen:

$$\varrho \frac{s_1}{y_1} = (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a_1^2)(\lambda_1 - a_2^2)}}{\lambda_1 - a_1^2} + (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\sqrt{(\lambda_2 - a_1^2)(\lambda_2 - a_2^2)}}{\lambda_2 - a_1^2}$$
$$+ (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\sqrt{(\lambda_3 - a_1^2)(\lambda_3 - a_2^2)}}{\lambda_3 - a_1^2},$$

$$\varrho \frac{s_2}{y_2} = (\lambda_2 - \lambda_3) \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a_1^2)(\lambda_1 - a_2^2)}}{\lambda_1 - a_2^2} + (\lambda_3 - \lambda_1) \frac{\sqrt{(\lambda_2 - a_1^2)(\lambda_2 - a_2^2)}}{\lambda_2 - a_2^2} \tag{38}$$
$$+ (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\sqrt{(\lambda_3 - a_1^2)(\lambda_3 - a_2^2)}}{\lambda_3 - a_2^2},$$

$$\varrho s_3 = -\frac{1}{b} [(\lambda_2 - \lambda_3) \sqrt{(\lambda_1 - a_1^2)(\lambda_1 - a_2^2)}$$
$$+ (\lambda_3 - \lambda_1) \sqrt{(\lambda_2 - a_1^2)(\lambda_2 - a_2^2)} + (\lambda_1 - \lambda_2) \sqrt{(\lambda_3 - a_1^2)(\lambda_3 - a_2^2)}].$$

Die Vorzeichen der Wurzelgrößen können in einer dieser Gleichungen beliebig gewählt werden. In den anderen Gleichungen müssen sie dann in derselben Weise gewählt werden. Man hat ferner:

$$y_1^2 = \frac{(\lambda_1 - a_1^2)(\lambda_2 - a_1^2)(\lambda_3 - a_1^2)}{b^2 (a_1^2 - a_2^2)},$$

$$y_2^2 = \frac{(\lambda_1 - a_2^2)(\lambda_2 - a_2^2)(\lambda_3 - a_2^2)}{b^2 (a_2^2 - a_1^2)}, \tag{39}$$

$$y_3 = \frac{1}{2b} (a_1^2 + a_2^2 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3).$$

Wir setzen

$$\lambda_j = \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + \tfrac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2)\cos\text{hyp}\, t_j \tag{40}$$

und können dann für y_1 und y_2 die Bestimmungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{b}(a_1^2 - a_2^2)\sin\text{hyp}\,\frac{t_1}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_2}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_3}{2}, \\ y_2 &= \frac{1}{ib}(a_1^2 - a_2^2)\cos\text{hyp}\,\frac{t_1}{2}\cos\text{hyp}\,\frac{t_2}{2}\cos\text{hyp}\,\frac{t_3}{2} \end{aligned} \tag{41}$$

wählen. Es folgt dann, mit veränderter Bedeutung von ϱ:

$$\varrho\frac{s_1}{y_1} = \pm(\cos\text{hyp}\, t_2 - \cos\text{hyp}\, t_3)\cot\text{hyp}\,\frac{t_1}{2}$$

$$\pm(\cos\text{hyp}\, t_3 - \cos\text{hyp}\, t_1)\cot\text{hyp}\,\frac{t_2}{2} \pm (\cos\text{hyp}\, t_1 - \cos\text{hyp}\, t_2)\cot\text{hyp}\,\frac{t_3}{2},$$

$$\varrho\frac{s_2}{y_2} = \pm(\cos\text{hyp}\, t_2 - \cos\text{hyp}\, t_3)\,\text{tg hyp}\,\frac{t_1}{2}$$

$$\pm(\cos\text{hyp}\, t_3 - \cos\text{hyp}\, t_1)\,\text{tg hyp}\,\frac{t_2}{2} \pm (\cos\text{hyp}\, t_1 - \cos\text{hyp}\, t_2)\,\text{tg hyp}\,\frac{t_3}{2}$$

$$\varrho\, s_3 = \pm(\cos\text{hyp}\, t_2 - \cos\text{hyp}\, t_3)\sin\text{hyp}\, t_1$$

$$\pm(\cos\text{hyp}\, t_3 - \cos\text{hyp}\, t_1)\sin\text{hyp}\, t_2 \pm (\cos\text{hyp}\, t_1 - \cos\text{hyp}\, t_2)\sin\text{hyp}\, t_3.$$

Man hat:

$$(\cos\text{hyp}\, t_2 - \cos\text{hyp}\, t_3)\cot\text{hyp}\,\frac{t_1}{2} + (\cos\text{hyp}\, t_3 - \cos\text{hyp}\, t_1)\cot\text{hyp}\,\frac{t_2}{2} + (\cos\text{hyp}\, t_1 - \cos\text{hyp}\, t_2)\cot\text{hyp}\,\frac{t_3}{2}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1, & \cos\text{hyp}\, t_1, & \cot\text{hyp}\,\frac{t_1}{2} \\ 1, & \cos\text{hyp}\, t_2, & \cot\text{hyp}\,\frac{t_2}{2} \\ 1, & \cos\text{hyp}\, t_3, & \cot\text{hyp}\,\frac{t_3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0, & \cos\text{hyp}\, t_1 - \cos\text{hyp}\, t_2, & \cot\text{hyp}\,\frac{t_1}{2} - \cot\text{hyp}\,\frac{t_2}{2} \\ 0, & \cos\text{hyp}\, t_2 - \cos\text{hyp}\, t_3, & \cot\text{hyp}\,\frac{t_2}{2} - \cot\text{hyp}\,\frac{t_3}{2} \\ 1, & \cos\text{hyp}\, t_3, & \cot\text{hyp}\,\frac{t_3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\text{hyp}\,\frac{t_1+t_2}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_1-t_2}{2}, & \dfrac{\sin\text{hyp}\,\frac{t_1-t_2}{2}}{\sin\text{hyp}\,\frac{t_1}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_2}{2}} \\ \sin\text{hyp}\,\frac{t_2+t_3}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_2-t_3}{2}, & \dfrac{\sin\text{hyp}\,\frac{t_2-t_3}{2}}{\sin\text{hyp}\,\frac{t_2}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_3}{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin\text{hyp}\,\frac{t_1-t_2}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_2-t_3}{2}}{\sin\text{hyp}\,\frac{t_1}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_2}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_3}{2}}\left(\sin\text{hyp}\,\frac{t_1}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_1+t_2}{2}\right.$$

$$\left. - \sin\text{hyp}\,\frac{t_3}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_2+t_3}{3}\right)$$

$$= -\frac{\sin\text{hyp}\,\frac{t_1-t_2}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_2-t_3}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_3-t_1}{2}}{4\sin\text{hyp}\,\frac{t_1}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_2}{2}\sin\text{hyp}\,\frac{t_3}{2}}\sin\text{hyp}\,\tfrac{1}{2}(t_1+t_2+t_3).$$

Man findet in dieser Weise:

$$\begin{aligned} \varrho\, s_1 &= \sin\text{hyp}\,\tfrac{1}{2}(t_1+t_2+t_3), \\ \varrho\, s_2 &= i\cos\text{hyp}\,\tfrac{1}{2}(t_1+t_2+t_3), \\ \varrho\, s_3 &= 1 \end{aligned} \tag{42}$$

und hieraus:

$$\varrho\, s_0 = -\frac{1}{2b}(a_1^2+a_2^2) - \frac{1}{4b}(a_1^2-a_2^2)\cos\text{hyp}\,(t_1+t_2+t_3).$$

Der gleichzeitige Umkehr der Vorzeichen von zwei der Größen t_1, t_2, t_3 führt den Punkt y_1, y_2, y_3 in sich über. Die übrigen Lösungen unserer Gleichungen sind also:

$$\begin{aligned} \varrho\, s_1 &= \sin\text{hyp}\,\tfrac{1}{2}(t_1-t_2-t_3), \text{ usw.} \\ \varrho\, s_1 &= \sin\text{hyp}\,\tfrac{1}{2}(-t_1+t_2-t_3), \text{ usw.} \\ \varrho\, s_1 &= \sin\text{hyp}\,\tfrac{1}{2}(-t_1-t_2+t_3), \text{ usw.} \end{aligned} \tag{43}$$

Die Zerlegung der Größen $t_1+t_2+t_3$, $t_1-t_2-t_3$, $-t_1+t_2-t_3$, $-t_1-t_2+t_3$ in ihre Real- und Imaginärteile gibt uns also die Paare von Funktionen, welche der durch die Bedingung $a_{0\,0}=0$ gekennzeichneten Klasse von Hyperzykeln entspricht. Die Bestimmung der Größen t_1, t_2, t_3 wird durch die Gleichungen (34), (35), (36), (37), (24a), (40) auf die Auflösung einer kubischen Gleichung und einer quadratischen Gleichung zurückgeführt. Eine explizite Darstellung der neuen Funktionenpaare ist ersichtlich und selbstverständlich auch in diesem Fall möglich, aber zu einer wirklichen Beherrschung der neuen Funktionen reicht diese Darstellung nicht aus. Eine allgemeine Theorie der konfokalen Flächen zweiter Ordnung, in welcher für alle eingehende Konstanten auch komplexe Werte erlaubt sind, ist die Vorbedingung für eine solche Beherrschung.

4. Verallgemeinerungen. Man kann den Begriff Funktionenpaar in allgemeinerer Weise definieren. Wenn zwei Funktionen φ und ψ von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Gleichungen

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\ldots n}} g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_{\substack{j,k \\ 1\ldots n}} g^{jk} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k},$$

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\ldots n}} g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0,$$

(44)

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\ldots n}} g^{jk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_j g^j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0,$$

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\ldots n}} g^{jk} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_j g^j \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0$$

genügen, wo g^{jk} und g^j vorgeschriebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, und wenn $F(\varphi + i\psi) = U + iV$ eine analytische Funktion von $\varphi + i\psi$ ist, so genügen auch die beiden Funktionen $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diesen Gleichungen und bilden in diesem Sinne ein Paar. Mit der Potentialtheorie haben diese Paare im allgemeinen nichts zu tun. Wir werden uns deshalb hier nur noch kurz mit einem speziellen Fall beschäftigen, in welchem die Verbindung mit der Laplaceschen Gleichung bewahrt wird. Es sei $n = 4$, $g^{jk} = \delta_{jk}$, $g^j = 0$. Unsere Gleichungen sind dann:

$$\sum_{1\ldots 4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)^2 = \sum_{1\ldots 4} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right)^2, \qquad \sum_{1\ldots 4} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0,$$

(45)

$$\sum_{1\ldots 4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = 0, \qquad \sum_{1\ldots 4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} = 0.$$

Man kann sie nach derselben Methode integrieren, die im ersten Paragraphen zur Behandlung des entsprechenden dreidimensionalen Problems benutzt wurde. Wir setzen zu diesem Zweck wieder

$$\varphi + i\psi = \Phi.$$

Die Funktion Φ muß den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)^2 = 0, \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2} = 0 \tag{47}$$

genügen. Wir fassen zunächst die Gleichung (46) ins Auge. y_1, y_2, y_3, y_4 sei ein beliebiger Punkt des Raumes. Die hindurchgehende Integralfläche von (46) sei $\Phi =$ Konst. Wir setzen der Kürze wegen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = p_j, \qquad j = 1, 2, 3, 4.$$

Es ist dann

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 0.$$

y_1, y_2, y_3, y_4; p_1, p_2, p_3, p_4 bestimmen einen charakteristischen Streifen der Gleichung (46), auf welchem Φ, p_1, p_2, p_3, p_4 konstant sind, und dessen Projektion auf den x_1, x_2, x_3, x_4-Raum

$$\frac{x_1 - y_1}{p_1} = \frac{x_2 - y_2}{p_2} = \frac{x_3 - y_3}{p_3} = \frac{x_4 - y_4}{p_4}$$

der Fläche Φ = Konst. gehört. Sie schneidet also den Raum $x_1 = 0$ in einem Punkt

$$x_2 = y_2 - \frac{p_2}{p_1} y_1, \quad x_3 = y_3 - \frac{p_3}{p_1} y_1, \quad x_4 = y_4 - \frac{p_4}{p_1} y_1,$$

welcher gleichzeitig auf der Fläche liegt. Man hat auf der Fläche:

$$p_1^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} = \left(p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + p_4 \frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2 \Phi.$$

Wir ziehen jetzt die Gleichung (47) heran. Für den Schnitt unserer Integralfläche mit dem Raume $x_1 = 0$ gibt diese Gleichung:

$$p_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2}\right) + \left(p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + p_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + p_4 \frac{\partial}{\partial x_4}\right)^2 \Phi = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} \\ &+ \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ &- 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3 \partial x_4} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4 \partial x_2} = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Wenn wir

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)^2}} = L_j \qquad (j = 2, 3, 4) \tag{49}$$

setzen, so läßt sich diese Gleichung in der Form

$$\sum_j^{2,3,4} \frac{\partial L_j}{\partial x_j} = 0$$

oder

$$\underset{2,3,4}{\operatorname{div}} \vec{L} = 0 \tag{50}$$

schreiben. Aus den Gleichungen (49) folgt andererseits:

$$L^2 = 1, \quad \vec{L} \underset{2,3,4}{\operatorname{rot}} \vec{L} = 0. \tag{51}$$

Die Gleichung (49) sagt aus, daß die Größen L_j als die Richtungscosinus der Normalen eines Flächensystems Φ = Konst. aufgefaßt werden können. Die Gleichung (50) zeigt, daß diese Flächen Minimalflächen sind.

Man kann dieses leicht bestätigen. Die Gleichung (48) läßt sich auch in der Form

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)^2}}$$

$$+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_4}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)^2}} = 0$$

schreiben. Mit Hilfe der Beziehung $\Phi(x_2, x_3, x_4) = \text{Konst.}$ kann man x_4 als Funktion von x_2, x_3 darstellen. Man hat dann

$$\frac{\partial x_4}{\partial x_2} = P_2 = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_4}}, \quad \frac{\partial x_4}{\partial x_3} = P_3 = -\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_4}}.$$

Unter Benutzung dieser Formeln können wir unsere Gleichung auf die Gestalt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + P_2\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\frac{P_2}{\sqrt{1+P_2^2+P_3^2}} + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + P_3\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\frac{P_3}{\sqrt{1+P_2^2+P_3^2}} = 0$$

bringen. Fassen wir in dieser Gleichung P_2 und P_3 mit Hilfe der Beziehung $\Phi = \text{Konst.}$ als Funktionen von x_2, x_3 auf, nimmt die Gleichung die einfachere Form

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{P_2}{\sqrt{1+P_2^2+P_3^2}} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{P_3}{\sqrt{1+P_2^2+P_3^2}} = 0$$

an. Dies ist die Differentialgleichung der Minimalflächen.

Eine Minimalfläche ist bekanntlich durch zwei analytische Funktionen $f(u)$ und $f_1(u_1)$ bestimmt. Hier brauchen wir ein ganzes System von Minimalflächen. Wir müssen also annehmen, daß f außer von u, f_1 außer von u_1 noch von einem Parameter t abhängen, also $f = f(u, t)$, $f_1 = f_1(u_1, t)$. Die Weierstraßschen Formeln ergeben dann:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1-u^2}{2}\frac{\partial^2 f(u,t)}{\partial u^2} + u\frac{\partial f(u,t)}{\partial u} - f(u,t)\\
&\quad + \frac{1-u_1^2}{2}\frac{\partial^2 f_1(u_1,t)}{\partial u_1^2} + u_1\frac{\partial f_1(u_1,t)}{\partial u_1} - f_1(u_1,t),\\
x_3 &= \frac{i(1+u^2)}{2}\frac{\partial^2 f(u,t)}{\partial u^2} - iu\frac{\partial f(u,t)}{\partial u} + if(u.t)\\
&\quad - \frac{i(1+u_1^2)}{2}\frac{\partial^2 f_1(u_1,t)}{\partial u_1^2} + iu_1\frac{\partial f(u_1,t)}{\partial u_1} - if_1(u_1,t),\\
x_4 &= u\frac{\partial^2 f(u,t)}{\partial u^2} - \frac{\partial f(u,t)}{\partial u} + u_1\frac{\partial^2 f_1(u_1,t)}{\partial u_1^2} - \frac{\partial f_1(u_1,t)}{\partial u_1}.
\end{aligned} \tag{51}$$

Die zugehörigen Werte von L_2, L_3, L_4 sind:

$$L_2 = \frac{u+u_1}{u\,u_1+1}, \quad L_3 = \frac{i\,(u_1-u)}{u\,u_1+1}, \quad L_4 = \frac{u\,u_1-1}{u\,u_1+1}.$$

Wir hatten

$$x_2 = y_2 - \frac{p_2}{p_1}\,y_1 \text{ usw.},$$

also da

$$\frac{p_2}{p_1} = -\,i\,L_2 \text{ usw.}:$$

$$x_2 = y_2 + i\,L_2\,y_1 = y_2 + \frac{i\,(u+u_1)}{u\,u_1+1}\,y_1,$$

$$x_3 = y_3 + i\,L_3\,y_1 = y_3 - \frac{u_1-u}{u\,u_1+1}\,y_1,$$

$$x_4 = y_4 + i\,L_4\,y_1 = y_4 + \frac{i\,(u\,u_1-1)}{u\,u_1+1}\,y_1.$$

Indem wir diese Werte in (51) einsetzen und schließlich wieder die unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 (statt y_1, y_2, y_3, y_4) nennen, erhalten wir das folgende Ergebnis unserer Erörterung:

Um zwei Funktionen φ und ψ zu bestimmen, welche im Sinne der Gleichungen (45) ein Paar bilden, hat man aus den Beziehungen

$$x_2 + \frac{i\,(u+u_1)}{u\,u_1+1}\,x_1 = \frac{1-u^2}{2}\,\frac{\partial^2 f(u,t)}{\partial u^2} + u\,\frac{\partial f(u,t)}{\partial u} - f(u,t)$$
$$+ \frac{1-u_1^2}{2}\,\frac{\partial^2 f_1(u_1,t)}{\partial u_1^2} + u_1\,\frac{\partial f_1(u_1,t)}{\partial u_1} - f_1(u_1,t),$$

$$x_3 - \frac{u_1-u}{u\,u_1+1}\,x_1 = \frac{i\,(1+u^2)}{2}\,\frac{\partial^2 f(u,t)}{\partial u^2} - i\,u\,\frac{\partial f(u,t)}{\partial u} + i\,f(u,t)$$
$$- \frac{i\,(1+u_1^2)}{2}\,\frac{\partial^2 f_1(u_1,t)}{\partial u_1^2} + i\,u_1\,\frac{\partial f_1(u_1,t)}{\partial u_1} - i\,f_1(u_1,t),$$

$$x_4 + \frac{i\,(u\,u_1-1)}{u\,u_1+1}\,x_1 = u\,\frac{\partial^2 f(u,t)}{\partial u^2} - \frac{\partial f(u,t)}{\partial u} + u_1\,\frac{\partial^2 f_1(u_1,t)}{\partial u_1^2} - \frac{\partial f_1(u_1,t)}{\partial u_1}$$

u und u_1 wegzuschaffen und t als Funktion von x_1, x_2, x_3, x_4 auszudrücken. Die Zerlegung von t in den Real- und Imaginärteil ergibt dann ein Funktionenpaar.

Es gibt bekanntlich zwei Klassen von Minimalflächen, welche nicht durch die Weierstraßschen Formeln dargestellt werden können, die von isotropen Geraden erzeugten Zylinderflächen und die Ebenen. Die Zylinderflächen werden durch die Formeln

$$x_1 = \frac{1-u^2}{2}\,\Theta(\alpha) + \frac{1}{2}\int (1-u_1^2)\,F_1(u_1)\,d\,u_1,$$

$$x_2 = \frac{i\,(1+u^2)}{2}\,\Theta(\alpha) - \frac{i}{2}\int (1+u_1^2)\,F_1(u_1)\,d\,u_1,$$

$$x_3 = u\,\Theta(\alpha) + \int u_1\,F(u_1)\,d\,u_1,$$

wo u eine Konstante ist, dargestellt. Man erhält die entsprechenden Funktionenpaare, indem man $\Theta(\alpha)$ und $F_1(u_1)$ als Funktionen eines Parameters t auffaßt und vermittelst der Gleichungen

$$x_2 + \frac{i(u+u_1)}{u u_1 + 1} x_1 = \frac{1-u^2}{2}\Theta(\alpha, t) + \frac{1}{2}\int (1-u_1^2) F_1(u_1)\, d u_1,$$

$$x_3 + \frac{u-u_1}{u u_1 + 1} x_1 = \frac{i(1+u^2)}{2}\Theta(\alpha, t) - \frac{i}{2}\int (1+u_1^2) F_1(u_1)\, d u_1,$$

$$x_4 + \frac{i(u u_1 - 1)}{u u_1 + 1} x_1 = u\Theta(\alpha, t) + \int u_1 F_1(u_1)\, d u_1$$

t als Funktion von x_1, x_2, x_3, x_4 ausdrückt und dann in gewöhnlicher Weise t in den Real- und Imaginärteil zerlegt.

Die Ebenen geben endlich zu einer Theorie Anlaß, die mit der oben gegebenen Theorie der dreidimensionalen Funktionenpaare vollständig analog ist.

(Eingegangen am 7. August 1933.)

Proportionality conditions in Waring's problem.

By

E. Maitland Wright in Oxford.

1. An extension of Waring's problem which seems of interest is the following. Can every sufficiently large integer be expressed as the sum of s k-th powers almost proportional to s arbitrarily assigned positive numbers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$? It is clear that a precise meaning must first be given to the expression "almost proportional". Let us take

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = 1,$$

as we may do without loss of generality, since we are only concerned with the proportions of the numbers λ_i. In a recent paper[1]) we said that n can be expressed as the sum of s k-th powers almost proportional to $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ if the equation

$$n = m_1^k + m_2^k + \ldots + m_s^k \tag{1.01}$$

has a solution in positive integers such that

$$|\lambda_i n - m_i^k| = o(n). \tag{1.02}$$

With this definition we proved that, if $k \geqq 3$ and $s \geqq (k-2)\,2^{k-1} + 5$, then every sufficiently large n is the sum of s k-th powers almost proportional to $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. The method used was an application of the idea of weighting to the Hardy-Littlewood method for Waring's problem. Certain results for almost all n, analogous to those of Hardy and Littlewood, were also found.

In the present paper, we replace (1.02) by the stricter condition

$$|\lambda_i n - m_i^k| = O(n^{1-\beta}), \tag{1.03}$$

where $\beta > 0$; and we prove our results for all values of β less than a certain upper bound. The appropriate method is a modification of that used for Waring's problem by Vinogradoff, Landau and Gelbke. We confine ourselves to proving results valid for all large n, and find also asymptotic formulae for the number of solutions of (1.01) which satisfy our proportionality conditions. It seems best to postpone the question of results for almost all integers for the present, but these can certainly be found.

---

[1]) Wright, An Extension of Waring's Problem. *Phil. Trans. Royal. Soc.* **232** (1933), S. 1—26.

The case of five or more squares has been discussed by the present method[2]). It is sufficient to have $s \geqq 5$ and

$$0 < \beta < \alpha(2, s) = \min\left\{\frac{s-4}{4(s-3)}, \frac{s-2}{2(2s-1)}\right\};$$

then every sufficiently large n can be expressed as the sum of s squares, such that (1. 03) is satisfied. In the case of four squares, each method yields a result apparently unobtainable by means of the other. The method based on that of Hardy and Littlewood enables us to prove that every n with a sufficiently large odd factor may be expressed in the form

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \tag{1. 04}$$

with

$$|\lambda_i n - m_i^2| = o(n).$$

On the other hand, the method of this paper leads to the theorem that almost all n are expressible in the form (1. 04) with

$$|\lambda_i n - m_i^2| = O(n^{1-\beta}),$$

if $0 < \beta < \frac{1}{5}$. I hope to publish proofs of these results later.

2. In what follows, k, s, i, n, h, j are positive integers,

$$a = \frac{1}{k}, \quad K = 2^{k-1}, \quad b = \frac{1}{K+1}, \quad c = \frac{1}{K}, \quad s_0 = (k-2)K + 5,$$

$$k \geqq 3, \quad s \geqq s_0, \quad 1 \leqq i \leqq s,$$

and we write $\prod$ for $\prod_{i=1}^{s}$. Also

$$\beta, \lambda_i, A_i, A_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

are any assigned positive numbers subject only to the conditions that

$$0 < \beta < \left(\frac{k-2}{2k-3}\right) a, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = 1.$$

Later a more restricted condition will be imposed on β. We write

$$\alpha_1 = \frac{(s-2K)(K+1)a}{(kK+1)s + kK - 2K^2 - 3K}$$

$$\alpha_2 = \frac{(s-s_0+1)a}{s+K-4}, \quad \alpha_3 = \frac{(s-K)a}{ks-K+k-1},$$

$$\alpha = \alpha(k, s) = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

We see that

$$\alpha \leqq \alpha_3 < a^2.$$

---

[2]) Representation of a Number as a Sum of Five or More Squares. *Quart. J. of Math.* (Oxford series), 4 (1933), p. 37—51 and 228—232.

We write also

$$\gamma = \gamma(k, s, \beta) = sa - 1 - (s-1)\beta,$$

$$A = \sum_{i=1}^{s} A_i, \qquad A' = \sum_{i=1}^{s} A_i',$$

$$\tau(z) = z^{s-1} (z > 0), \qquad \tau(z) = 0 (z \leqq 0),$$

$$T = T(A_1, \ldots, A_s, A_1' \ldots, A_s') = \tau(A') - \sum_{1 \leqq i \leqq s} \tau(A' - A_i - A_i')$$

$$+ \sum_{1 \leqq i < i' \leqq s} \tau(A' - A_i - A_i' - A_{i'} - A_{i'}')$$

$$- \sum_{1 \leqq i < i' < i'' \leqq s} \ldots + (-1)^s \tau(-A).$$

We use ε to denote a positive number, to be thought of as small; the choice of ε will be subsequent to that of s and β. D and d are positive numbers, whose values vary from one occurrence to another. D depends at most on

$$k, s, \beta, \varepsilon, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, A_1, \ldots, A_s, A_1', \ldots, A_s',$$

while d depends on s and β only. The constant implied in the $O(\ )$ notation is of the type D. The integral part of v is denoted by $[v]$.

We write

$$\varrho = \exp(2\pi i p/q), \quad (p, q) = 1, \quad S_\varrho = \sum_{h=1}^{q} \varrho^{h^k},$$

$$A_s(q, j) = q^{-s} \sum_{\varrho} S_\varrho^s \varrho^{-j},$$

where ϱ runs through all primitive q-th roots of unity:

$$\mathfrak{S}(j, l) = \sum_{1 \leqq q \leqq l} A_s(q, j),$$

$$\mathfrak{S}(j) = \sum_{q=1}^{\infty} A_s(q, j),$$

$$N_i = [\lambda_i n + A_i n^{1-\beta}], \quad N_i' = [\lambda_i n - A_i' n^{1-\beta} + 1].$$

We define $r(n)$ as the number of solutions of

$$n = m_1^k + m_2^k + \ldots + m_s^k,$$

such that

$$m_i \geqq 0, \ \lambda_i n - A_i' n^{1-\beta} < m_i^k \leqq \lambda_i n + A_i n^{1-\beta} \ (i = 1, 2, \ldots, s),$$

or what is the same thing, such that

$$N_i' \leqq m_i^k \leqq N_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

We use $\nu(n)$ to denote the number of solutions of the equation

(2. 01) $$n = j_1 + j_2 + \ldots + j_s,$$

which satisfy the conditions

$$N_i' \leqq j_i \leqq N_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{2.02}$$

We write

$$f_i(x) = \sum_{N_i' \leqq h^k \leqq N_i} x^{h^k},$$

$$\psi_{\varrho, i}(x) = \frac{a S_\varrho}{q} \sum_{j=N_i'}^{N_i} j^{a-1} \left(\frac{x}{\varrho}\right)^j.$$

Then $r(n)$ is the coefficient of x^n in $\Pi f_i(x)$. We define $\mu(n)$ as the coefficient of x^n in

$$\Pi \{\psi_{1, i}(x)\}.$$

Then the coefficient of x^n in

$$\Pi \{\psi_{\varrho, i}(x)\}$$

is

$$q^{-s} S_\varrho^s \varrho^{-n} \mu(n).$$

We write $m = n^{a-\beta}$ and take the Farey dissection of order $[m^{k-1}]$ on the circle $\mathfrak{K}(|x| = 1)$. Associated with every point ϱ on $\mathfrak{K}$ for which $q \leqq m^{k-1}$, we have a Farey arc. For each ϱ we write

$$x = \varrho e^{2\pi i y}, \quad |y| \leqq \tfrac{1}{2}$$

on the circle. Then we know that $|y| < q^{-1} m^{1-k}$ on the arc associated with ϱ, while every point for which $|y| \leqq \frac{1}{2} q^{-1} m^{1-k}$ certainly lies on this arc. We consider three kinds of arcs, namely

(i) $\mathfrak{M}_1$ $(q \leqq m)$,
(ii) $\mathfrak{M}_2$ $(m < q \leqq n^{a+(k-2)\beta})$,
(iii) $\mathfrak{M}_3$ $(n^{a+(k-2)\beta} < q \leqq m^{k-1})$.

Since

$$0 < \beta < \left(\frac{k-2}{2k-3}\right) a,$$

there are arcs of every kind when n is sufficiently large. We write

$$y_0 = q^{-bK} n^{b(aK+k\beta)-1},$$

and divide $\mathfrak{M}_1$ into two parts,

$$\mathfrak{M}_1' \ (|y| \leqq y_0),$$
$$\mathfrak{M}_1' \ (|y| > y_0).$$

We see that, for $\mathfrak{M}_1$,

$$y_0 = q^{-bK} n^{b(aK+k\beta)-1} = \left(\frac{n^{a-\beta}}{q}\right)^{bK} n^{b\beta(K+k)-1} \geqq n^{b\beta(K+1)-1} = n^{\beta-1}.$$

We take n sufficiently large to ensure that $N_i' > Dn$. We have

$$N_i - N_i' < D n^{1-\beta},$$
$$N_i^a - N_i'^a = (\lambda_i n)^a \{(1 + O(n^{-\beta}))^a - (1 + O(n^{-\beta}))^a\} < D n^{a-\beta} = D m.$$

Known results.

3. 1. Lemma 1[3]). *If ϱ is a primitive q-th root of unity, t and r are integers and t is positive, then*

$$\left|\sum_{h=r+1}^{r+t} \varrho^{h^k}\right| < D q^{\varepsilon} t^{\varepsilon} (t^{1-c} + t q^{-c} + q^c t^{1-ck}).$$

Lemma 2[4]). *We have* $|S_\varrho| < D q^{1-a}$.

Lemma 3. *If $s \geqq s_0$, then she series for $\mathfrak{S}(n)$ is convergent,*

$$|\mathfrak{S}(n)| = D,$$

and

$$|\mathfrak{S}(n) - \mathfrak{S}(n, m)| < D m^{2-sa}.$$

The first two statements are known[5]). We have

$$|A_s(q, n)| \leqq q^{-s} \sum_{\varrho} |S_\varrho|^s \leqq D q^{1-sa}.$$

Hence,

$$|\mathfrak{S}(n) - \mathfrak{S}(n, m)| \leqq \sum_{q>m} |A_s(q, n)| \leqq D \sum_{q>m} q^{1-sa} < D m^{2-sa},$$

since $s \geqq s_0 > 2k + 1$.

Lemma 4[6]). *If $s \geqq s_0$,* then $\mathfrak{S}(n) > D$.

3. 2. Lemma 5. *We have*

$$\left| a \sum_{t=1}^{j} t^{a-1} - j^a \right| < D.$$

Lemma 6[7]). *If $s \geqq 2$, then $T > D$.*

Lemma 7[8]). *If $s \geqq 2$, then*

$$\left| \nu(n) - \frac{T n^{(s-1)(1-\beta)}}{\Gamma(s)} \right| < D n^{(s-2)(1-\beta)}.$$

Lemma 8. *If $s \geqq 2$, then*

$$\left| \mu(n) - \frac{T n^{\gamma}}{k^s \Gamma(s) (\Pi \lambda_i)^{1-a}} \right| < D n^{\gamma-\beta} + D n^{\gamma-1+\beta}.$$

We have

$$\mu(n) = a^s \Sigma (\Pi j_i^{a-1}), \quad \nu(n) = \Sigma 1,$$

the summations extending over all sets of integers $j_1, j_2, \ldots, j_s$ which satisfy (2. 01) and (2. 02). For such values of j_i,

$$\Pi N_i' \leqq \Pi j_i \leqq \Pi N_i.$$

---

[3]) Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, I, Satz 267.
[4]) *Ibid.*, Satz 315.
[5]) *Ibid.*, Satz 316, 319.
[6]) *Ibid.*, Satz 325.
[7]) *Quart. J. of Math.* (Oxford series), 4 (1933), Lemma 3.
[8]) *Ibid.*, Lemma 2.

Now

$$\Pi N_i' = \Pi [\lambda_i n - A_i' n^{1-\beta} + 1] = n^s (\Pi \lambda_i) \{1 + O(n^{-\beta})\},$$
$$\Pi N_i = \Pi (\lambda_i n + A_i n^{1-\beta}] = n^s (\Pi \lambda_i) \{1 + O(n^{-\beta})\}.$$

Hence,

$$\Pi j_i^{a-1} = n^{s(a-1)} (\Pi \lambda_i)^{a-1} \{1 + O(n^{-\beta})\},$$

and so

$$\mu(n) = \frac{a^s \nu(n)}{(\Pi \lambda_i)^{1-a} n^{s(1-a)}} \{1 + O(n^{-\beta})\}$$
$$= \frac{T n^{\gamma}}{k^s \Gamma(s) (\Pi \lambda_i)^{1-a}} \{1 + O(n^{-\beta}) + O(n^{\beta-1})\}.$$

Since $T < D$, the result of the lemma follows, and we have also

$$\mu(n) < D n^{\gamma}.$$

Behaviour of $f_i(x)$ and $\psi_{\varrho,i}(x)$ on $\mathfrak{R}$.

4.1. Lemma 9. *We have*

$$|\psi_{\varrho,i}(x)| < D q^{-a} n^{a-1} \min(n^{1-\beta}, |y|^{-1}).$$

Since

$$\psi_{\varrho,i}(x) = \frac{a S_{\varrho}}{q} \sum_{j=N_i'}^{N_i} j^{a-1} \left(\frac{x}{\varrho}\right)^j,$$

we have, by Lemma 2,

$$|\psi_{\varrho,i}(x)| < D q^{-a} \sum_{j=N_i'}^{N_i} j^{a-1} < D q^{-a} n^{a-1} (N_i - N_i') < D q^{-a} n^{a-\beta}.$$

Also, if we write

$$w(j) = \sum_{t=N_i'}^{j} e^{2\pi i y t} \qquad (N_i' \leqq j),$$

we have

$$|w(j)| \leqq \frac{2}{|1 - e^{2\pi i y}|} < D |y|^{-1}$$

and

$$\sum_{j=N_i'}^{N_i} j^{a-1} \left(\frac{x}{\varrho}\right)^j = N_i'^{a-1} w(N_i') + \sum_{i=N_i'+1}^{N_i} j^{a-1} (w(j) - w(j-1))$$
$$= \sum_{j=N_i'}^{N_i - 1} \{j^{a-1} - (j+1)^{a-1}\} w(j) + N_i^{a-1} w(N_i).$$

Hence,

$$|\psi_{\varrho,i}(x)| \leqq Dq^{-a}|y|^{-1}\left\{\sum_{j=N_i'}^{N_i}|j^{a-1}-(j+1)^{a-1}|+N_i^{a-1}\right\}$$
$$= Dq^{-a}|y|^{-1}N_i'^{a-1} < Dq^{-a}n^{a-1}|y|^{-1}.$$

4. 2. Lemma 10. *On any arc $\mathfrak{M}_2$ or $\mathfrak{M}_3$, we have*

$$|f_i(x)| \leqq Dn^{(a-\beta)(1-c)+\varepsilon}(1+n^{1-\beta}|y|).$$

Let us write

$$u(j) = \sum_{N_i' \leqq h^k \leqq j} \varrho^{h^k} \qquad (N_i' \leqq j \leqq N_i).$$

The number of terms in $u(j)$ is less than or equal to

$$j^a - N_i'^a + 1 \leqq N_i^a - N_i'^a + 1 < Dn^{a-\beta} = Dm.$$

Hence, by Lemma 1,

$$|u(j)| < Dq^{\varepsilon}m^{\varepsilon}(m^{1-c}+mq^{-c}+q^c m^{1-ck}).$$

For $\mathfrak{M}_2$ or $\mathfrak{M}_3$, we have $m < q \leqq m^{k-1}$, and so

$$|u(j)| < Dm^{1-c+k\varepsilon}.$$

Now

$$f_i(x) = \sum_{N_i' \leqq h^k \leqq N_i} \varrho^{h^k}\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{h^k}$$
$$= u(N_i')\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{N_i'} + \sum_{j=N_i'+1}^{N_i}\{u(j)-u(j-1)\}\left(\frac{x}{\varrho}\right)^j$$
$$= \sum_{j=N_i'}^{N_i-1} u(j)\left(\frac{x}{\varrho}\right)^j\left(1-\frac{x}{\varrho}\right) + u(N_i)\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{N_i}.$$

Hence,

$$|f_i(x)| \leqq Dm^{1-c+k\varepsilon}\left\{(N_i-N_i')\left|1-\frac{x}{\varrho}\right|+1\right\}$$
$$< Dn^{(a-\beta)(1-c)+\varepsilon}(1+n^{1-\beta}|y|).$$

4. 3. Lemma 11. *On any arc $\mathfrak{M}$, if $y \neq 0$, we have*

$$|f_i(x)| < Dn^{(a-\beta)(1-ck)+\varepsilon}(q|y|)^{-c-\varepsilon}.$$

If x lies on the arc $\mathfrak{M}$ corresponding to

$$\varrho = e^{2\pi i\frac{p}{q}},$$

we have

$$x = e^{2\pi i\left(\frac{p}{q}+y\right)},$$

where

$$0 < |y| < \frac{1}{q\,m^{k-1}}.$$

Hence,

$$\frac{2}{q|y|} > 2m^{k-1} > 1,$$

and, by the theory of the Farey dissection, we have two integers P, Q and a number Y such that

$$\frac{P}{Q} + Y = \frac{p}{q} + y,$$

$$0 \leqq P < Q \leqq \frac{2}{q|y|} \qquad ((P,Q) = 1),$$

$$|Y| < \frac{q|y|}{2Q} < \frac{1}{2Qm^{k-1}}. \tag{4.31}$$

First suppose that $Q \leqq m^{k-1}$. Then there is an arc of our original Farey dissection corresponding to $\frac{P}{Q}$. By (4.31), x must lie at an interior point of this arc, and so this arc must be the original arc $\mathfrak{M}$. But then

$$p = P,\ q = Q,\ y = Y,\ |Y| = \frac{q|y|}{Q} > \frac{q|y|}{2Q},$$

which contradicts (4.31).

We see then that $Q > m^{k-1}$. We now write

$$\sigma = \exp(2\pi i P/Q),\ U(j) = \sum_{N_i' \leqq h^k \leqq j} \sigma^{h^k} \quad (N_i' \leqq j \leqq N_i).$$

Then $U(j)$ contains at most

$$N_i^a - N_i'^a + 1 < Dm$$

terms, and we have

$$\begin{aligned} |U(j)| &< DQ^{\varepsilon} m^{\varepsilon}(m^{1-c} + mQ^{-c} + Q^c m^{1-ck}) \\ &< DQ^{c+\varepsilon} m^{1-ck+\varepsilon}, \end{aligned}$$

since $Q > m^{k-1}$. Also,

$$\begin{aligned} f_i(x) &= \sum_{N_i' \leqq h^k \leqq N_i} x^{h^k} \\ &= \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{N_i'} U(N_i') + \sum_{j=N_i'+1}^{N_i} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^j \{U(j) - U(j-1)\} \\ &= \left(1 - \frac{x}{\sigma}\right) \sum_{j=N_i'}^{N_i-1} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^j U(j) + \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{N_i} U(N_i). \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned} |f_i(x)| &\leqq \left|1 - \frac{x}{\sigma}\right| \sum_{j=N_i'}^{N_i-1} |U(j)| + |U(N_i)| \\ &\leqq DQ^{c+\varepsilon} m^{1-ck+\varepsilon}(1 + n^{1-\beta}|Y|) \\ &< DQ^{c+\varepsilon} m^{1-ck+\varepsilon} < Dn^{\varepsilon} m^{1-ck} (q|y|)^{-c-\varepsilon}, \end{aligned}$$

since

$$n^{1-\beta}|Y| \leqq \frac{Dn^{1-\beta}}{Qm^{k-1}} < Dn^{1-\beta-2(1-\alpha)+2(k-1)\beta} < D,$$

provided

$$\beta < \frac{(k-2)\alpha}{2k-3}.$$

4.4. Lemma 12. *We have*

$$|f_i(x) - \psi_{\varrho,i}(x)| < Dq^{1-c+\varepsilon}(1 + n^{1-\beta}|y|).$$

Let us write

$$v(j) = \sum_{1 \leqq h^k \leqq j} \varrho^{hk}, \quad V(j) = \alpha q^{-1} S_\varrho \sum_{1 \leqq m \leqq j} m^{\alpha-1}.$$

Then

$$v(j) = \sum_{1 \leqq h \leqq q\left[\frac{j^\alpha}{q}\right]} \varrho^{hk} + \sum_{q\left[\frac{j^\alpha}{q}\right] < h \leqq [j^\alpha]} \varrho^{hk}.$$

The second part contains less than q terms, and so, by Lemma 1, is less than $Dq^{1-c+\varepsilon}$. The value of the first part is

$$S_\varrho\left[\frac{j^\alpha}{q}\right].$$

Hence,

$$\left|v(j) - \left[\frac{j^\alpha}{q}\right] S_\varrho\right| < Dq^{1-c+\varepsilon}.$$

By Lemma 5,

$$\left|V(j) - \left(\frac{j^\alpha}{q}\right) S_\varrho\right| < D\left|\frac{S_\varrho}{q}\right| < D.$$

Also,

$$\left|\left[\frac{j^\alpha}{q}\right] S_\varrho - \left(\frac{j^\alpha}{q}\right) S_\varrho\right| < |S_\varrho| < Dq^{1-\alpha}.$$

Hence,

$$|v(j) - V(j)| < Dq^{1-c+\varepsilon}.$$

Now

$$f_i(x) = \sum_{N_i' \leqq h^k \leqq N_i} x^{hk} = \sum_{N_i' \leqq j \leqq N_i} \{v(j) - v(j-1)\}\left(\frac{x}{\varrho}\right)^j$$

$$= \left(1 - \frac{x}{\varrho}\right) \sum_{j=N_i'}^{N_i-1} v(j)\left(\frac{x}{\varrho}\right)^j - v(N_i' - 1)\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{N_i'} + v(N_i)\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{N_i},$$

and similarly

$$\psi_{\varrho,i}(x) = \left(1 - \frac{x}{\varrho}\right) \sum_{j=N_i'}^{N_i-1} V(j)\left(\frac{x}{\varrho}\right)^j - V(N_i' - 1)\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{N_i'} + V(N_i)\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{N_i}.$$

Hence,

$$|f_i(x) - \psi_{\varrho,i}(x)| \leqq \left|1 - \frac{x}{\varrho}\right| \sum_{j=N_i'}^{N_i-1} |v(j) - V(j)|$$
$$+ |v(N_i' - 1) - V(N_i' - 1)| + |v(N_i) - V(N_i)|$$
$$\leqq D q^{1-c+\varepsilon} \left\{\left|1 - \frac{x}{\varrho}\right| (N_i - N_i') + 1\right\}$$
$$< D q^{1-c+\varepsilon} (n^{1-\beta}|y| + 1).$$

Lemma 13. *If* $|y| \leqq n^{\beta-1}$, *then*

$$|\Pi f_i - \Pi \psi_{\varrho,i}| < D q^{s\varepsilon} (q^{s(1-c)} + q^{1-c-\alpha(s-1)} n^{(s-1)(\alpha-\beta)}).$$

If $|y| \geqq n^{\beta-1}$, *then*

$$|\Pi f_i - \Pi \psi_{\varrho,i}| < D q^{s\varepsilon} (q^{s(1-c)} n^{s(1-\beta)} |y|^s$$
$$+ q^{1-c-\alpha(s-1)} n^{(\alpha-1)(s-1)+1-\beta} |y|^{2-s}).$$

If $s = 1$, the lemma follows at once from Lemma 12. If $s > 1$, we write

$$f_i = \psi_{\varrho,i} + \Psi_{\varrho,i}.$$

Then

$$\Pi f_i - \Pi \psi_{\varrho,i} = \Pi(\psi_{\varrho,i} + \Psi_{\varrho,i}) - \Pi \psi_{\varrho,i},$$

which gives on multiplication a sum of $2^s - 1$ terms. Each term consists of s factors, not more than $s - 1$ of which are of the form $\psi_{\varrho,i}$. A term which contains just r factors of the form $\psi_{\varrho,i}$ is less in absolute value than

(4. 41) $$D q^{-r\alpha} n^{r(\alpha-1)} q^{(s-r)(1-c+\varepsilon)} \min(n^{r(1-\beta)}, |y|^{-r}) \max(1, (n^{1-\beta}|y|)^{s-r}),$$

by Lemmas 9 and 12. When $|y| \leqq n^{\beta-1}$, this is less than

$$D q^{s(1-c+\varepsilon)-r(1+\alpha-c)} n^{r(\alpha-\beta)},$$

and so

$$|\Pi f_i - \Pi \psi_{\varrho,i}| < D q^{s(1-c+\varepsilon)} \sum_{r=0}^{s-1} (q^{-r(1+\alpha-c)} n^{r(\alpha-\beta)})$$
$$< D q^{s(1-c+\varepsilon)} \{1 + q^{-(s-1)(1+\alpha-c)} n^{(s-1)(\alpha-\beta)}\}.$$

When $|y| \geqq n^{\beta-1}$, the expression (4. 41) is less than

$$D(q^{1-c+\varepsilon} n^{1-\beta} |y|)^s (q^{-\alpha-1+c} |y|^{-2} n^{\alpha+\beta-2})^r,$$

and so

$$|\Pi f_i - \Pi \psi_{\varrho,i}| < D(q^{1-c+\varepsilon} n^{1-\beta} |y|)^s \{1 + (q^{-\alpha-1+c} n^{\alpha+\beta-2} |y|^{-2})^{s-1}\}.$$

Final Lemmas.

5. 1. So far the only restriction on β has been

$$0 < \beta < \left(\frac{k-2}{2k-3}\right) \alpha.$$

We now introduce the restriction

$$0 < \beta < \alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2),$$

and write

$$\delta = \alpha - \beta > 0.$$

We then choose ε so that

$$(2s+1)\varepsilon < \delta.$$

We write also

$$E_1 = n^{\beta-1+s\varepsilon} \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{s-sc},$$

$$E_2 = n^{(s-1)(\alpha-\beta)-1+\beta+s\varepsilon} \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{1-c-\alpha(s-1)},$$

$$E_3 = n^{s(1-\beta)+s\varepsilon} \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{s-sc} y_0^{s+1},$$

$$E_4 = n^{s(\alpha-\beta)(1-ck)+2s\varepsilon} \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{-sc} y_0^{1-sc}.$$

Lemma 14. *We have*

$$J_1 = \sum_{\mathfrak{M}_1'} \int_{\mathfrak{M}_1'} |\Pi f_i(x) - \Pi \psi_{\varrho,i}(x)| \, |dx| < D(E_1 + E_2 + E_3).$$

By Lemma 13, we have

$$\int_{\mathfrak{M}_1'} |\Pi f_i - \Pi \psi_{\varrho,i}| \, |dx|$$

$$< D q^{s\varepsilon} \left\{ \int_0^{n^{\beta-1}} (q^{s-sc} + q^{1-c-\alpha(s-1)} n^{(s-1)(\alpha-\beta)}) \, dy \right.$$

$$\left. + \int_{n^{\beta-1}}^{y_0} (q^{s-sc} n^{s(1-\beta)} y^s + q^{1-c-\alpha(s-1)} n^{s\alpha-s-\alpha+2-\beta} y^{2-s}) \, dy \right\}$$

$$< D q^{s\varepsilon} (n^{\beta-1} q^{s-sc} + n^{(s-1)(\alpha-\beta)-1+\beta} q^{1-c-\alpha(s-1)}$$

$$+ n^{s(1-\beta)} q^{s-sc} y_0^{s+1}).$$

Since $q^{s\varepsilon} < n^{s\varepsilon}$, the result follows at once on summing.

Lemma 15. *We have*

$$J_2 = \sum_{\mathfrak{M}_1} \int_{\mathfrak{M}_1''} |\Pi f_i| \, |dx| < D E_4.$$

By Lemma 11,

$$\int_{\mathfrak{M}_1''} |\Pi f_i| \, |dx| < D \int_{y_0}^{\infty} n^{s(\alpha-\beta)(1-ck)+s\varepsilon} (qy)^{-sc-s\varepsilon} \, dy$$

$$< D n^{s(\alpha-\beta)(1-ck)+s\varepsilon} q^{-sc-s\varepsilon} y_0^{1-sc-s\varepsilon}$$

$$< D n^{s(\alpha-\beta)(1-ck)+2s\varepsilon} q^{-sc} y_0^{1-sc},$$

since

$$q y_0 = q^{1-bK} n^{b(aK+k\beta)-1} = q^b n^{b(aK+k\beta)-1} > n^{-1}, \qquad (q y_0)^{-s\varepsilon} < n^{s\varepsilon}.$$

Lemma 16. *If $s \geqq s_0$ and $0 < \beta < \alpha$, then*

$$J_1 + J_2 < D n^{\gamma-\delta}.$$

From Lemmas 14 and 15, it is sufficient to prove that

$$E_t < D n^{\gamma-\delta} \qquad (t = 1, 2, 3, 4).$$

We have

$$E_2 = n^{(s-1)(\alpha-\beta)-1+\beta+s\varepsilon} \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{1-c-a(s-1)}$$

$$\leqq n^{\gamma-(\alpha-\beta)+s\varepsilon} \sum_{q=1}^{[m]} q^{2-c-a(s-1)}.$$

If $k = 3$, and $s = s_0 = 9$, then

$$\sum_{q=1}^{[m]} q^{2-c-a(s-1)} = \sum_{q=1}^{[m]} q^{-\frac{11}{12}} < D m^{\frac{1}{12}},$$

and so

$$E_2 \leqq n^{\gamma-\frac{11}{12}(\alpha-\beta)}.$$

If $k = 3$, $s \geqq s_0 + 1$ or if $k \geqq 4$, $s \geqq s_0$, then $s \geqq 3k + 1$, and so

$$2 - c - a(s-1) < -1.$$

Hence,

$$E_2 < D n^{\gamma-(\alpha-\beta)+s\varepsilon}.$$

Now

$$\delta < \alpha \leqq \alpha_3 < a^2, \qquad a - \beta = a - \alpha + \delta \geqq a - a^2 + \delta > 2a^2 + \delta > 3\delta.$$

Hence, in all cases,

$$E_2 < D n^{\gamma-2\delta+s\varepsilon} < D n^{\gamma-\delta}.$$

Since $y_0 \geqq n^{\beta-1}$,

$$n^{\beta-1} q^{s-sc} \leqq n^{s(1-\beta)} q^{s-sc} y_0^{s+1},$$

and so

$$E_1 \leqq E_3. \tag{5.11}$$

Again y_0 is so chosen that

$$n^{s(1-\beta)} q^{s-sc} y_0^{s+1} = n^{s(\alpha-\beta)(1-ck)} q^{-sc} y_0^{1-sc}.$$

Hence,

$$E_4 = n^{s\varepsilon} E_3. \tag{5.12}$$

Substituting for y_0 in E_3, we have

$$E_3 = n^{s(1-\beta)+s\varepsilon} \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{s-sc} y_0^{s+1}$$

$$= n^{s(1-\beta)+b(s+1)(aK+k\beta)-s-1+s\varepsilon} \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{s-sc-bK(s+1)}.$$

Now

$$s - sc - bK(s+1) = -bc(s+K^2) \gtrless -2,$$

according as

$$s \gtrless K^2 + 2K.$$

Then, if $s \geqq K^2 + 2K$,

$$\sum_{\mathfrak{M}_1} q^{s-sc-bK(s+1)} \leqq \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{-2} < \sum_{q=1}^{[m]} q^{-1} < D n^{\varepsilon}.$$

Also, $\alpha \leqq \alpha_3$, and so

$$\begin{aligned} & s(1-\beta)+b(s+1)(aK+k\beta)-s-1 \\ &= \gamma - b\{(s-K)a-\beta(ks-K+k-1)\} \\ &= \gamma - b\{(s-K)a-\alpha(ks-K+k-1)\} - \delta b(ks-K+k-1) \\ &\leqq \gamma - \delta b(ks-K+k-1). \end{aligned}$$

Now

$$b(ks-K+k-1) > b(kK-K+k-1) = k-1 \geqq 2.$$

Hence, if $s \geqq K^2+2K$,

$$E_3 < C n^{\gamma - 2\delta + (s+1)\varepsilon}.$$

If $s < K^2+2K$,

$$\sum_{\mathfrak{M}_1} q^{s-sc-bK(s+1)} = \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{-bc(s+K^2)} < D m^{2-bc(s+K^2)} = D n^{bc(\alpha-\beta)(K^2+2K-s)}.$$

Also, $\alpha \leqq \alpha_1$, and so

$$\begin{aligned} & s(1-\beta)+(s+1)b(aK+k\beta)-s-1+bc(K^2+2K-s)(\alpha-\beta) \\ &= \gamma - bc\{a(K+1)(s-2K)-\beta((kK+1)s+kK-2K^2-3K)\} \\ &\leqq \gamma - bc\delta((kK+1)s+kK-2K^2-3K). \end{aligned}$$

Now $k \geqq 3$, $s \geqq s_0 > 2K$, and so

$$\begin{aligned} (5,3\,1) \qquad & bc\{(kK+1)s+kK-2K^2-3K\} \\ & > bc\{(3K+1)2K+3K-2K^2-3K\} = bc(4K^2+2K) > 2. \end{aligned}$$

Hence, when $s_0 \leqq s < K^2+2K$,

$$E_3 < D n^{\gamma - 2\delta + s\varepsilon}.$$

Then, for all $s \geqq s_0$,

$$E_1 \leqq E_3 < D n^{\gamma - 2\delta + (s+1)\varepsilon}, \quad E_4 \leqq n^{s\varepsilon} E_3 < D n^{\gamma - 2\delta + (2s+1)\varepsilon},$$

and so

$$E_1 \leqq E_3 < D n^{\gamma-\delta}, \qquad E_4 < D n^{\gamma-\delta}.$$

Lemma 17. *If $s \geqq s_0$ and $0 < \beta < \alpha$, then*

$$J_3 = \sum_{\mathfrak{M}_1} \int_{\mathfrak{K}-\mathfrak{M}_1'} |\Pi \psi_{\varrho,i}| \, |dx| < D n^{\gamma-\delta}.$$

By Lemma 9,

$$\int_{\mathfrak{K}-\mathfrak{M}_1'} |\Pi \psi_{\varrho,i}| \, |dx| < D q^{-sa} n^{s(a-1)} \int_{y_0}^{\infty} y^{-s} dy = D n^{s(a-1)} q^{-sa} y_0^{1-s}.$$

Hence,

$$J_3 < D n^{s(a-1)+(1-s)\{b(aK+k\beta)-1\}} \sum_{\mathfrak{M}_1} q^{(s-1)bK-sa}.$$

Now

$$(s-1)bK - sa > 0,$$

and so

$$\sum_{\mathfrak{M}_1} q^{(s-1)bK-sa} < \sum_{q=1}^{[m]} q^{(s-1)bK-sa+1} < D m^{(s-1)bK-sa+2}.$$

Also,

$$\begin{aligned} s(a-1)+(1-s)\{b(aK+k\beta)-1\}+\{(s-1)bK+2-sa\}(a-\beta) \\ = \gamma-(sa-2)(a-\beta)-\beta b(s-1)(k-1) \\ < \gamma-(sa-2)(a-\beta) < \gamma-(a-\beta) < \gamma-\delta. \end{aligned}$$

Hence,

$$J_3 < D n^{\gamma-\delta}.$$

5. 2. Lemma 18. *If* $s \geqq s_0$ *and* $0 < \beta < \alpha$, *then*

$$J_4 = \sum_{\mathfrak{M}_2} \int_{\mathfrak{M}_2} |\Pi f_i| \, |dx| < D n^{\gamma-\delta}.$$

In connection with $\mathfrak{M}_2$, let us write

$$y_1 = n^{\beta-1+b(a+(k-2)\beta)} q^{-b}.$$

Since $q \leqq n^{a+(k-2)\beta}$, we have $n^{\beta-1} \leqq y_1$. Using Lemmas 10 and 11, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}_2} |\Pi f_i| \, |dx| &< D n^{s\varepsilon+s(a-\beta)(1-c)} \left(\int_0^{n^{\beta-1}} dy + \int_{n^{\beta-1}}^{y_1} n^{s(1-\beta)} y^s \, dy \right) \\ &+ D n^{s\varepsilon+s(a-\beta)(1-ck)} \int_{y_1}^{\infty} (qy)^{-sc-s\varepsilon} dy \\ &= D n^{s\varepsilon+s(a-\beta)(1-c)+s(1-\beta)} y_1^{s+1} + D n^{s\varepsilon+s(a-\beta)(1-ck)} q^{-sc-s\varepsilon} y_1^{1-sc-s\varepsilon}. \end{aligned}$$

Now

$$1+c = 1+\frac{1}{K} = \frac{K+1}{K} = \frac{c}{b};$$

hence

$$\begin{aligned} y_1^{1+c} &= n^{(1+c)(\beta-1)+c\{a+(k-2)\beta\}} q^{-c} \\ &= n^{\beta-1-c(k-1)(a-\beta)} q^{-c}. \end{aligned}$$

From this we have in succession

$$\begin{aligned} n^{(a-\beta)(1-c)+1-\beta} y_1 &= n^{(a-\beta)(1-ck)} q^{-c} y_1^{-c}, \\ n^{s(a-\beta)(1-c)+s(1-\beta)} y_1^{s+1} &= n^{s(a-\beta)(1-ck)} q^{-sc} y_1^{1-sc}. \end{aligned}$$

Also,

$$y_1 > n^{-1}, \quad (q y_1)^{-s\varepsilon} < n^{s\varepsilon}.$$

Hence we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}_2} |\Pi f_i| \, |dx| &< D n^{2s\varepsilon+s(a-\beta)(1-c)+s(1-\beta)} y_1^{s+1} \\ &= D n^{2s\varepsilon+\gamma-sc(a-\beta)+b(s+1)\{a+(k-2)\beta\}} q^{-b(s+1)}. \end{aligned}$$

Then

$$J_4 < D n^{2s\varepsilon+\gamma-sc(a-\beta)+b(s+1)\{a+(k-2)\beta\}} \sum_{\mathfrak{M}_2} q^{-b(s+1)}.$$

When $k = 3$, and $s = s_0 = 9$, we have $(s+1)b = 2$, and so

$$\sum_{\mathfrak{M}_2} q^{-b(s+1)} \leqq \sum_{m < q \leqq n^{a+\beta(k-2)}} q^{-1} < D \log n < D m^{2-(s+1)b+s}.$$

In all other cases, $s > 2K+1$, $(s+1)b > 2$, and so

$$\sum_{\mathfrak{M}_2} q^{-b(s+1)} \leqq \sum_{q>m} q^{1-b(s+1)} < Dm^{2-b(s+1)} < Dm^{2-b(s+1)+\varepsilon}.$$

Now, since $\beta = \alpha - \delta \leqq \alpha_1 - \delta$,

$$\begin{aligned}&\gamma - sc(a-\beta) + b(s+1)\{a+(k-2)\beta\} + (a-\beta)\{2-b(s+1)\}\\ &= \gamma - abc(K+1)(s-2K) + bc\beta\{s(kK+1)+kK-2K^2-3K\}\\ &\leqq \gamma - bc\delta\{s(kK+1)+kK-2K^2-3K\}\\ &\leqq \gamma - 2\delta\end{aligned}$$

by (5. 1 3). Hence

$$J_4 \leqq Dn^{\gamma-2\delta+(2s+1)\varepsilon} < Dn^{\gamma-\delta}.$$

5. 3. Lemma 19. *We have*

$$\int_{\mathfrak{K}} |f_1 f_2 f_3 f_4|\,|dx| < Dn^{2\alpha-2\beta+\varepsilon}.$$

Let us write

$$f_1(x) f_2(x) = \sum_{j=N_1'+N_2'}^{N_1+N_2} R(j)\, x^j.$$

Then

$$\sum_{j=N_1'+N_2'}^{N_1+N_2} R(j) = f_1(1) f_2(1) < D(N_1^{\alpha} - N_1'^{\alpha})(N_2^{\alpha} - N_2'^{\alpha}) < Dn^{2\alpha-2\beta}.$$

Again, $R(j)$ is not greater than the number of representations of n as the sum of two k-th powers, and so

$$R(j) < Dj^{\varepsilon} < Dn^{\varepsilon}.$$

Hence,

$$\int_{\mathfrak{K}} |f_1(x) f_2(x)|^2\, dy = \sum_{j=N_1'+N_2'}^{N_1+N_2} \{R(j)\}^2 < Dn^{2\alpha-2\beta+\varepsilon}.$$

Similarly,

$$\int_{\mathfrak{K}} |f_3 f_4|^2\, dy < Dn^{2\alpha-2\beta+\varepsilon}.$$

Then

$$\Big(\int_{\mathfrak{K}} |f_1 f_2 f_3 f_4|\, dy\Big)^2 < \int_{\mathfrak{K}} |f_1 f_2|^2\, dy \int_{\mathfrak{K}} |f_3 f_4|^2\, dy < Dn^{4\alpha-4\beta+2\varepsilon}.$$

Lemma 20. *If $s \geqq s_0$ and $0 < \beta < \alpha$, then*

$$J_5 = \sum_{\mathfrak{M}_3} \int_{\mathfrak{M}_3} |\Pi f_i|\,|dx| < Dn^{\gamma-\delta}.$$

For $\mathfrak{M}_3$,

$$n^{\alpha+(k-2)\beta} \leqq q \leqq n^{1-\alpha-(k-1)\beta},$$

and so

$$n^{1-\beta}|y| < \frac{Dn^{1-\beta}}{qn^{1-\alpha-(k-1)\beta}} = \frac{Dn^{\alpha+(k-2)\beta}}{q} \leqq D.$$

Hence, by Lemma 10,

$$|f_i(x)| < Dn^{(1-c)(\alpha-\beta)+\varepsilon}.$$

Hence,

$$J_5 \leqq D n^{(s-4)\varepsilon+(s-4)(1-c)(\alpha-\beta)} \int_{\mathfrak{K}} |f_1 f_2 f_3 f_4|\,|dx|$$
$$< D n^{s\varepsilon+(s-4)(1-c)(\alpha-\beta)+2\alpha-2\beta}.$$

Since $\beta < \alpha \leqq \alpha_2$, we have

$$(s-4)(1-c)(\alpha-\beta)+2\alpha-2\beta = \gamma - ac(s-s_0+1)+c\beta(s+K-4)$$
$$\leqq \gamma - c\delta(s+K-4)$$
$$\leqq \gamma - c\delta(s_0+K-4) < \gamma - 2\delta.$$

Hence

$$J_5 < D n^{\gamma-2\delta+s\varepsilon} < D n^{\gamma-\delta}.$$

Proof of Theorems.

6.1. Theorem 1. *If $s \geqq s_0$ and $0 < \beta < \alpha$, then*

$$r(n) = \frac{T}{k^s \Gamma(s)(\Pi\lambda_i)^{1-a}} \mathfrak{S}(n) n^{\gamma} + O(n^{\gamma-d}),$$

where $d = d(s,\beta) > 0$.

The coefficient of x^n in

$$\sum_{\varrho} \{\Pi \psi_{\varrho,i}(x)\},$$

where ϱ runs through all primitive q-th roots of unity, is

$$\mu(n) \sum_{\varrho} q^{-s} S_{\varrho}^{s} \varrho^{-n} = \mu(n) A_s(q,n).$$

Hence the coefficient of x^n in

$$\sum_{q \leqq m} \sum_{\varrho} \{\Pi \psi_{\varrho,i}(x)\}$$

is

$$\mu(n)\, \mathfrak{S}(n,m).$$

From this we have

$$r(n) - \mu(n)\,\mathfrak{S}(n,m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}} \left\{ \Pi f_i(x) - \sum_{q \leqq m} \sum_{\varrho} \Pi(\psi_{\varrho,i}(x)) \right\} \frac{dx}{x^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left\{ \sum_{\mathfrak{M}_1} \int_{\mathfrak{M}_1'} (\Pi f_i(x) - \Pi \psi_{\varrho,i}(x)) \frac{dx}{x^{n+1}} \right.$$
$$- \sum_{\mathfrak{M}_1} \int_{\mathfrak{K}-\mathfrak{M}_1'} \{\Pi \psi_{\varrho,i}(x)\} \frac{dx}{x^{n+1}} + \sum_{\mathfrak{M}_1} \int_{\mathfrak{M}_1''} (\Pi f_i(x)) \frac{dx}{x^{n+1}}$$
$$\left. + \sum_{\mathfrak{M}_2} \int_{\mathfrak{M}_2} (\Pi f_i(x)) \frac{dx}{x^{n+1}} + \sum_{\mathfrak{M}_3} \int_{\mathfrak{M}_3} (\Pi f_i(x)) \frac{dx}{x^{n+1}} \right\}.$$

Then, by Lemmas 16, 17, 18 and 20,

$$|r(n) - \mu(n)\,\mathfrak{S}(n,m)| \leqq \frac{1}{2\pi}(J_1+J_2+J_3+J_4+J_5) < C n^{\gamma-\delta}.$$

Finally, by Lemmas 3 and 8,

$$\begin{aligned} r(n) &= \mu(n)\,\mathfrak{S}(n, m) + O(n^{\gamma-\delta}) \\ &= \mu(n)\,\mathfrak{S}(n) + O(n^{\gamma-\delta}) + O(n^{\gamma} m^{2-sa}) \\ &= \frac{T n^{\gamma}\,\mathfrak{S}(n)}{k^s\,\Gamma(s)\,(\Pi\lambda_i)^{1-a}} + G, \end{aligned}$$

where G is a number of order

$$O(n^{\gamma-\delta}) + O(n^{\gamma-(sa-2)(a-\beta)}) + O(n^{\gamma-\beta}) + O(n^{\gamma-1+\beta}) = O(n^{\gamma-d}).$$

6. 2. Theorem 2. *If $s \geqq s_0$ and $0 < \beta < \alpha$, there is a number*

$$n_0 = n_0(k, s, \beta, \lambda_1, \ldots, \lambda_s, A_1, \ldots, A_s, A_1', \ldots, A_s')$$

such that, for all $n > n_0$, there is a solution of the equation

$$n = m_1^k + m_2^k + \ldots + m_s^k$$

in positive integers satisfying the conditions

$$\lambda_i n - A_i' n^{1-\beta} < m_i^k \leqq \lambda_i n + A_i n^{1-\beta} \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

This follows at once from Theorem 1 and Lemmas 4 and 6.

The value of α.

7. 1. We defined α as the least of $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. When $k = 3$ and $s \geqq s_0 = 9$, α_1 is always less than α_2. In this case, $K^2 + 2K = 24$.

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{5(s-8)}{3(13s-32)} \qquad (9 \leqq s \leqq 24),$$

$$\alpha = \alpha_3 = \frac{s-4}{3(3s-2)} \qquad (s \geqq 24).$$

When $k \geqq 4$, we define s_1 as the greater root of the quadratic equation

$$(s+1)^2 - (s+1)(s_0 + K + 1) + (K+1)(2K+1) = 0.$$

Then $s_0 < s_1 < s_0 + K < K^2 + 2K$, and

$$\alpha = \alpha_2 \qquad (s_0 \leqq s \leqq s_1),$$

$$\alpha = \alpha_1 \qquad (s_1 \leqq s \leqq K^2 + 2K),$$

$$\alpha = \alpha_3 \qquad (s \geqq K^2 + 2K).$$

We notice that, for large s,

$$\alpha = \alpha_3 \to a^2$$

as $s \to \infty$. We see that, by suitable choice of s, we can take β as near as we please to a^2. In the other direction, Theorem 2 cannot be true for any value of $\beta > a$, whatever the value of s.

(Eingegangen am 2. November 1933.)

Über einige Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, auf deren Oberflächen singuläre Punkte liegen.

Von

Karl Maruhn in Leipzig.

Einleitung.

Am Ende seines kurz vor seinem Tode erschienenen Werkes[1]) über Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten wies Lichtenstein auf zwei noch unerledigte Aufgaben hin, deren baldige Behandlung er in Aussicht stellte.

Die erste schließt sich an die Untersuchung von Gleichgewichtsfiguren an, die aus zwei in einem Punkte zusammenhängenden Körpern bestehen. Unter der Voraussetzung, daß neben der auf der Rotationsachse senkrechten und einer durch diese hindurchgehenden Symmetrieebene die Konfiguration noch eine dritte, auf den beiden ersten senkrechte Symmetrieebene besitzt, daß also der eine Körper aus dem anderen durch Drehung um 180^0 in bezug auf die Rotationsachse hervorgeht, wurde dieses Problem bereits vor einiger Zeit von Lichtenstein[2]) und mir[3]) behandelt. Man nahm dabei an, daß die Masse, die diesen Körper erfüllt, inhomogen und von kleiner Dichte ist und sich um zwei gleich große, punktförmige Massen lagert.

In der folgenden Arbeit werden wir diesen Fall dahin verallgemeinern, daß die Attraktionszentra durch ungleiche punktförmige Massen dargestellt werden und infolgedessen auch die beiden, in einem Punkt zusammenhängenden Körper nicht mehr durch Drehung auseinander hervorgehen. Hier fehlt also die dritte der oben erwähnten Symmetrieebenen. Die Ausgangskonfiguration ist dabei das System zweier um den gemeinsamen Schwerpunkt rotierenden ungleichen punktförmigen Massen. Als Begrenzungsfläche dieser mit Flüssigkeit der Dichte Null angefüllt zu denkenden Gleichgewichtsfigur wählen wir diejenige Niveaufläche, die durch den

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Berlin 1933, S. 165 und S. 173.

[2]) Vgl. L. Lichtenstein, Kosmogonische Hypothesen I, Sächs. Berichte 80, I, (1928), S. 35—68; vgl. ferner auch l. c. [1]), S. 158—165.

[3]) Vgl. K. Maruhn, Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper, Math. Zeitschr. 33, S. 300—320.

zwischen beiden Massen gelegenen schwerelosen Punkt verläuft. Diese Verallgemeinerung ist nicht so einfach durchführbar, wie man zunächst denken könnte, da gewisse Nebenbedingungen, die erfüllt sein müssen, die Behandlung komplizieren. Auch wird der Konvergenzbeweis, im Gegensatz zu den unter [2]) und [3]) genannten Arbeiten, in Anlehnung an die von Lichtenstein entwickelten allgemeinen Methoden[4]) geführt, wie dies auch schon bei der Behandlung des Laplaceschen Urkörpers geschah[5]).

Im Zusammenhang hiermit untersuchen wir noch das Modell eines „Urkörpers mit nur einem singulären Punkte", da wir dabei von der gleichen Konfiguration wie vorher ausgehen können. Die Randfläche wird diesmal so gewählt, daß sie durch den jenseits der kleineren Masse auf der x-Achse gelegenen schwerelosen Punkt verläuft.

Die zweite der in dieser Abhandlung bearbeiteten Aufgaben behandelt einen „Urkörper mit zwei singulären Punkten". Es läge nahe, dabei von einem System gleicher Massenpunkte auszugehen, die um den gemeinsamen Schwerpunkt rotieren. Es ist leicht zu erkennen, daß so dieses Problem ohne jede neue Schwierigkeit gelöst werden kann. Im Gegensatz hierzu soll aber, um zu einem etwas anders gearteten Modell zu gelangen, die Ausgangskonfiguration ein rotierender, mit homogener Flüssigkeit angefüllter dreiachsiger Ellipsoidkörper (ein Jacobisches Ellipsoid) sein. Es zeigt sich sogleich, daß das außerhalb des Körpers befindliche Kraftfeld auf der verlängerten größten Achse zwei singuläre Punkte aufweist. Die durch diese verlaufende Niveaufläche fassen wir als Begrenzung der Ausgangsfigur auf. Der Existenzbeweis gelingt, indem die Methoden, die Lichtenstein bei der Untersuchung schwach inhomogener Gleichgewichtsfiguren[6]) anwandte, mit denjenigen in meiner Arbeit über den Laplaceschen Ringkörper[7]) in geeigneter Weise kombiniert werden. Wie dort finden sich die einzelnen Approximationen als Lösungen gewisser Integro-Differentialgleichungen, die ihrerseits wieder durch sukzessive Approximationen gelöst werden. Doch kann, da durch die Arbeiten Lichtensteins derartige Auflösungen zur Genüge bekannt sind, auf genauere Durch-

---

[4]) Vgl. L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. Dritte Abhandlung: Nichthomogene Flüssigkeiten. Figur der Erde. Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 481–562.

[5]) Vgl. K. Maruhn, Über den von Laplace postulierten Urkörper. Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 463—478.

[6]) Vgl. l. c. [4]).

[7]) Vgl. K. Maruhn, Über den Laplaceschen Ringkörper. Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 122—142.

führung verzichtet werden. Auch bei dem Konvergenzbeweis der Näherungen unseres Problems kann, da nirgends methodisch Neues auftritt, in aller Kürze vorgegangen werden.

In gleicher Weise kann man zu einem Laplaceschen Urkörper mit Rotationssymmetrie gelangen, indem man von einem Maclaurinschen Ellipsoid ausgeht.

Die Grundlage für die Existenzbeweise, die zum Teil nur angedeutet wurden, bilden gewisse potentialtheoretische Hilfssätze, wie sie Lichtenstein vor einiger Zeit zusammengestellt hat[8]).

Erstes Kapitel.

Gleichgewichtsfiguren mit punktförmigen Attraktionszentren.

§ 1.

Die Ausgangskonfiguration.

In dem Punkte $\overline{P}(-p, 0, 0)$ des Raumes x, y, z möge sich ein punktförmiges Attraktionszentrum der Masse M_1 und im Punkte $\overline{Q}(q, 0, 0)$ ein solches der Masse M_2 mit $M_1 > M_2$ befinden. Wir setzen voraus, daß $p > 0$ und $q > 0$ sei und daß die Beziehung

$$pM_1 = qM_2 \tag{1}$$

bestehe. Alsdann liegt der gemeinsame Schwerpunkt dieser Konfiguration im Koordinatenursprung. Rotiert jetzt noch das System um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \left[\varkappa \frac{M_1 + M_2}{(p+q)^3}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\varkappa M_2}{p(p+q)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\varkappa M_1}{q(p+q)^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

($\varkappa$ ist die Gaußsche Gravitationskonstante),

so halten sich in den Punkten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ die Attraktions- und Zentrifugalkräfte das Gleichgewicht. Das Gesamtpotential dieser Konfiguration im Punkte (x, y, z) ist nunmehr

$$U(x, y, z) = \frac{\varkappa M_1}{d_1} + \frac{\varkappa M_2}{d_2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \tag{3}$$

$$d_1^2 = (p + x)^2 + y^2 + z^2, \quad d_2^2 = (q - x)^2 + y^2 + z^2.$$

---

[8]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie IV. Sächs. Berichte 82 (1930), S. 265—344.

Es gelten alsdann die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= -\varkappa M_1 \frac{p+x}{d_1^3} + \varkappa M_2 \frac{q-x}{d_2^3} + \omega^2 x, \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -\varkappa M_1 \frac{y}{d_1^3} - \varkappa M_2 \frac{y}{d_2^3} + \omega^2 y, \\
\frac{\partial U}{\partial z} &= -\varkappa M_1 \frac{z}{d_1^3} - \varkappa M_2 \frac{z}{d_2^3};
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= -\frac{\varkappa M_1}{d_1^3} + 3\varkappa M_1 \cdot \frac{(p+x)^2}{d_1^5} - \frac{\varkappa M_2}{d_2^3} + 3\varkappa M_2 \frac{(q-x)^2}{d_2^5} + \omega^2, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= -\frac{\varkappa M_1}{d_1^3} + 3\varkappa M_1 \cdot \frac{y^2}{d_1^5} - \frac{\varkappa M_2}{d_2^3} + 3\varkappa M_2 \frac{y^2}{d_2^5} + \omega^2, \\
\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= -\frac{\varkappa M_1}{d_1^3} + 3\varkappa M_1 \cdot \frac{z^2}{d_1^5} - \frac{\varkappa M_2}{d_2^3} + 3\varkappa M_2 \frac{z^2}{d_2^5}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Wie man aus der ersten Gleichung in (5) sogleich erkennt, nimmt $\frac{\partial U}{\partial x}$, wenn wir uns längs der x-Achse bewegen, in den Intervallen $(-\infty, -p)$, $(-p, q)$, $(q, +\infty)$ monoton zu und durchläuft alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$. Daher muß es in jedem der genannten Intervalle genau einen schwerelosen Punkt geben. In diesem Abschnitt soll uns nur der in $(-p, q)$ gelegene schwerelose Punkt beschäftigen. Über seine Lage, die wir für unsere Zwecke nicht genau zu bestimmen brauchen, läßt sich noch sagen, daß, wie man leicht nachprüft, er gewiß auf der „rechten" Hälfte der Strecke $\overline{P\,Q}$ gelegen sein muß. Dieser Punkt heiße $\mathfrak{P}$ und habe die Koordinaten $(\mathfrak{x}, 0, 0)$.

Wir setzen nunmehr

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(\mathfrak{x}, 0, 0) &\equiv \frac{2\varkappa M_1}{(p+\mathfrak{x})^3} + \frac{2\varkappa M_2}{(q-\mathfrak{x})^3} + \omega^2 = \alpha_0, && (\alpha_0 > 0), \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(\mathfrak{x}, 0, 0) &\equiv -\frac{\varkappa M_1}{(p+\mathfrak{x})^3} - \frac{\varkappa M_2}{(q-\mathfrak{x})^3} + \omega^2 = -\beta_0, && \\
& && (\beta_0 > 0, \text{ wegen (2)}), \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2} U(\mathfrak{x}, 0, 0) &\equiv -\frac{\varkappa M_1}{(p+\mathfrak{x})^3} - \frac{\varkappa M_2}{(q-\mathfrak{x})^3} && = -\gamma_0, \quad (\gamma_0 > 0).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Bezeichnen wir jetzt noch mit

$$
C_0 \equiv \frac{\varkappa M_1}{p+\mathfrak{x}} + \frac{\varkappa M_2}{q-\mathfrak{x}} + \frac{\omega^2 \mathfrak{x}^2}{2}
$$

den Wert des Gesamtpotentials U im Punkte $\mathfrak{P}$, so haben wir in der Nachbarschaft dieses Punktes, etwa für $r \leqq r_0$ mit $r^2 = (x-\mathfrak{x})^2 + y^2 + z^2$, die Entwicklung

$$
U(x, y, z) = C_0 + \tfrac{1}{2}\alpha_0 (x-\mathfrak{x})^2 - \tfrac{1}{2}\beta_0 y^2 - \tfrac{1}{2}\gamma_0 z^2 + O(r^3)^9), \tag{7}
$$

[9]) Ist $M_1 = M_2$, so ergibt sich wegen (6) und $\mathfrak{x} = 0$ die l. c. [3]) unter (4) angegebene Entwicklung.

da aus Symmetriegründen $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ und die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung auf der x-Achse verschwinden, während $\mathfrak{P}$ ja so gewählt war, daß dort $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ wird.

Somit besitzt die Fläche $S: U(x, y, z) = C_0$ im Punkte $\mathfrak{P}$ einen Berührungskegel, dessen Gleichung

$$\alpha_0 (x - \mathfrak{x})^2 - \beta_0 y^2 - \gamma_0 z^2 = 0 \tag{8}$$

lautet.

Wir wenden uns jetzt zum Studium des Gravitationsfeldes des vorgelegten Systems. Die Schwerkraft in der Richtung (ν) einer jeden Normalen zu den Niveauflächen beträgt

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = N \geqq 0^{10}). \tag{9}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß S eine geschlossene Fläche ist und daß N außer in $\mathfrak{P}$ nirgends in ganz $T + S$ (T ist das von S umschlossene Gebiet) verschwindet.

Wir denken uns zu diesem Zwecke um $\bar{P}$ mit $p + \mathfrak{x}$ und um $\bar{Q}$ mit $q - \mathfrak{x}$ als Radien die Kugeln K_1 bzw. K_2 beschrieben. Auf den Schnittkreisen dieser Kugeln mit der Ebene $z = 0$ nimmt U im Punkte mit den Polarkoordinaten $(p + \mathfrak{x}, \varphi_1)$ bzw. $(q - \mathfrak{x}, \varphi_2)$ den Wert

$$\frac{\varkappa M_1}{p + \mathfrak{x}} + \frac{\varkappa M_2}{R_1} + \frac{\omega^2}{2}\left(p^2 + (p + \mathfrak{x})^2 - 2p(p + \mathfrak{x})\cos\varphi_1\right), \tag{10}$$

$$R_1^2 = (p + q)^2 + (p + \mathfrak{x})^2 - 2(p + q)(p + \mathfrak{x})\cos\varphi_1,$$

bzw.

$$\frac{\varkappa M_1}{R_2} + \frac{\varkappa M_2}{q - \mathfrak{x}} + \frac{\omega^2}{2}\left(q^2 + (q - \mathfrak{x})^2 + 2q(q - \mathfrak{x})\cos\varphi_2\right), \tag{11}$$

$$R_2^2 = (p + q)^2 + (q - \mathfrak{x})^2 + 2(p + q)(q - \mathfrak{x})\cos\varphi_2$$

an. Auf dem Kreise um $\bar{P}$ ist daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} &= -\frac{\varkappa M_2 (p + q)(p + \mathfrak{x})\sin\varphi_1}{R_1^3} + \omega^2 p (p + \mathfrak{x})\sin\varphi_1 \\ &= \left(\frac{\varkappa M_2 (p + q)}{R_1^3} + \omega^2 p\right)(p + \mathfrak{x})\sin\varphi_1, \end{aligned} \tag{12}$$

auf dem Kreise um $\bar{Q}$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} &= \frac{\varkappa M_1 (p + q)(q - \mathfrak{x})\sin\varphi_2}{R_2^3} - \omega^2 q (q - \mathfrak{x})\sin\varphi_2 \\ &= \left(\frac{\varkappa M_1 (p + q)}{R_2^3} + \omega^2 q\right)(q - \mathfrak{x})\sin\varphi_2. \end{aligned} \tag{13}$$

---

[10]) Unter (ν) verstehen wir daher diejenige Normalenrichtung, in der die Schwerkraft N positiv ist.

Aus Gründen der Symmetrie genügt es, die Ausdrücke für $\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}$ und $\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}$ für $0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi$ und $0 \leqq \varphi_2 \leqq \pi$ zu betrachten. Der Ausdruck $-\frac{\varkappa M_2 (p+q)}{R_1^3} + \omega^2 p$ nimmt mit wachsendem φ_1 monoton zu, ebenso der Ausdruck $\frac{\varkappa M_1 (p+q)}{R_2^3} - \omega^2 q$.

Für $\varphi_1 = 0$ bzw. $\varphi_2 = 0$ sind die genannten Ausdrücke negativ, für $R_1 = p+q$ bzw. $R_2 = p+q$ werden sie Null, um dann zu positiven Werten überzugehen. In $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_1 = \pi$ bzw. $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_2 = \pi$ liegen demnach die Maximalwerte von U, wenn wir uns längs der erwähnten Kreislinien bewegen, während an den erwähnten Zwischenstellen und in den zu diesen in bezug auf die x-Achse symmetrischen Punkten U auf diesen Kreislinien Minimalwerte annimmt.

Wir zeigen jetzt noch, daß die Werte von U für $\varphi_1 = \pi$ bzw. $\varphi_2 = 0$ kleiner sind als diejenigen für $\varphi_1 = 0$ bzw. $\varphi_2 = \pi$, d. h. kleiner als $U(\mathfrak{x}, 0, 0)$. Für $\varphi_1 = \pi$ haben wir

$$U(-2p - \mathfrak{x}, 0, 0) = \frac{\varkappa M_1}{p+\mathfrak{x}} + \frac{\varkappa M_2}{2p+\mathfrak{x}+q} + \frac{\omega^2}{2}(2p+\mathfrak{x})^2. \tag{14}$$

Dies subtrahieren wir von

$$U(\mathfrak{x}, 0, 0) = \frac{\varkappa M_1}{p+\mathfrak{x}} + \frac{\varkappa M_2}{q-\mathfrak{x}} + \frac{\omega^2}{2}\mathfrak{x}^2 \tag{15}$$

und erhalten wegen (2)

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{x},0,0) - U(-2p-\mathfrak{x},0,0) &= \varkappa M_2\left(\frac{1}{q-\mathfrak{x}} - \frac{1}{2p+\mathfrak{x}+q}\right) - 2\omega^2 p(p+\mathfrak{x}) \\ &= \frac{2\varkappa M_2 (p+\mathfrak{x})}{(q-\mathfrak{x})(2p+\mathfrak{x}+q)} - \frac{2\varkappa M_2 (p+\mathfrak{x})}{(p+q)^2} > 0, \end{aligned} \tag{16}$$

da $p+q$ das arithmetische Mittel aus $q-\mathfrak{x}$ und $2p+\mathfrak{x}+q$ ist. Für $\varphi_2 = 0$ ist entsprechend wegen

$$U(2q-\mathfrak{x}, 0, 0) = \frac{\varkappa M_1}{2q+p-\mathfrak{x}} + \frac{\varkappa M_2}{q-\mathfrak{x}} + \frac{\omega^2}{2}(2q-\mathfrak{x})^2,$$

wie man sofort erkennt,

$$U(\mathfrak{x},0,0) - U(2q-\mathfrak{x},0,0) = \frac{2\varkappa M_1 (q-\mathfrak{x})}{(p+\mathfrak{x})(2q+p-\mathfrak{x})} - \frac{2\varkappa M_1 (q-\mathfrak{x})}{(p+q)^2} > 0. \tag{17}$$

Auf den von K_1 und K_2 aus der Ebene $z = 0$ herausgeschnittenen Kreisen nimmt daher U im Punkte $\mathfrak{P}$ den größten Wert an. Sei jetzt Q ein Punkt auf einem dieser Kreise. Die zur x-Achse senkrechte Ebene durch Q schneidet auf der zugehörigen Kugel einen Kreis aus. Man erkennt leicht, daß auf diesem das Gravitationspotential konstant ist, das Potential der Zentrifugalkräfte aber in den Punkten der Ebene $z = 0$ den größten Wert annimmt. Daraus folgt, daß auf ganz K_1 und K_2 das

Gesamtpotential U gewiß kleiner als $U(x, 0, 0) = C_0$ ist, daß somit S ganz im Innern (abgesehen von $\mathfrak{P}$) von K_1 und K_2 verläuft.

Nunmehr ist noch zu zeigen, daß in $T + S$ außer in $\mathfrak{P}$ die Schwerkraft in der Normalenrichtung zu den Niveauflächen nirgends verschwindet.

Wegen (4) ist $\frac{\partial U}{\partial y}$ nur dann gleich Null, wenn $y = 0$ oder wenn $-\frac{\varkappa M_1}{d_1^3} - \frac{\varkappa M_2}{d_2^3} + \omega^2 = 0$ ist. Da ferner wegen (4) und (9) die Schwerkraft gewiß nur in der Ebene $z = 0$ verschwinden kann, können wir uns bei den folgenden Betrachtungen auf diese Ebene beschränken. Der erste der beiden eben angeführten Fälle liefert uns die drei schon erwähnten schwerelosen Punkte der x-Achse, von denen $\mathfrak{P}$ auf S liegt. Die beiden anderen befinden sich aber sicher außerhalb von $T + S$, da dort U wegen (16) und (17) noch kleinere Werte als C_0 annimmt und somit die Minima von U, die auf der x-Achse gelegen sind und die den schwerelosen Punkten entsprechen, sicher außerhalb von $T + S$ liegen müssen.

Liegt der zweite Fall vor, d. h. ist

$$-\frac{\varkappa M_1}{d_1^3} - \frac{\varkappa M_2}{d_2^3} + \omega^2 = 0, \tag{18}$$

so erhalten wir wegen (4)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\varkappa M_1 p}{d_1^3} + \frac{\varkappa M_2 q}{d_2^3}. \tag{19}$$

Wegen (1) kann aber dieser Ausdruck nur für Punkte $(\bar{x}, \bar{y})$ verschwinden, für die

$$d_1 = d_2 \quad \text{oder} \quad \bar{x} = \frac{q - p}{2} \tag{20}$$

ist. Um aber (18) zu erfüllen, muß dann wegen (2)

$$d_1 = d_2 = p + q, \tag{21}$$

d. h.

$$\bar{y}^2 = \tfrac{3}{4}(p + q)^2 \tag{22}$$

sein. Wegen (21) liegt $(\bar{x}, \bar{y})$ sicher außerhalb der betrachteten Kreise, also erst recht außerhalb von S. Damit ist gezeigt, daß, abgesehen vom Punkte $\mathfrak{P}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$ in $T + S$ nicht verschwinden kann, wenn gleichzeitig $\frac{\partial U}{\partial y}$ verschwindet. Daher kann auch in $T + S$, außer in $\mathfrak{P}$, $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ nirgends gleich Null sein. Da weiterhin in den Punkten, in denen die x-Achse die Niveauflächen durchstößt, die zu $N > 0$ gehörige Normalenrichtung gewiß in das „Innere", d. h. nach $\bar{P}$ bzw. $\bar{Q}$ hinweist, so muß das gleiche wegen der Stetigkeit der Normalen in allen Punkten von $T + S$ (außer $\mathfrak{P}$) der Fall sein.

Aus diesem Grunde bilden die Niveauflächen $U(x, y, z) = C$, $(C > C_0)$, zwei Scharen ineinandergeschachtelter, doppelpunktfreier, stetig gekrümmter, geschlossener, in bezug auf die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrischer Flächen, die die Punkte $\bar{P}$ und $\bar{Q}$ umschließen und von S umschlossen werden. Zum Schluß bezeichnen wir noch mit Lichtenstein eine Fläche dieser um S vermehrten Schar mit $S_\mathfrak{r}$, unter r etwa den kleinsten Abstand der zu $\bar{P}$ gehörigen Komponente der betreffenden Niveaufläche von $\mathfrak{P}$ verstanden. Übrigens ist auch S außer in $\mathfrak{P}$ stetig gekrümmt und verläuft zu den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch.

§ 2.

Existenzbeweis.

Die soeben betrachtete Konfiguration bilde den Ausgang, um zu einer Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten zu gelangen, die aus zwei punktförmigen Attraktionzentren von verschiedener Masse und aus um diese herum gelagerter Flüssigkeit geringer Dichte besteht, die einen ähnlich wie T gestalteten Körper T_1 (Rand S_1) erfüllen soll.

Wir präzisieren das Problem folgendermaßen: Es sei $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ein beliebiger Punkt in der Nachbarschaft einer der Niveauflächen $S_\mathfrak{r}$ $(\mathfrak{r} \gtrless 0)$ und es möge $P(x, y, z)$ den Fußpunkt des von P_1 auf $S_\mathfrak{r}$ gefällten Lotes bezeichnen. Der Abstand PP_1, positiv in der Richtung der Außennormalen $(\bar{\nu})$[11]) zu $S_\mathfrak{r}$ in P gerechnet, heiße ζ. Die Richtungskosinus a, b, c dieser Außennormalen sind in $T + S$, außer in $\mathfrak{P}$, stetig und haben stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen. In der Umgebung von $\mathfrak{P}$ verhalten sich, wie man leicht nachprüft, $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial z}$ wie $\frac{1}{r}$ $(r^2 = (x - \mathfrak{x})^2 + y^2 + z^2)$. Für die kartesischen Koordinaten x_1, y_1, z_1 erhalten wir demnach

$$x_1 = x + a\zeta, \quad y_1 = y + b\zeta, \quad z_1 = z + c\zeta. \tag{23}$$

Wir denken uns $T_1 + S_1$ derart auf $T + S$ topologisch abgebildet, daß Niveauflächen des Gesamtpotentials, $S_{\mathfrak{r}_1}$ und $S_\mathfrak{r}$, einander umkehrbar eindeutig entsprechen, ein Punkt P auf $S_\mathfrak{r}$ allemal auf den Schnittpunkt P_1 der Normalen $(\bar{\nu})$ zu $S_\mathfrak{r}$ in P mit $S_{\mathfrak{r}_1}$ und insbesondere der Punkt $\mathfrak{P}(\mathfrak{x}, 0, 0)$ auf sich selbst abgebildet wird. Dabei soll $T_1 + S_1$ dieselben Symmetrieeigenschaften wie $T + S$ haben.

Es sei jetzt $S_{\mathfrak{r}^*}$ eine ganz im Inneren von T gelegene (also aus zwei um $\bar{P}$ und $\bar{Q}$ gelagerten Komponenten bestehende) Niveaufläche der Aus-

[11]) Also ist augenscheinlich die Richtung $(\bar{\nu})$ der auf S. 751 eingeführten Richtung (ν) entgegengesetzt.

gangsverteilung und $T_{\mathfrak{r}^*}$ der von ihr umschlossene Körper $(0 < \mathfrak{r}^* < p + \mathfrak{x})$. *Unser Ziel ist, $\zeta(x, y, z)$ als Ortsfunktion in $T - T_{\mathfrak{r}^*} + S + S_{\mathfrak{r}^*}$ zu bestimmen.* Wir nehmen an, daß ζ dort stetig sei und die Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ zu Symmetrieebenen habe, ferner in diesem Bereich beschränkte, sogar (allenfalls eventuell mit Ausschluß von $\mathfrak{P}$) stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitze. In $\mathfrak{P}$ soll ζ verschwinden. Schließlich ist, unter Ω einen hinreichend kleinen positiven Wert verstanden,

$$\left|\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right| \leqq \Omega, \tag{24}$$

woraus sogleich

$$|\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\Omega r \tag{25}$$

folgt.

Wir betrachten jetzt eine in $T + S$ erklärte stetige, allenfalls abteilungsweise stetige, nicht negative Ortsfunktion $\chi(\mathfrak{r})$, die auf jeder Niveaufläche $S_{\mathfrak{r}}$ denselben konstanten Wert annimmt, auf S verschwindet und in jedem Stetigkeitsintervalle stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, die ihrerseits einer H-Bedingung genügen. In $T_{\mathfrak{r}^*} + S_{\mathfrak{r}^*}$ soll $\chi(\mathfrak{r}) = \chi(\mathfrak{r}^*)$ konstant sein. Wir fordern nunmehr, daß auf jeder Niveaufläche $S_{\mathfrak{r}_1}$ der neuen Flüssigkeitsverteilung die Dichte den Wert $\alpha\chi(\mathfrak{r})$ ($\alpha > 0$, hinreichend klein) annehmen soll. Im folgenden brauchen uns daher nur die Niveauflächen mit $0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{r}^*$ zu beschäftigen.

Damit die gesuchte Konfiguration gewissen Gleichgewichts- und Schwerpunktsbedingungen genügt und damit sich erreichen läßt, daß der singuläre Punkt der neuen Konfiguration wieder in $\mathfrak{P}$ hineinfällt, führen wir drei später zu bestimmende, hinreichend kleine Parameter ein. Zu diesem Zwecke sollen die Attraktionszentren jetzt mit den Massen $M_1 + \mu_1$ und $M_2 + \mu_2$ behaftet sein. Diese beiden Massenpunkte mögen ferner um die Größe k in Richtung der $+x$-Achse verschoben werden, so daß sie jetzt in den Punkten $\bar{P}_1(-p + k, 0, 0)$ und $\bar{Q}_1(q + k, 0, 0)$ gelegen sind. Im Gegensatz zu früheren Untersuchungen soll hingegen die Winkelgeschwindigkeit keine Änderung erfahren.

Wie wir wissen, ist in $P(x, y, z)$ auf $S_{\mathfrak{r}}$ $(0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{r}^*)$

$$U(x, y, z) \equiv \frac{\varkappa M_1}{d_1} + \frac{\varkappa M_2}{d_2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C(\mathfrak{r}), \tag{26}$$
$$(C(\mathfrak{r}) \text{ auf } S_{\mathfrak{r}} \text{ konstant}).$$

In dem entsprechenden Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ auf $S_{\mathfrak{r}_1}$ der neuen Konfiguration haben wir

$$U_1(x_1, y_1, z_1) \equiv \frac{\varkappa(M_1 + \mu_1)}{D_1} + \frac{\varkappa(M_2 + \mu_2)}{D_2} + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \varkappa\alpha W_1(x_1, y_1, z_1) = C_1(\mathfrak{r}) \tag{27}$$

mit

$$D_1^2 = (x_1 + p - k)^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad D_2^2 = (x_1 - q - k)^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$W_1(x_1, y_1, z_1) = \int_{T_1} \chi(\tau') \cdot \frac{1}{\varrho_1} \, d\tau_1',$$

$$\varrho_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2 + (z_1 - z_1')^2,$$

$$d\tau_1' = dx_1' \, dy_1' \, dz_1', \qquad C_1(\mathfrak{r}) \text{ konstant auf } S_{\tau_1}.$$

Aus (26) und (27) folgt

$$(28) \qquad U(x_1, y_1, z_1) - U(x, y, z) + \frac{\varkappa \mu_1}{D_1} + \frac{\varkappa \mu_2}{D_2}$$
$$+ \varkappa M_1 \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{[(x_1 + p)^2 + y_1^2 + z_1^2]^{1/2}} \right) + \varkappa M_2 \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{[(q - x_1)^2 + y_1^2 + z_1^2]^{1/2}} \right)$$
$$+ \varkappa \alpha W_1(x_1, y_1 \, z_1) = C_1(\mathfrak{r}) - C(\mathfrak{r}) = \varkappa s(\mathfrak{r})$$

oder aber mit $\psi = \frac{\partial U}{\partial \bar{\nu}}$

$$(29) \quad \psi \zeta = \varkappa s(\mathfrak{r}) - \frac{\varkappa \mu_1}{D_1} - \frac{\varkappa \mu_2}{D_2} - \varkappa M_1 \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{[(x_1 + p)^2 + y_1^2 + z_1^2]^{1/2}} \right)$$
$$- \varkappa M_2 \left(\frac{1}{D_2} - \frac{1}{[(q - x_1)^2 + y_1^2 + z_1^2]^{1/2}} \right) - \varkappa \alpha W_1(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\nu}^2} - \cdots$$

Berücksichtigen wir jetzt, daß $\zeta(\mathfrak{x}, 0, 0) = \psi(\mathfrak{x}, 0, 0) = 0$ sein soll, so folgt aus (29) mit $s(0) = {}_0s$

$$(30) \quad 0 = \varkappa \, {}_0s - \frac{\varkappa \mu_1}{\mathfrak{x} + p - k} - \frac{\varkappa \mu_2}{q + k - \mathfrak{x}} - \varkappa M_1 \left(\frac{1}{\mathfrak{x} + p - k} - \frac{1}{\mathfrak{x} + p} \right)$$
$$- \varkappa M_2 \left(\frac{1}{q + k - \mathfrak{x}} - \frac{1}{q - \mathfrak{x}} \right) - \varkappa \alpha W_1(\mathfrak{x}, 0, 0).$$

Subtrahieren wir dies von (29), so erhalten wir schließlich die Integro-Differentialgleichung unseres Problems:

$$(31) \qquad \psi \zeta = \varkappa h \mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r}) + \Xi(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{\nu}^2} - \cdots$$

Hierbei ist $h \mathfrak{r}^2 f(\mathfrak{r}) = s(\mathfrak{r}) - {}_0s$; unter h verstehen wir einen hinreichend kleinen Parameter, unter $f(\mathfrak{r})$ eine vorgegebene, nebst ihrer Ableitung stetige Funktion von $\mathfrak{r}$. Weiterhin ist

$$(32) \quad \Xi(x_1, y_1, z_1) = \varkappa \mu_1 \left(\frac{1}{\mathfrak{x} + p - k} - \frac{1}{D_1} \right) + \varkappa \mu_2 \left(\frac{1}{q + k - \mathfrak{x}} - \frac{1}{D_2} \right)$$
$$- \varkappa M_1 \left\{ \frac{1}{D_1} - \frac{1}{[(x_1 + p)^2 + y_1^2 + z_1^2]^{1/2}} - \frac{1}{\mathfrak{x} + p - k} + \frac{1}{\mathfrak{x} + p} \right\}$$
$$- \varkappa M_2 \left\{ \frac{1}{D_2} - \frac{1}{[(q - x_1)^2 + y_1^2 + z_1^2]^{1/2}} - \frac{1}{q + k - \mathfrak{x}} + \frac{1}{q - \mathfrak{x}} \right\}$$
$$+ \varkappa \alpha \{ W_1(\mathfrak{x}, 0, 0) - W_1(x_1, y_1, z_1) \}$$

oder aber nach einer kleinen Umrechnung

$$
\begin{aligned}
(33)\qquad \Xi(x_1, y_1, z_1) = {} & \varkappa\mu_1\left(\frac{1}{\mathfrak{x}+p-k}-\frac{1}{D_1}\right)+\varkappa\mu_2\left(\frac{1}{q+k-\mathfrak{x}}-\frac{1}{D_2}\right)\\
& +\varkappa\alpha\{W_1(\mathfrak{x},0,0)-W_1(x_1,y_1,z_1)\}\\
& -k\left\{\varkappa M_1\left(\frac{x_1+p}{[(x_1+p)^2+y_1^2+z_1^2]^{3/2}}-\frac{1}{(\mathfrak{x}+p)^2}\right)\right.\\
& \left.-\varkappa M_2\left(\frac{q-x_1}{[(q-x_1)^2+y_1^2+z_1^2]^{3/2}}-\frac{1}{(q-\mathfrak{x})^2}\right)\right\}-\ldots,
\end{aligned}
$$

wobei die am Schluß nicht hingeschriebenen Glieder in k von zweitem oder höherem Grade sind.

Wir gehen nunmehr daran, k, μ_1 und μ_2 so zu bestimmen, daß bei der gesuchten Konfiguration der schwerelose Punkt wieder in $\mathfrak{P}$ hineinfällt und daß in den Punkten $\overline{P}_1$ und $\overline{Q}_1$ die Gravitations- und Zentrifugalkräfte einander das Gleichgewicht halten. Es wird sich alsdann herausstellen, daß, wenn diese letzten Bedingungen erfüllt sind, der Schwerpunkt des gesuchten Systems von selbst auf der z-Achse gelegen ist. Wir haben jetzt folgende Gleichungen, um k, μ_1 und μ_2 zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\varkappa(M_1+\mu_1)}{(\mathfrak{x}+p-k)^2}+\frac{\varkappa(M_2+\mu_2)}{(q+k-\mathfrak{x})^2}+\omega^2\mathfrak{x}+\varkappa\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(\mathfrak{x},0,0)=0,\\
(34)\qquad & \frac{\varkappa(M_2+\mu_2)}{(p+q)^2}-\omega^2(p-k)+\varkappa\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(-p+k,0,0)=0,\\
& -\frac{\varkappa(M_1+\mu_1)}{(p+q)^2}+\omega^2(q+k)+\varkappa\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(q+k,0,0)=0.
\end{aligned}
$$

Mit Rücksicht auf

$$
\begin{aligned}
-\frac{\varkappa M_1}{(\mathfrak{x}+p)^2}+\frac{\varkappa M_2}{(q-\mathfrak{x})^2}+\omega^2\mathfrak{x} &= 0,\\
(35)\qquad \frac{\varkappa M_2}{(p+q)^2}-\omega^2 p &= 0,\\
-\frac{\varkappa M_1}{(p+q)^2}+\omega^2 q &= 0
\end{aligned}
$$

erhalten wir an Stelle von (34) das System

$$
\begin{aligned}
& -\varkappa M_1\left\{\frac{1}{(\mathfrak{x}+p-k)^2}-\frac{1}{(\mathfrak{x}+p)^2}\right\}+\varkappa M_2\left\{\frac{1}{(q+k-\mathfrak{x})^2}-\frac{1}{(q-\mathfrak{x})^2}\right\}\\
& -\frac{\varkappa\mu_1}{(\mathfrak{x}+p-k)^2}+\frac{\varkappa\mu_2}{(q+k-\mathfrak{x})^2}+\varkappa\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(\mathfrak{x},0,0)=0,\\
(36)\qquad & \frac{\varkappa\mu_2}{(p+q)^2}+\omega^2 k+\varkappa\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(-p+k,0,0)=0,\\
& -\frac{\varkappa\mu_1}{(p+q)^2}+\omega^2 k+\varkappa\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(q+k,0,0)=0.
\end{aligned}
$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \varkappa \mu_1 &= \omega^2 (p+q)^2 k + \varkappa (p+q)^2 \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} W_1 (q+k, 0, 0), \\ \varkappa \mu_2 &= -\omega^2 (p+q)^2 k - \varkappa (p+q)^2 \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} W_1 (-p+k, 0, 0). \end{aligned} \tag{37}$$

Setzen wir diese Werte in die erste Gleichung von (36) ein, so ergibt sich nach einiger Umformung, wie man etwa durch sukzessive Approximationen leicht nachweisen kann, für hinreichend kleine Werte von α

$$k = \frac{\varkappa E}{A} + O(\alpha^2) \tag{38}$$

mit

$$\begin{aligned} E = &- \frac{(p+q)^2 \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} W_1 (q, 0, 0)}{(\mathfrak{x}+p)^2} - \frac{(p+q)^2 \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} W_1 (-p, 0, 0)}{(q-\mathfrak{x})^2} \\ &+ \alpha \frac{\partial}{\partial x_1} W_1 (\mathfrak{x}, 0, 0), \end{aligned} \tag{39}$$

$$A = \frac{2 \varkappa M_1}{(p+\mathfrak{x})^3} + \frac{2 \varkappa M_2}{(q-\mathfrak{x})^3} + \frac{\omega^2 (p+q)^2}{(\mathfrak{x}+p)^2} + \frac{\omega^2 (p+q)^2}{(q-\mathfrak{x})^2} > 0.$$

Setzt man alsdann den Wert für k in (37) ein, so erhält man auch μ_1 und μ_2. Alle diese drei Werte denken wir uns nunmehr in die Integro-Differentialgleichung (31) eingetragen und wenden uns deren Auflösung zu. Diese geschieht nach der Methode der sukzessiven Approximationen.

Mit Rücksicht auf die erste Gleichung in (36) und auf

$$|\mu_1|, |\mu_2|, |k| \leqq \beta_1 \alpha \quad (\beta_1 \text{ konstant, wie später auch } \beta_2, \beta_3, \ldots) \tag{40}$$

ist

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} \Xi (x_1, y_1, z_1) \right| \leqq \beta_2 \alpha r_1 \quad (r_1^2 = (x_1 - \mathfrak{x})^2 + y_1^2 + z_1^2)\ ^{12}), \tag{41}$$

mit Beachtung der Symmetrieeigenschaften von W_1 folgt ferner

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_1} \Xi (x_1, y_1, z_1) \right|, \quad \left| \frac{\partial}{\partial z_1} \Xi (x_1, y_1, z_1) \right| \leqq \beta_3 \alpha r_1 \tag{42}$$

und schließlich

$$|\Xi (x_1, y_1, z_1)| \leqq \beta_4 \alpha r_1^2. \tag{43}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial x_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial y_1}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial z_1}{\partial z} \right| \leqq 1 + \beta_5 \Omega; \\ &\left| \frac{\partial x_1}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial x_1}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial y_1}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| \leqq \beta_6 \Omega \end{aligned} \tag{44}$$

---

[12]) Daß $\left| \frac{\partial}{\partial x_1} W_1 (x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} W_1 (\mathfrak{x}, 0, 0) \right| \leqq \beta_2^* r_1$ (β_2^* konstant) ist, ergibt sich daraus, daß $W_1 (x_1, y_1, z_1)$ infolge der verschwindenden Randdichte auch in $\mathfrak{B}$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung besitzt, die übrigens auch noch einer H-Bedingung genügen. Vgl. dazu l. c. [2]), S. 44.

und

$$r_1^2 \leqq (1+\beta_7\,\Omega)\,r^2 \tag{45}$$

ist schließlich

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\,\Xi(x_1,y_1,z_1)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\,\Xi\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}\,\Xi\right| \leqq \beta_8\,\alpha\,(1+\Omega)\,r, \tag{46}$$

$$|\Xi(x_1,y_1,z_1)| \leqq \beta_9\,\alpha\,(1+\Omega)\,r^2. \tag{47}$$

Bezeichnen wir weiter die rechte Seite der Integro-Differentialgleichung (31) mit $\mathsf{X}\{\zeta\}$, so ist

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\,\mathsf{X}\{\zeta\}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}\,\mathsf{X}\{\zeta\}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}\,\mathsf{X}\{\zeta\}\right| \leqq \beta_{10}\,(h+\alpha+\alpha\Omega+\Omega^2)\,r, \tag{48}$$

$$|\mathsf{X}\{\zeta\}| \leqq \beta_{11}\,(h+\alpha+\alpha\Omega+\Omega^2)\,r^2.$$

Es sei jetzt $\dot{\zeta}$ eine ganz wie ζ beschaffene Ortsfunktion in $T-T_{r^*}+S+S_{r^*}$ mit

$$\left|\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial y}\right|,\ \left|\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \Omega,\quad |\dot{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\Omega r, \tag{49}$$

und es möge

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\zeta-\dot{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}(\zeta-\dot{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}(\zeta-\dot{\zeta})\right| \leqq \varepsilon, \tag{50}$$

$$|\zeta-\dot{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon r,\quad \varepsilon \leqq 2\,\Omega$$

gelten. Alsdann findet sich

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathsf{X}\{\zeta\}-\mathsf{X}\{\dot{\zeta}\})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}(\mathsf{X}\{\zeta\}-\mathsf{X}\{\dot{\zeta}\})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}(\mathsf{X}\{\zeta\}-\mathsf{X}\{\dot{\zeta}\})\right| \tag{51}$$

$$\leqq \beta_{12}\,(\alpha+\alpha\Omega+\Omega)\,\varepsilon r,$$

$$|\mathsf{X}\{\zeta\}-\mathsf{X}\{\dot{\zeta}\})| \leqq \beta_{13}\,(\alpha+\alpha\Omega+\Omega)\,\varepsilon r^2.$$

Die Beziehungen (48) und (51) sichern, wie Lichtenstein gezeigt hat, die Existenz und Einzigartigkeit der Lösung [13]).

Es ist nunmehr noch, wie schon angekündigt, zu zeigen, daß der Schwerpunkt der so gefundenen Konfiguration tatsächlich auf der z-Achse gelegen ist, wenn wir den Parametern μ_1, μ_2, k die angegebenen Werte erteilen. Damit das statische Moment in bezug auf die Ebene $x=0$ verschwindet, muß die Beziehung

$$-(p-k)\,(M_1+\mu_1)+(q+k)\,(M_2+\mu_2)+\alpha\int_{T_1}\chi'\,x_1'\,d\tau_1' = 0,\ (\chi'=\chi(\mathfrak{r}')) \tag{52}$$

gelten, die sich wegen (1) auf

$$-p\,\mu_1+q\,\mu_2+k\,(M_1+M_2)+k\,(\mu_1+\mu_2)+\alpha\int_{T_1}\chi'\,x_1'\,d\tau_1' = 0 \tag{53}$$

---

[13]) Der Beweis konnte hier nur skizziert werden. Er verläuft aber vollständig analog zu den in den Arbeiten von Lichtenstein [vgl. l. c. [1]), S. 97 ff. und S. 158 ff.; ferner l. c. [4])] angegebenen Beweisen.

reduziert. Setzen wir dahinein aus (37) für μ_1 und μ_2 die gefundenen Werte, so erhalten wir wegen $\omega^2 = \varkappa \frac{M_1 + M_2}{(p+q)^3}$ nach einer leichten Umrechnung die Beziehung

$$(54)\quad -p(p+q)^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(q+k,0,0) - q(p+q)^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(-p+k,0,0)$$
$$+k(p+q)^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(q+k,0,0) - k(p+q)^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(-p+k,0,0)$$
$$+\alpha\int_{T_1}\chi' x_1' d\tau_1' = 0.$$

Wir zeigen, um die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen, daß sich ihre linke Seite in der Form

$$(55)\qquad \frac{\alpha p(p+q)^2}{\varkappa M_2}\int_{T_1}\chi\frac{\partial U_1}{\partial x_1}d\tau_1$$

schreiben läßt. In der Tat ist nämlich

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{-\varkappa(p-k+x_1)(M_1+\mu_1)}{D_1^3} + \frac{\varkappa(q+k-x_1)(M_2+\mu_2)}{D_2^3} + \omega^2 x_1$$
$$+\varkappa\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}W_1(x_1,y_1,z_1)$$
$$(56)\quad = \frac{\varkappa M_2}{p(p+q)^3}\left\{-\frac{(p-k+x_1)(p+q)^2(q+k)}{D_1^3} + \frac{(q+k-x_1)(p+q)^2(p-k)}{D_2^3} + x_1\right\}$$
$$+\varkappa\alpha\int_{T_1}\chi'\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)d\tau_1' + \frac{\varkappa(p-k+x_1)(p+q)^2\alpha}{D_1^3}\int_{T_1}\chi'\frac{q+k-x_1'}{D_2'^3}d\tau_1'$$
$$-\frac{\varkappa(q+k-x_1)(p+q)^2\alpha}{D_2^3}\int_{T_1}\chi'\frac{p-k+x_1'}{D_1'^3}d\tau_1',$$

$(D_1'^2 = (p-k+x_1')^2 + y_1'^2 + z_1'^2,\quad D_2'^2 = (q+k-x_1')^2 + y_1'^2 + z_1'^2).$

Wegen der Beziehungen

$$(57)\qquad \int_{T_1}\chi\frac{p-k+x_1}{D_1^3}d\tau_1\int_{T_1}\chi'\frac{q+k-x_1'}{D_2'^3}d\tau_1'$$
$$-\int_{T_1}\chi\frac{q+k-x_1}{D_2^3}d\tau_1\int_{T_1}\chi'\frac{p-k+x_1'}{D_1'^3}d\tau_1' = 0,$$

$$(58)\qquad \int_{T_1}\chi d\tau_1\int_{T_1}\chi'\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)d\tau_1' = -\int_{T_1}\chi d\tau_1\int_{T_1}\chi'\frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)d\tau_1'$$
$$= -\int_{T_1}\chi' d\tau_1'\int_{T_1}\chi\frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)d\tau_1 = 0,$$

$$(59)\qquad \int_{T_1} \chi' \frac{q+k-x_1'}{D_2'^3}\, d\tau_1' = -\frac{\partial}{\partial x_1} W_1(q+k,\ 0,\ 0)$$

und

$$(60)\qquad \int_{T_1} \chi' \frac{p-k+x_1'}{D_1'^3}\, d\tau_1' = \frac{\partial}{\partial x_1} W_1(-p+k,\ 0,\ 0)$$

findet man sogleich, daß die linke Seite von (54) sich in der Tat auf die Gestalt (55) bringen läßt.

Für den Integralausdruck in (55) finden wir aber, unter $(\bar{\nu}_1)$ die Außennormalen zu den Niveauflächen verstanden,

$$(61)\qquad \int_{T_1} \chi \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\, d\tau_1 = \int_{T_1} \chi \frac{\partial U_1}{\partial \bar{\nu}_1} \cos(\bar{\nu}_1, x_1)\, d\tau_1 = \int_{\infty}^{C_1(0)} \chi\, dU_1 \int_{S_{\tau_1}} \cos(\bar{\nu}_1, x_1)\, d\sigma_{\tau_1} = 0,$$

wobei χ hier als Funktion des Gesamtpotentials U_1 aufgefaßt wird. Das ist aber gerade das, was bewiesen werden sollte. Der Schwerpunkt der erhaltenen Gleichgewichtsfigur liegt in der Tat auf der z-Achse

§ 3.

Ein Urkörper mit nur einem singulären Punkt.

Um zu einer Gleichgewichtsfigur zu gelangen, die aus nur einer Komponente, welche einen einzigen singulären Punkt auf der Oberfläche besitzt, besteht, benutzen wir die gleiche Ausgangskonfiguration, deren wir uns in den vorangehenden Paragraphen bedient haben. Wir erkannten dort bereits, daß auf der x-Achse noch zwei weitere schwerelose Punkte gelegen sind, von denen wir nunmehr denjenigen, der jenseits der kleineren Masse M_2 liegt, ins Auge fassen. Er heiße $\mathfrak{P}'(\mathfrak{x}', 0, 0)$ mit $\mathfrak{x}' > q$. Augenscheinlich ist in diesem Punkte

$$(62)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\mathfrak{x}', 0, 0)}{\partial x^2} &\equiv \frac{2\varkappa M_1}{(p+\mathfrak{x}')^3} + \frac{2\varkappa M_2}{(\mathfrak{x}'-q)^3} + \omega^2 = \alpha_0',\ (\alpha_0' > 0), \\ \frac{\partial^2 U(\mathfrak{x}', 0, 0)}{\partial y^2} &\equiv -\frac{\varkappa M_1}{(p+\mathfrak{x}')^3} - \frac{\varkappa M_2}{(\mathfrak{x}'-q)^3} + \omega^2 = -\beta_0',\ (\beta_0' > 0)^{14}), \\ \frac{\partial^2 U(\mathfrak{x}', 0, 0)}{\partial z^2} &\equiv -\frac{\varkappa M_1}{(p+\mathfrak{x}')^3} - \frac{\varkappa M_2}{(\mathfrak{x}'-q)^3} = -\gamma_0',\ (\gamma_0' > 0). \end{aligned}$$

Bezeichnet noch

$$(63)\qquad C_0' = \frac{\varkappa M_1}{p+\mathfrak{x}'} + \frac{\varkappa M_2}{\mathfrak{x}'-q} + \frac{\omega^2 \mathfrak{x}'^2}{2}$$

---

[14]) Augenscheinlich ist, da $\mathfrak{P}'$ schwerelos sein soll, $\omega^2 = \frac{\varkappa M_1}{\mathfrak{x}'(p+\mathfrak{x}')^2} + \frac{\varkappa M_2}{\mathfrak{x}'(\mathfrak{x}'-q)^2}$, somit wegen (1) $-\frac{\varkappa M_1}{(p+\mathfrak{x}')^3} - \frac{\varkappa M_2}{(\mathfrak{x}'-q)^3} + \omega^2 = \frac{\varkappa M_1 p}{(p+\mathfrak{x}')^3 \mathfrak{x}'} - \frac{\varkappa M_2 q}{(\mathfrak{x}'-q)^3 \mathfrak{x}'} < 0$.

den Wert des Gesamtpotentials im Punkte $\mathfrak{P}'$, so haben wir in dessen Nachbarschaft, etwa für $r' \leqq r_0'$ $(r'^2 = (x - x')^2 + y^2 + z^2)$, die Entwicklung

$$U(x, y, z) = C_0' + \tfrac{1}{2}\alpha_0'(x - x')^2 - \tfrac{1}{2}\beta_0' y^2 - \tfrac{1}{2}\gamma_0' z^2 + O(r'^3). \tag{64}$$

Die Fläche S': $U(x, y, z) = C_0'$ besitzt daher im Punkte $\mathfrak{P}'$ einen Berührungskegel, dessen Gleichung

$$\alpha_0'(x - x')^2 - \beta_0' y^2 - \gamma_0' z^2 = 0 \tag{65}$$

lautet.

Wir wenden uns nunmehr der Untersuchung des Gravitationsfeldes zu. Wie wir schon früher erkannten, kann die Schwerkraft nur in Punkten der Ebene $z = 0$ verschwinden. Wir denken uns jetzt um den Koordinatenursprung die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2$ beschrieben und betrachten insbesondere ihren Schnittkreis mit der x, y-Ebene. In einem Peripheriepunkte mit dem Polarwinkel φ haben wir das Gesamtpotential

$$U(x', \varphi) = \frac{\varkappa M_1}{(x'^2 + p^2 + 2x' p\cos\varphi)^{1/2}} + \frac{\varkappa M_2}{(x'^2 + q^2 - 2x' q\cos\varphi)^{1/2}} + \frac{\omega^2}{2} x'^2 \tag{66}$$

und dessen partielle Ableitung erster Ordnung nach φ

$$\frac{\partial U(x', \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\varkappa M_1 x' p \sin\varphi}{(x'^2 + p^2 + 2x' p\cos\varphi)^{3/2}} - \frac{\varkappa M_2 x' q \sin\varphi}{(x'^2 + q^2 - 2x' q\cos\varphi)^{3/2}}. \tag{67}$$

Man erkennt leicht, daß im Intervall $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ außer für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, in denen Maximalstellen liegen, die Funktion $U(x', \varphi)$, bei festgehaltenem x' noch einen Extremwert $\left(\text{wegen (1) für } \cos\varphi = \frac{q - p}{2x'}\right)$ besitzt, der ein Minimum darstellt. Wegen

$$\begin{aligned} U(x', 0, 0) - U(-x', 0\,0) &= \varkappa M_1\left(\frac{1}{x' + p} - \frac{1}{x' - p}\right) + \varkappa M_2\left(\frac{1}{x' - q} - \frac{1}{x' + q}\right) \\ &= -\frac{2\varkappa p M_1}{x'^2 - p^2} + \frac{2\varkappa q M_2}{x'^2 - q^2} > 0 \end{aligned} \tag{68}$$

ist daher auf dem betrachteten Kreise des Gesamtpotential kleiner als $U(x', 0, 0) = C_0'$.

Bewegen wir uns jetzt auf der Kugel K längs einer Kreislinie, deren Ebene senkrecht zur x-Achse steht, so erkennen wir wie früher, daß alsdann das Gravitationspotential dasselbe bleibt, während das Potential der Zentrifugalkräfte und damit das Gesamtpotential in den Schnittpunkten mit der Ebene $z = 0$ den größten Wert annimmt. Daher erhält die Funktion U auf K im Punkte $\mathfrak{P}'$ den größten Wert. Die Fläche S' muß daher ganz (abgesehen von $\mathfrak{P}'$) innerhalb der Kugel K verlaufen.

Bewegen wir uns jetzt von $\overline{P}$ aus längs der x-Achse nach $-\infty$ zu, so muß $\frac{\partial U}{\partial x}$ dort in einem, aber nur in einem Punkte verschwinden, der einem Minimum des Gesamtpotentials entspricht. Da zwischen diesem Punkte und $\overline{P}$ daher U monoton zunimmt, so muß, weil ja wegen (68) außerhalb von S' gewiß Punkte mit $U < C_0'$ vorkommen, auch dieses Minimum, d. h. der betrachtete schwerelose Punkt, außerhalb von S' liegen.

Die anderen Punkte der x, y-Ebene, in denen $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ gleich Null ist sind, wie wir bereits wegen (20) und (22) erkannten, die Punkte $\left(\frac{q-p}{2}, \frac{p+q}{2}\sqrt{3}\right)$ und $\left(\frac{q-p}{2}, -\frac{p+q}{2}\sqrt{3}\right)$. Bewegen wir uns nun längs der Geraden $x = \frac{q-p}{2}$ von der x-Achse aus etwa gegen $+\infty$, so stoßen wir, wenn wir vom Punkte $\left(\frac{q-p}{2}, 0\right)$ absehen, wegen (4) auf einen und nur einen Punkt, in dem $\frac{\partial U}{\partial y}$ verschwindet, eben den Punkt $\left(\frac{q-p}{2}, \frac{p+q}{2}\sqrt{3}\right)$. Dieser entspricht einem Minimum von U auf der Geraden $x = \frac{q-p}{2}$. Da nun von der x-Achse ab bis zu diesem Punkte U monoton abnimmt, ferner auch auf der betrachteten Geraden gewiß Punkte mit $U < C_0'$ vorkommen, so liegt auch dieser schwerelose Punkt gewiß außerhalb von S'.

Zusammenfassend erkennen wir daher, daß S' eine geschlossene, außer in $\mathfrak{P}'$ stetig gekrümmte, zu den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch gelegene Fläche ist, in deren Innerem außer in $\mathfrak{P}$ die Schwerkraft $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ nirgends verschwindet. Die Niveauflächen $U = C\,(C_0 < C < C_0')$ bestehen aus einer Schar ineinandergeschachtelter, stetig gekrümmter, zu den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ symmetrisch gelegener Flächen, die die Fläche S umschließen und von S' umschlossen werden. Die innerhalb von S verlaufenden Niveauflächen sind schon früher betrachtet worden. Die gesamte Schar der Niveauflächen werde jetzt noch mit $S_{\mathfrak{r}'}$ bezeichnet, unter $\mathfrak{r}'$ den Abstand des Punktes $\mathfrak{P}'$ von der betreffenden Niveaufläche verstanden.

Auf den Existenzbeweis können wir bei dieser Konfiguration verzichten, da er beinahe wörtlich mit den im vorigen Abschnitt durchgeführten Betrachtungen übereinstimmt. Man wird, um den schwerelosen Punkt der gesuchten Gleichgewichtsfigur wieder in $\mathfrak{P}'$ zu erhalten und um in den Attraktionszentren Gleichgewicht herzustellen, drei Parameter μ_1', μ_2', k' einführen und den genannten Bedingungen gemäß bestimmen. Genau wie früher zeigt sich, daß dies in der Tat möglich ist und daß gleichzeitig der Schwerpunkt der gesuchten Konfiguration auf die z-Achse fällt.

Zweites Kapitel.

Eine Gleichgewichtsfigur, deren Attraktionszentrum ein Jacobisches Ellipsoid ist.

§ 1.

Die Ausgangskonfiguration.

Die Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten, die die Ausgangskonfiguration für die in diesem Kapitel gestellte Aufgabe bilden soll, ist ein dreiachsiger, mit homogener Flüssigkeit der Dichte f erfüllter Ellipsoidkörper T (Randfläche Σ), d. h. ein Jacobisches Ellipsoid. Er hat die drei Koordinatenebenen zu Symmetrieebenen, rotiert um die z-Achse und besitzt Halbachsen von der Länge $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\bar{c}$ mit $\bar{a} > \bar{b} > \bar{c}$. Wie man weiß, existiert für alle Werte der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega < \omega' = \sqrt{2\pi\varkappa f \cdot 0{,}1871\ldots}$$

gewiß eine solche Gleichgewichtsfigur. Abzählbar unendlich viele Werte von ω $(0 < \omega < \omega')$, die bewirken, daß die homogene Integralgleichung

$$\psi(\sigma)\zeta + \int_{\Sigma} f' \frac{1}{\varrho}\zeta' d\sigma' = 0, \quad (\varrho^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,\ \zeta' = \zeta(\sigma')) \tag{69}$$

nichttriviale Lösungen $\zeta(\sigma)$ besitzt, unter $\psi(\sigma)$ die Gesamtschwerkraft und unter σ einen Punkt auf Σ verstanden, liefern uns die sogenannten „Verzweigungsellipsoide".

Wir setzen nunmehr ausdrücklich voraus, daß ein solcher Verzweigungsfall bei dieser Untersuchung nicht vorliegt, mit anderen Worten, daß ω so gewählt ist, daß (69) nur die beiden trivialen Nullösungen u_1 und u_2 besitzt, die einer Verschiebung längs der Rotationsachse und einer Drehung um diese entsprechen.

Bekanntlich hat das Gesamtpotential der betrachteten Konfiguration außerhalb von T und auf Σ den Wert

$$U(x,y,z) = \varkappa f \pi \bar{a}\bar{b}\bar{c} \int_{\nu}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\bar{a}^2+\lambda} - \frac{y^2}{\bar{b}^2+\lambda} - \frac{z^2}{\bar{c}^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2), \tag{70}$$

$$\varphi(\lambda) = (\bar{a}^2+\lambda)(\bar{b}^2+\lambda)(\bar{c}^2+\lambda),$$

wobei ν die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{\bar{a}^2+\bar{\nu}} + \frac{y^2}{\bar{b}^2+\bar{\nu}} + \frac{z^2}{\bar{c}^2+\bar{\nu}} = 1 \tag{71}$$

ist.

Man erkennt leicht, daß wir bei Bewegung von T weg längs der positiven x-Achse auf einen und nur einen Punkt $\mathfrak{P}(\mathfrak{x}, 0, 0)$ mit $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$

stoßen müssen, der dort einem Minimum des Gesamtpotentials entspricht. Ebenso finden wir auf der negativen x-Achse den entsprechenden Punkt $\overline{\mathfrak{P}}\,(-\mathfrak{x}, 0, 0)$. Da in diesen Punkten aus Symmetriegründen überdies $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ ist, verschwindet dort die Gesamtschwerkraft

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} = N, \qquad N \geqq 0, \tag{72}$$

((ν) ist die zu $N > 0$ gehörige Richtung der Normalen zu den Niveauflächen); wir haben es also mit singulären Punkten zu tun. Es bezeichne C_0 den Wert des Gesamtpotentials in $\mathfrak{P}$ bzw. $\overline{\mathfrak{P}}$. Wir betrachten die Niveaufläche S

$$U(x, y, z) = C_0; \tag{73}$$

der von ihr begrenzte Körper heiße T.

Wir beweisen zunächst, daß S ganz in dem Zylinder: $x^2 + y^2 \leqq \mathfrak{x}^2$, $-\mathfrak{z} \leqq z \leqq \mathfrak{z}$ enthalten ist, unter $\mathfrak{z}$ einen festen positiven Wert verstanden. Da augenscheinlich U außerhalb von Σ, wenn wir uns auf der z-Achse oder irgendeiner Parallelen zu ihr bewegen, mit wachsendem $|z|$ monoton abnimmt, so läßt sich ein solches $\mathfrak{z}$ gewiß angeben. Wir haben daher nur noch zu zeigen, daß U auf dem Kreis $x^2 + y^2 = \mathfrak{x}^2$, außer in $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$, stets kleiner als C_0 ausfällt. Wir fassen zu diesem Zwecke ν als Funktion von x, y und z auf und betrachten den Wert von ν im Punkte $(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2})$ des erwähnten Kreises. Wegen (71) erhalten wir

$$\frac{x^2}{\bar{a}^2 + \nu\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right)} + \frac{\mathfrak{x}^2 - x^2}{\bar{b}^2 + \nu\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right)} = 1 \tag{74}$$

und

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\bar{a}^2 + \nu(\mathfrak{x}, 0, 0)} = 1, \tag{75}$$

somit nach Subtraktion

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\bar{a}^2 + \nu(\mathfrak{x}, 0, 0)} - \frac{x^2}{\bar{a}^2 + \nu\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right)} - \frac{\mathfrak{x}^2 - x^2}{\bar{b}^2 + \nu\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right)} = 0, \tag{76}$$

oder

$$\mathfrak{x}^2\left(\frac{1}{\bar{a}^2 + \nu(\mathfrak{x}, 0, 0)} - \frac{1}{\bar{a}^2 + \nu\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right)}\right) + (\mathfrak{x}^2 - x^2)\left(\frac{1}{\bar{a}^2 + \nu\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right)} - \frac{1}{\bar{b}^2 + \nu\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right)}\right) = 0. \tag{77}$$

Ist $|x| < \mathfrak{x}$, so ist wegen $\bar{a} > \bar{b}$ der zweite Summand linker Hand negativ. Es muß daher der erste Summand positiv oder aber

$$\nu(\mathfrak{x}, 0, 0) < \nu\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right) \tag{78}$$

ausfallen. Weiterhin untersuchen wir den Integranden des Integrals in (70), einmal im Punkte $(\mathfrak{x}, 0, 0)$, dann im Punkte $\left(x, \sqrt{\mathfrak{x}^2 - x^2}, 0\right)$ mit $|x| < \mathfrak{x}$, beidemal für denselben Wert λ, und bilden die Differenz. Es ist

$$(79)\qquad \left(1-\frac{\mathfrak{x}^2}{\bar{a}^2+\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}-\left(1-\frac{x^2}{\bar{a}^2+\lambda}-\frac{\mathfrak{x}^2-x^2}{\bar{b}^2+\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$
$$=(\mathfrak{x}^2-x^2)\left(\frac{1}{\bar{b}^2+\lambda}-\frac{1}{\bar{a}^2+\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}>0.$$

Wegen (78) ist daher für $|x|<\mathfrak{x}$

$$(80)\qquad U(\mathfrak{x},0,0)-U\left(x,\sqrt{\mathfrak{x}^2-x^2},0\right)$$
$$=\varkappa f\pi\bar{a}\bar{b}\bar{c}\int\limits_{\nu(x,\sqrt{\mathfrak{x}^2-x^2},0)}^{\nu(\mathfrak{x},0,0)}\left(1-\frac{\mathfrak{x}^2}{\bar{a}^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$
$$+\int\limits_{\nu(x,\sqrt{\mathfrak{x}^2-x^2},0)}^{\infty}\left[\left(1-\frac{\mathfrak{x}^2}{\bar{a}^2+\lambda}\right)-\left(1-\frac{x^2}{\bar{a}^2+\lambda}-\frac{\mathfrak{x}^2-x^2}{\bar{b}^2+\lambda}\right)\right]\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}>0,$$

da wegen (75) und (79) die Integranden beider Integrale in (80) nicht negativ sein können, der Integrand des zweiten vielmehr sicher >0 ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Als zweites zeigen wir, daß in $T+S$, abgesehen von $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$, keine Punkte liegen, in denen die Gesamtschwerkraft gleich Null wird. Da $\frac{\partial U}{\partial z}$ nur in der Ebene $z=0$ verschwinden kann, können nur dort wegen (72) solche singulären Punkte liegen. In diesen Punkten gilt alsdann gewiß mit Rücksicht auf (71)

$$(81)\qquad \frac{\partial U}{\partial x}=-2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}x\int\limits_{\nu}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\bar{a}^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}+\omega^2x=0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}y\int\limits_{\nu}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\bar{b}^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}+\omega^2y=0.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial x}U(\mathfrak{x},0,0)=0$ ist

$$(82)\qquad \omega^2=2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}\int\limits_{\nu(\mathfrak{x},0,0)}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\bar{a}^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Daher muß $\frac{\partial U}{\partial y}$ dann und nur dann verschwinden, wenn entweder

$$(83)\qquad y=0$$

oder

$$(84)\qquad \omega^2-2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}\int\limits_{\nu(x,y,0)}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\bar{b}^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$
$$=2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}\left[\int\limits_{\nu(\mathfrak{x},0,0)}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\bar{a}^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}-\int\limits_{\nu(x,y,0)}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\bar{b}^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}\right]=0$$

ist. Soll nun, wie wir es ja verlangen, um die singulären Punkte zu finden, gleichzeitig $\frac{\partial U}{\partial x}$ verschwinden, so erhalten wir im Falle (83) die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$. Im Falle (84) ist

$$(85)\quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}\left[x\int\limits_{\nu(\mathfrak{x},0,0)}^{\infty}\frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} - x\int\limits_{\nu(x,y,0)}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\bar{a}^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}\right]$$

$$= 2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}x\int\limits_{\nu(x,y,0)}^{\infty}\left(\frac{1}{\bar{b}^2+\lambda}-\frac{1}{\bar{a}^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)}$$

gewiß nur dann gleich Null, wenn $x = 0$ ist. Bewegen wir uns nun von Σ ab längs der $+y$-Achse, so müssen wir dabei auf ein und nur ein Minimum des Gesamtpotentials stoßen, das nach allem Gesagten gerade in dem dort befindlichen singulären Punkte liegt. Da aber wegen (80)

$$(86)\qquad U(0,\mathfrak{x},0) < C_0$$

ist, d. h. außerhalb von S noch Punkte mit kleinerem Gesamtpotential auf der $+y$-Achse vorkommen, und da U dort von Σ ab bis zu diesem Minimum monoton abnimmt, so liegt dieses sicher außerhalb von $T+S$. Das gleiche gilt von dem entsprechenden, auf der $-y$-Achse liegenden singulären Punkte. Daher verschwindet nirgends in $T+S$, außer in $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$, die Gesamtschwerkraft. Da nun z. B. in allen Punkten, in denen die z-Achse die Schar der Niveauflächen durchstößt, die zu $N>0$ gehörige Normalenrichtung in das Innere der Flächen, d. h. auf $\mathsf{T}+\Sigma$ hin, weist, so muß dies wegen der Stetigkeit der Normalen in $T+S$ (außer in $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$), überall der Fall sein.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}$ den Wert von U auf Σ, so bilden die Niveauflächen $U(x,y,z) = C$ $(C_0 < C < \mathfrak{C})$ eine Schar ineinander geschachtelter, doppelpunktfreier, stetig gekrümmter, zu den drei Koordinatenebenen symmetrischer Flächen $S_\mathfrak{r}$, die Σ umschließen und von S umschlossen werden. Hierbei ist $\mathfrak{r}$ der Abstand des Punktes $\mathfrak{P}$ von $S_\mathfrak{r}$.

Wie verhält sich nun S in der Umgebung der singulären Punkte? Wie man leicht nachrechnet, ist wegen (82)

$$(87)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(\mathfrak{x},0,0) = \frac{4\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\sqrt{\varphi[\nu(\mathfrak{x},0,0)]}} = \alpha_0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(\mathfrak{x},0,0) = 2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}\int\limits_{\nu(\mathfrak{x},0,0)}^{\infty}\left(\frac{1}{\bar{a}^2+\lambda}-\frac{1}{\bar{b}^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = -\beta_0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}U(\mathfrak{x},0,0) = -2\pi\varkappa f\bar{a}\bar{b}\bar{c}\int\limits_{\nu(\mathfrak{x},0,0)}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\bar{c}^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} = -\gamma_0,$$

$$(\alpha_0>0,\ \beta_0>0,\ \gamma_0>0).$$

Da ferner die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von U und die partiellen Ableitungen erster Ordnung in $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ verschwinden, erhalten wir für $r \leqq r_0$ ($r^2 = (x-\mathfrak{x})^2 + y^2 + z^2$, r_0 hinreichend klein) in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ die Entwicklung

$$U(x,y,z) = C_0 + \frac{1}{2}\alpha_0(x-\mathfrak{x})^2 - \frac{1}{2}\beta_0 y^2 - \frac{1}{2}\gamma_0 z^2 + O(r^3). \tag{88}$$

Die Fläche S besitzt demnach in $\mathfrak{P}$ einen Berührungskegel, dessen Gleichung

$$\alpha_0(x-\mathfrak{x})^2 - \beta_0 y^2 - \gamma_0 z^2 = 0 \tag{89}$$

lautet. Für den Punkt $\overline{\mathfrak{P}}$ gelten die analogen Beziehungen. Die Fläche S ist daher, abgesehen von $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$, stetig gekrümmt und symmetrisch zu den drei Koordinatenebenen gelegen.

§ 2.

Existenzbeweis.

Die Ausgangskonfiguration ist bei unseren Betrachtungen der Bereich $\mathsf{T} \dotplus \Sigma$ samt den um ihn verlaufenden Niveauflächen. Die Fläche S stellt den Rand der Konfiguration dar. Auch hier wird unser Ziel sein, zwischen der gesuchten und der gegebenen Gleichgewichtsfigur eine topologische Abbildung herzustellen.

Es bezeichne zunächst $\mathfrak{r}^*$ eine Zahl im Intervall $0 < \mathfrak{r} < \mathfrak{l}$, wobei $\mathfrak{l}$ der Abstand des Punktes $\mathfrak{P}$ von Σ ist. Dieser Zahl ist in unserer üblichen Bezeichnungsweise die Niveaufläche $S_{\mathfrak{r}^*}$, die den Körper $T_{\mathfrak{r}^*}$ umschließt, zugeordnet. Wir fassen alsdann eine in $T - T_{\mathfrak{r}^*} + S + S_{\mathfrak{r}^*}$ erklärte Ortsfunktion $\chi(\mathfrak{r})$ ins Auge, die dort dieselben analytischen Eigenschaften wie die entsprechende, im ersten Kapitel eingeführte Funktion haben möge. Auch hier soll $\chi(0) = 0$ sein. Bezeichnen jetzt T_1 (Rand S_1) und $T_{\mathfrak{r}^*1}$ (Rand $S_{\mathfrak{r}^*1}$) die zu T und $T_{\mathfrak{r}^*}$ entsprechenden Gebiete, so soll auf den Niveauflächen $S_{\mathfrak{r}1}$ in $T_1 - T_{\mathfrak{r}^*1}$ die Dichte der neuen Verteilung den Wert $\alpha\chi(\mathfrak{r})$ ($\alpha > 0$, hinreichend klein), in $T_{\mathfrak{r}^*1} - \mathsf{T}_1$ den konstanten Wert $\alpha\chi(\mathfrak{r}^*)$ und in T_1 den konstanten Wert f haben, wobei T_1 (Rand Σ_1) dem Körper T entspricht. Wir erkennen aus alledem, daß wir nur die in $T_1 - T_{\mathfrak{r}^*1}$ verlaufenden Niveauflächen und die Fläche Σ_1 zu untersuchen haben. Zur Vereinfachung der Betrachtungen soll die Winkelgeschwindigkeit der gesuchten Konfiguration ebenfalls gleich ω angenommen werden.

Die topologische Abbildung des Bereiches $T - T_{\mathfrak{r}^*} + S + S_{\mathfrak{r}^*}$ auf $T_1 - T_{\mathfrak{r}^*1} + S_1 + S_{\mathfrak{r}^*1}$ werde auch hier durch eine wie im ersten Kapitel definierte Ortsfunktion ζ hergestellt mit

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right| \leqq \varepsilon_0, \quad |\zeta| \leqq \sqrt{3}\,\varepsilon_0 r, \tag{90}$$

unter ε_0 eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden. Entsprechend werde die Fläche Σ_1 auf Σ durch eine auf Σ erklärte, dort nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion Z bezogen mit

$$(91) \qquad |\mathsf{Z}|\left|\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial \eta}\right| \leqq \varepsilon_1, \quad (\varepsilon_1 > 0, \text{ hinreichend klein}),$$

unter ξ, η ein geeignetes Paar Gaußscher Parameter auf Σ verstanden.

In einem Punkt (X, Y, Z) oder, wie wir kurz sagen wollen, in σ auf Σ haben wir, unter τ' einen Punkt (x', y', z') in $\mathsf{T} + \Sigma$ verstanden,

$$(92) \quad U(\sigma) = \varkappa \int_{\mathsf{T}} f' \frac{d\tau'}{\mathsf{P}(\sigma, \tau')} + \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) = C(\mathrm{I}), \; d\tau' = dx'\, dy'\, dz',$$

$$[\mathsf{P}(\sigma, \tau')]^2 = (X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2.$$

In dem entsprechenden Punkte (X_1, Y_1, Z_1) oder σ_1 auf Σ_1 ist

$$(93) \quad U_1(\sigma_1) = \varkappa \int_{\mathsf{T}_1} f' \frac{d\tau_1'}{\mathsf{P}(\sigma_1, \tau_1')} + \varkappa\alpha \int_{T_1 - \mathsf{T}_1} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d\tau_1'}{\mathsf{P}(\sigma_1, \tau_1')} + \frac{\omega^2}{2}(X_1^2 + Y_1^2)$$

$$= C_1(\mathrm{I}), \; d\tau_1' = dx_1'\, dy_1'\, dz_1',$$

$$[\mathsf{P}(\sigma_1, \tau_1')]^2 = (X_1 - x_1')^2 + (Y_1 - y_1')^2 + (Z_1 - z_1')^2,$$

unter τ_1' den Punkt (x_1', y_1', z_1') in T_1 bzw. in $T_1 - \mathsf{T}_1$ verstanden. Aus (92) und (93) folgt in bekannter Weise für $\mathsf{Z}(\sigma)$ die Integro-Differentialgleichung

$$(94) \qquad \psi \mathsf{Z} + \int_{\Sigma} f'\, \mathsf{Z}' \frac{d\sigma'}{\mathsf{P}(\sigma, \sigma')}$$

$$= s - \frac{\omega^2}{2}(a^2 + b^2)\, \mathsf{Z}^2 - \alpha \int_{T_1 - \mathsf{T}_1} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d\tau_1'}{\mathsf{P}(\sigma_1, \tau_1')} - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots)$$

mit

$$(95) \qquad \varkappa\psi = \varkappa \frac{\partial}{\partial \bar{\nu}} \int_{\mathsf{T}} f' \frac{d\tau'}{\mathsf{P}(\sigma, \tau')} + \omega^2 (aX + bY)^{15}),$$

$$\mathfrak{W}^{(n)} = \varkappa \int_{\Sigma} \frac{K^{(n)}}{[\mathsf{P}(\sigma, \sigma')]^n} d\sigma',$$

unter Z' eine Abkürzung für $\mathsf{Z}(\sigma')$ und unter $K^{(n)}$ eine Form n-ten Grades der Variablen Z, Z', $\frac{\partial \mathsf{Z}'}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial \mathsf{Z}'}{\partial \eta'}$ verstanden; außerdem ist $s = C_1(\mathrm{I}) - C(\mathrm{I})$.

Wir finden weiter in einem Punkt (x, y, z) oder τ auf $S_{\mathfrak{r}}$ $(0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{r}^*)$

$$(96) \; U(\tau) = \varkappa \int_{\mathsf{T}} f' \frac{d\tau'}{\varrho} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C(\mathfrak{r}), \quad \varrho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

und in dem entsprechenden Punkte $(x_1, y_1, z_1,)$ oder τ_1 auf $S_{\mathfrak{r}1}$

$$(97) \quad U_1(x_1, y_1, z_1) = \varkappa \int_{\mathsf{T}_1} f' \frac{d\tau_1'}{\varrho_1} + \varkappa\alpha \int_{T_1 - \mathsf{T}_1} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d\tau_1'}{\varrho_1} + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + y_1^2) = C_1(\mathfrak{r}),$$

$$d\tau_1' = dx_1'\, dy_1'\, dz_1', \quad \varrho_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2 + (z_1 - z_1')^2.$$

---

15) Auch hier bedeutet $(\bar{\nu})$ die Außennormale.

Denkt man sich zwischen Σ und Σ_1 eine einparametrige Flächenschar Σ_t (Flächenelement $d\sigma_t$) durch die symbolische Beziehung $\Sigma + t(\Sigma_1 - \Sigma)$ geschaltet, entspricht also dem Punkt σ auf Σ der Punkt (X_t, Y_t, Z_t), oder σ_t auf Σ_t mit

$$X_t = X + at\,\mathsf{Z}, \quad Y_t = Y + bt\,\mathsf{Z}, \quad Z_t = Z + ct\,\mathsf{Z}, \tag{98}$$

und verstehen wir unter φ_t den Winkel zwischen der Normalen zu Σ in σ und der Normalen zu Σ_t in σ_t, so ist mit $\mathfrak{W}_1(x_1, y_1, z_1) = \int_{T_1} f' \frac{d\tau_1'}{\varrho_1}$ und

$$\mathfrak{W}(x, y, z) = \int_{T} f' \frac{d\tau'}{\varrho}$$

$$\begin{aligned} &\varkappa\,\mathfrak{W}_1(x_1, y_1, z_1) - \varkappa\,\mathfrak{W}(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x_1^2 + y_1^2) - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \\ &= \varkappa\,(\mathfrak{W}_1(x_1, y_1, z_1) - \mathfrak{W}(x_1, y_1, z_1)) + (U(x_1, y_1, z_1) - U(x, y, z)) \\ &= \varkappa \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \mathsf{Z}' \cos\varphi_t' \frac{d\sigma_t'}{\mathsf{P}(\tau_1, \sigma_t')} + \zeta \frac{\partial U}{\partial \bar{v}} + \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{v}^2} + \ldots, \end{aligned} \tag{99}$$

$$[\mathsf{P}(\tau_1, \sigma_t')]^2 = (x_1 - X_t')^2 + (y_1 - Y_t')^2 + (z_1 - Z_t')^2.$$

Aus (96) und (97) erhalten wir wegen (99) mit $\varkappa\,\psi = \frac{\partial U}{\partial \bar{v}}$ und $C_1(\mathfrak{r}) - C(\mathfrak{r}) = s(\mathfrak{r})$ die Integro-Differentialgleichung

$$\psi\zeta = s(\mathfrak{r}) - \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \mathsf{Z}' \cos\varphi_t' \frac{d\sigma_t'}{\mathsf{P}(\tau_1, \sigma_t')} - \varkappa \int_{T_1 - T_1} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d\tau_1'}{\varrho_1} - \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{v}^2} - \ldots \tag{100}$$

Lassen wir jetzt den Punkt (x, y, z) gegen $\mathfrak{P}$ rücken, so erhalten wir wegen (90) und $\psi(x, 0, 0) = 0$

$$0 = s(0) - \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \mathsf{Z}' \cos\varphi_t' \frac{d\sigma_t'}{\mathsf{P}(\mathfrak{P}, \sigma_t')} - \varkappa \int_{T_1 - T_1} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d\tau_1'}{{}_0\varrho_1}, \tag{101}$$

$$[\mathsf{P}(\mathfrak{P}, \sigma_t')]^2 = (x - X_t')^2 + Y_t'^2 + Z_t'^2, \quad {}_0\varrho_1^2 = (x - x_1')^2 + y_1'^2 + z_1'^2,$$

und daher schließlich

$$\begin{aligned} \psi\zeta = {} & h\mathfrak{r}^2 \mathfrak{f}(\mathfrak{r}) \\ & - \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \mathsf{Z}' \cos\varphi_t' \left(\frac{1}{\mathsf{P}(\tau_1, \sigma_t')} - \frac{1}{\mathsf{P}(\mathfrak{P}, \sigma_t')}\right) d\sigma_t' - \varkappa \int_{T_1 - T_1} \chi(\mathfrak{r}') \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{{}_0\varrho_1}\right) d\tau_1' \\ & - \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{v}^2} - \ldots, \end{aligned} \tag{102}$$

mit $h\mathfrak{r}^2 \mathfrak{f}(\mathfrak{r}) = s(\mathfrak{r}) - s(0)$. h ist ein hinreichend kleiner Parameter und $\mathfrak{f}(\mathfrak{r})$ eine für $0 \leqq \mathfrak{r} \leqq \mathfrak{r}^*$ vorgegebene, nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige Funktion.

Die homogene Integralgleichung

$$\psi \mathsf{Z} + \int_{\Sigma} f' \mathsf{Z}' \frac{d\sigma'}{\mathsf{P}(\sigma, \sigma')} = 0 \tag{103}$$

besitzt nach Voraussetzung nur die beiden trivialen Nullösungen u_1 und u_2. Wir setzen

$$\frac{1}{\mathsf{P}(\sigma, \sigma')} = \psi \psi' (u_1 u_1' + u_2 u_2') + N(\sigma, \sigma'), \quad \psi' = \psi(\sigma'), \tag{104}$$
$$u_1' = u_1(\sigma'), \; u_2' = u_2(\sigma')$$

und finden, da aus Symmetriegründen

$$\int_{\Sigma} f' \psi' u_1' \mathsf{Z}' d\sigma' = \int_{\Sigma} f' \psi' u_2' \mathsf{Z}' d\sigma' = 0 \tag{105}$$

ist,

$$\int_{\Sigma} f' \mathsf{Z}' \frac{d\sigma'}{\mathsf{P}(\sigma, \sigma')} = \int_{\Sigma} f' \mathsf{Z}' N(\sigma, \sigma') d\sigma'. \tag{106}$$

Nach bekannten Sätzen hat die Integralgleichung

$$\psi \mathsf{Z} + \int_{\Sigma} f' \mathsf{Z}' N(\sigma, \sigma') d\sigma' = 0 \tag{107}$$

keine Nullösungen mehr.

Wir beginnen nun mit den sukzessiven Approximationen. Die erste Näherung der Funktion $\mathsf{Z}(\sigma)$, $\overset{1}{\mathsf{Z}}(\sigma)$, bestimmen wir aus der Integro-Differentialgleichung

$$\psi \overset{1}{\mathsf{Z}} + \int_{\Sigma} f' \overset{1}{\mathsf{Z}}' N(\sigma, \sigma') d\sigma' = s - \frac{\omega^2}{2}(a^2 + b^2) \overset{1}{\mathsf{Z}}^2 - \alpha \int_{T - \overset{1}{\mathsf{T}}} \chi(\tau') \frac{d\tau'}{\mathsf{P}(\overset{1}{\sigma}, \tau')} \tag{108}$$
$$- \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots), \quad [\mathsf{P}(\overset{1}{\sigma}, \tau')]^2 = (\overset{1}{X} - x')^2 + (\overset{1}{Y} - y')^2 + (\overset{1}{Z} - z')^2,$$

unter $\overset{1}{\mathsf{T}}$ (Rand $\overset{1}{\Sigma}$) den durch $\overset{1}{\mathsf{Z}}(\sigma)$ definierten, in der Nachbarschaft von T gelegenen Körper und unter $(\overset{1}{X}, \overset{1}{Y}, \overset{1}{Z})$ den dem Punkt (X, Y, Z) entsprechenden Punkt auf $\overset{1}{\Sigma}$ verstanden.

Man erkennt leicht, daß aus den grundlegenden Betrachtungen Lichtensteins[16]) die Auflösbarkeit von (108) ohne weiteres folgt. Die Lösung $\overset{1}{\mathsf{Z}}(\sigma)$ ist eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Ortsfunktion auf Σ und in bezug auf s und α analytisch und regulär. Hierbei ist, wie man mit Hilfe der Theorie der Laméschen Funktionen ohne Mühe nachweisen kann, in der Potenzreihenentwicklung von $\overset{1}{\mathsf{Z}}$ nach s und α der Koeffizient von s in der Form

$$\frac{c}{\psi(\sigma)} \qquad (c \text{ eine bestimmte Konstante}) \tag{109}$$

[16]) Vgl. loc. cit. [1]), S. 36 ff.

darstellbar[17]). Wir können daher den Parameter s zu $\frac{1}{s}$ so bestimmen, daß die Beziehung

$$(114)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \overset{1}{Z}{}' \cos\varphi_t' \frac{d\sigma_t'}{\mathsf{P}(\tau,\sigma_t')} + \frac{\partial}{\partial x}\alpha \int_{T-\frac{1}{\dagger}} \chi(\mathfrak{r}')\frac{d\tau'}{\varrho}\right]_{(\mathfrak{x},0,0)} = 0$$

erfüllt ist. Das ist möglich, da der erste Summand in (114) in erster Näherung den Wert $\int_\Sigma f' \overset{1}{Z}{}' \frac{x'-\mathfrak{x}}{[\mathsf{P}(\mathfrak{P},\sigma')]^3}\, d\sigma'$ hat, $([\mathsf{P}(\mathfrak{P},\sigma')]^2 = (\mathfrak{x}-X')^2 + Y'^2 + Z'^2)$.

---

[17]) Es gilt nämlich der Satz: Läßt sich die Dichte einer einfachen Belegung auf einer Fläche Σ in eine nach Laméschen Produkten fortschreitende Reihe von der Form

$$(110)\qquad \frac{4\pi R_1^0 S_1^0}{3\psi}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k M_k N_k$$

entwickeln, so folgt für das Potential V_0 dieser Belegung

$$(111)\qquad V_0 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\pi\beta_k}{2n+1} R_k^0 S_k^0 M_k N_k.$$

Hierin bezeichnen R_k, M_k, N_k die Laméschen Funktionen erster Art, S_k die Lamésche Funktion zweiter Art. R_k und S_k nehmen auf Σ die dort konstanten Werte R_k^0 und S_k^0 an. — Der Koeffizient $\mathfrak{K}(\sigma)$ des Gliedes mit s in der erwähnten Potenzreihenentwicklung von $\overset{1}{Z}(\sigma)$ ist aus

$$(112)\qquad \psi(\sigma)\mathfrak{K}(\sigma) + \int_\Sigma f'\mathfrak{K}(\sigma')N(\sigma,\sigma')d\sigma' = 1$$

(vgl. loc. cit.[1]), S. 61 f.) bestimmbar. Wie man weiß, hat diese Gleichung eine und nur eine Lösung. Wir verifizieren durch Einsetzen, daß diese durch den Ausdruck (109) gegeben ist. Da wegen gewisser Hilfssätze der Potentialtheorie (vgl. L. Lichtenstein, loc. cit.[8]), ferner V. Garten, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper, Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 684—745, insbesondere S. 724) für $\mathfrak{K}(\sigma)$ eine Entwicklung der Art (110) erlaubt ist, so haben wir hier, wenn wir den Ausdruck (109) in der Form (110) schreiben, $\beta_0 = \frac{3\mathfrak{c}}{4\pi R_1^0 S_1^0}$, $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = 0$. Wegen (107) und (111) ist alsdann $\int V_0 = \int_\Sigma \frac{\mathfrak{c}}{\psi'} N(\sigma,\sigma')\, d\sigma' = \int_\Sigma \frac{\mathfrak{c}}{\psi'}\frac{d\sigma'}{\mathsf{P}(\sigma,\sigma')}$ $= \frac{3\mathfrak{c}\int S_0^0}{R_1^0 S_1^0}$. Setzen wir jetzt

$$(113)\qquad \mathfrak{c} = \frac{R_1^0 S_1^0}{(R_1^0 S_1^0 + 3\int S_0^0)},$$

so ist in der Tat (112) mit $\mathfrak{K}(\sigma) = \frac{\mathfrak{c}}{\psi}$ erfüllt. Vgl. dazu P. Appell, Traité de mécanique rationelle, tome 4ième, Paris (1921), chapitre IV u. VII.

Die Ortsfunktion $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ in $T - T_{\tau^*} + S + S_{\tau^*}$ erhalten wir nunmehr aus der Integro-Differentialgleichung

$$(115)\qquad \psi\zeta = \mathfrak{r}^2 h\,\overset{1}{\mathfrak{f}}(\mathfrak{r}) - \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \overset{1}{Z}' \cos\varphi_t' \left(\frac{1}{\mathsf{P}(\tau,\sigma_t')} - \frac{1}{\mathsf{P}(\mathfrak{P},\sigma_t')}\right) d\sigma_t'$$
$$- \alpha \int_{T-\overset{1}{\mathsf{T}}} \chi(\mathfrak{r}') \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{{}_0\varrho}\right) d\tau' - \frac{1}{2}\zeta \frac{{}^2\partial^2 U}{\partial \bar{r}^2} - \cdots$$

Auch diese Gleichung wird in bekannter Weise durch sukzessive Approximationen gelöst. Man findet ohne Schwierigkeit, daß die Lösung $\overset{1}{\zeta}(\tau)$ eine in dem angegebenen Bereich nebst (eventuell mit Ausnahme von $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$) ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion ist, die sich bei Annäherung an $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ wie r verhält. Übrigens sind die partiellen Ableitungen auch in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ beschränkt.

Es sei $\overset{1}{T}$ (Rand $\overset{1}{S}$) das durch die Transformation $(x, y, z) \to (\overset{1}{x}, \overset{1}{y}, \overset{1}{z})$ $\left(\overset{1}{x} = x + a\overset{1}{\zeta},\ \overset{1}{y} = y + b\overset{1}{\zeta},\ \overset{1}{z} = z + c\overset{1}{\zeta}\right)$ entstandene Gebiet und es bezeichnen $\overset{1}{\varrho}$ und ${}_0\overset{1}{\varrho}$, diejenigen Werte, die man erhält, wenn man in ϱ_1 und ${}_0\varrho_1$ ζ durch $\overset{1}{\zeta}$ ersetzt. Wir bestimmen nunmehr die zweite Approximation $\overset{2}{Z}(\sigma)$ aus

$$(116)\qquad \psi \overset{2}{Z} + \int_\Sigma f' \overset{2}{Z}' N(\sigma,\sigma') d\sigma' = s - \frac{\omega^2}{2}(a^2 + b^2)\overset{2}{Z}^2$$
$$- \alpha \int_{\overset{1}{T}-\overset{2}{\mathsf{T}}} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d\overset{1}{\tau}'}{\mathsf{P}(\overset{2}{\sigma}, \overset{1}{\tau}')} - \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(3)} + \ldots),$$

unter $\overset{2}{\mathsf{T}}$ (Rand $\overset{2}{\Sigma}$) das durch $\overset{2}{Z}$ definierte Gebiet verstanden. Auch $\overset{2}{\dot{Z}}(\sigma)$ ist eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Ortsfunktion auf Σ. In der Entwicklung von $\overset{2}{Z}(\sigma)$ nach s und α bestimmen wir jetzt s zu $\overset{2}{s}$ derart, daß die Forderung

$$(117)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}} \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \overset{2}{Z}' \cos\varphi_t' \frac{d\sigma_t'}{\mathsf{P}(\overset{1}{\tau}, \sigma_t')} + \frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}} \alpha \int_{\overset{1}{T}-\overset{2}{\mathsf{T}}} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d\overset{1}{\tau}'}{\overset{1}{\varrho}}\right]_{(\mathfrak{x},\,0,\,0)} = 0$$

erfüllt ist. Aus der Integro-Differentialgleichung

$$(118)\qquad \psi\zeta = \mathfrak{r}^2 h\,\overset{1}{\mathfrak{f}}(\mathfrak{r}) - \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \overset{2}{Z}' \cos\varphi_t' \left(\frac{1}{\mathsf{P}(\overset{1}{\tau}, \sigma_t')} - \frac{1}{\mathsf{P}(\mathfrak{P}, \sigma_t')}\right) d\sigma_t'$$
$$- \alpha \int_{\overset{1}{T}-\overset{2}{\mathsf{T}}} \chi(\mathfrak{r}') \left(\frac{1}{\overset{1}{\varrho}} - \frac{1}{{}_0\overset{1}{\varrho}}\right) d\overset{1}{\tau}' - \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{r}^2} - \cdots$$

erhalten wir die Ortsfunktion $\overset{2}{\zeta}(\tau)$ mit ganz denselben Eigenschaften wie $\overset{1}{\zeta}(\tau)$.

Allgemein bestimmen wir $\overset{n}{Z}(\sigma)$ auf Σ aus der Integro-Differentialgleichung

$$(119)\quad \psi \overset{n}{Z} + \int_{\Sigma} f' \overset{n}{Z}' N(\sigma,\sigma')\, d\sigma' = s - \frac{\omega^2}{2}(a^2+b^2)\overset{n}{Z}^2 - \alpha \int_{\substack{n-1\\ T\\ -\\ T}}^{\substack{n\\ \\ \\ }} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d^{n-1}_{\tau'}}{\mathsf{P}\left(\overset{n}{\sigma}, \overset{n-1}{\tau'}\right)}$$
$$- \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{B}^{(2)} + \mathfrak{B}^{(3)} + \ldots),$$

worauf die Beziehung

$$(120)\quad \left[\frac{\partial}{\partial^{n-1}_{x}} \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \overset{n}{Z}' \cos\varphi_t' \frac{d\sigma_t'}{\mathsf{P}\left(\overset{n-1}{\tau}, \sigma_t'\right)} + \frac{\partial}{\partial^{n-1}_{x}} \alpha \int_{\substack{n-1\\ T\\ -\\ T}}^{\substack{n\\ \\ \\ }} \chi(\mathfrak{r}') \frac{d^{n-1}_{\tau}}{\varrho^{n-1}}\right]_{(\mathfrak{x},\,0,\,0)} = 0$$

den Parameter s zu $\overset{n}{s}$ bestimmt. Die Ortsfunktion $\overset{n}{\zeta}(\tau)$ in $T - T_{\mathfrak{r}^*} + S + S_{\mathfrak{r}^*}$ wird uns durch

$$(121)\quad \psi\zeta = \mathfrak{r}^2 h\, \mathfrak{f}(\mathfrak{r}) - \int_0^1 dt \int_{\Sigma_t} f' \overset{n}{Z}' \cos\varphi_t' \left(\frac{1}{\mathsf{P}\left(\overset{n-1}{\tau}, \sigma_t'\right)} - \frac{1}{\mathsf{P}(\mathfrak{P}, \sigma_t')}\right) d\sigma_t'$$
$$- \alpha \int_{\substack{n-1\\ T\\ -\\ T}}^{\substack{n\\ \\ \\ }} \chi(\mathfrak{r}') \left(\frac{1}{\varrho^{n-1}} - \frac{1}{{}_0\varrho^{n-1}}\right) d^{n-1}_{\tau'} - \frac{1}{2}\zeta^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{r}^2} - \ldots$$

geliefert. Mit

$$(122)\quad \Omega = \text{obere Grenze}\left\{\left|\frac{\partial^{n-1}\zeta}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial^{n-1}\zeta}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial^{n-1}\zeta}{\partial z}\right|\right\} \text{ in } T - T_{\mathfrak{r}^*} + S + S_{\mathfrak{r}^*},$$
$$|\overset{n-1}{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\Omega r$$

erhalten wir, wie man leicht nachprüft, aus (119)

$$(123)\quad |\overset{n}{Z}|, \left|\frac{\partial \overset{n}{Z}}{\partial \xi}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{Z}}{\partial \eta}\right| \leqq \gamma_1(\alpha + \alpha\Omega) \quad (\gamma_1 \text{ konstant, wie später } \gamma_2 \ldots)$$

und wegen (120) aus (121)

$$(124)\quad \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \overset{n}{\zeta}}{\partial z}\right| \leqq \gamma_2(h + \alpha + \alpha\Omega), \quad |\overset{n}{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\gamma_2(h + \alpha + \alpha\Omega) r.$$

Der Prozeß unserer sukzessiven Approximationen ist daher beliebig fortsetzbar, wenn nur α und h hinreichend klein sind. Nehmen wir ferner an, daß in $T - T_{\mathfrak{r}^*} + S + S_{\mathfrak{r}^*}$

$$(125)\quad \left|\frac{\partial(\overset{n}{\zeta} - \overset{n-1}{\zeta})}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial(\overset{n}{\zeta} - \overset{n-1}{\zeta})}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial(\overset{n}{\zeta} - \overset{n-1}{\zeta})}{\partial z}\right| \leqq \mathcal{O},$$
$$|\overset{n}{\zeta} - \overset{n-1}{\zeta}| \leqq \sqrt{3}\,\mathcal{O} r, \quad \mathcal{O} \leqq 2\Omega$$

gilt, so findet sich in dem genannten Bereich

$$(126)\quad |\overset{n+1}{\mathsf{Z}}-\overset{n}{\mathsf{Z}}|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\xi}(\overset{n+1}{\mathsf{Z}}-\overset{n}{\mathsf{Z}})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\eta}(\overset{n+1}{\mathsf{Z}}-\overset{n}{\mathsf{Z}})\right| \leqq \gamma_3(\alpha\mathfrak{O}+\alpha\mathfrak{O}\Omega);$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\overset{n+1}{\zeta}-\overset{n}{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial y}(\overset{n+1}{\zeta}-\overset{n}{\zeta})\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial z}(\overset{n+1}{\zeta}-\overset{n}{\zeta})\right| \leqq \gamma_4(\alpha\mathfrak{O}+\alpha\mathfrak{O}\Omega),$$

$$|\overset{n+1}{\zeta}-\overset{n}{\zeta}| \leqq \gamma_4\sqrt{3}(\alpha\mathfrak{O}+\alpha\mathfrak{O}\Omega)r.$$

Durch diese Ungleichheiten ist die Konvergenz der sukzessiven Näherungen gesichert[18]). Es zeigt sich, daß

$$(127)\qquad \mathsf{Z}=\overset{1}{\mathsf{Z}}+(\overset{2}{\mathsf{Z}}-\overset{1}{\mathsf{Z}})+\ldots=\lim_{n\to\infty}\overset{n}{\mathsf{Z}}$$

in der Tat der Gleichung (94) und

$$(128)\qquad \zeta=\overset{1}{\zeta}+(\overset{2}{\zeta}-\overset{1}{\zeta})+\ldots=\lim_{n\to\infty}\overset{n}{\zeta}$$

der Gleichung (102) genügt und die am Anfange verlangten Eigenschaften besitzt. Die in (127) und (128) angegebenen unendlichen Reihen konvergieren für hinreichend kleine Werte von α und h unbedingt und gleichmäßig. Außerdem läßt sich für hinreichend kleine Werte von α und h erreichen, daß Σ_1 ganz im Inneren von S_{τ^*1} verläuft. Übrigens sind dann diese Lösungen Z und ζ auch die einzigen unseres Problems.

Ergänzende Bemerkungen.

Es ist leicht einzusehen, daß sich in unseren eben durchgeführten Betrachtungen nicht viel ändern würde, wenn statt von einem Jacobischen Ellipsoid von einem Maclaurinschen Ellipsoid, d. h. einem Rotationsellipsoid ausgegangen würde. Alle vorhandenen singulären Punkte bilden hier eine Kreislinie in der x, y-Ebene. Die durch diese verlaufende Niveaufläche S wird als Randfläche aufgefaßt; sie verläuft ganz im Endlichen. Daher bietet das Kraftfeld keine neuen Schwierigkeiten dar. Man kann leicht nachprüfen, daß der Meridianschnitt von S in der x, z-Ebene in den zwei singulären Punkten Doppeltangenten besitzt. Der Existenzbeweis für eine wie im vorigen Paragraphen präzisierte Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeiten in der Nachbarschaft der gegebenen Konfiguration läßt sich ohne neuen Schwierigkeiten führen.

---

[18]) Vgl. L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin (1931) S. 6 ff. Dort wird eine Integralgleichung durch sukzessive Approximationen gelöst. Die Frage der Konvergenz ist dort auf das Bestehen von zu (123) bzw. (124) und (126) analogen Ungleichheiten zurückgeführt.

Weiterhin erkennt man ohne große Mühe, daß man, ähnlich wie in den unter [3]) und [7]) genannten Arbeiten, lineare Reihen konstruieren kann. Im Anschluß an die im ersten Kapitel betrachteten Gleichgewichtsfiguren kommen wir so zu einer stetigen Schar, die von zwei getrennten Körpern zu einer zusammenhängenden Figur führt, die sich am Ende der linearen Reihe befindet und einen konischen Punkt auf der Oberfläche besitzt. Entsprechend können wir bei dem Urkörper mit zwei konischen Punkten eine nach „innen" zu verlaufende stetige Schar von Gleichgewichtsfiguren finden. Ferner braucht auch nicht für alle Figuren der linearen Reihen die Randdichte zu verschwinden; sie muß allerdings in der Nachbarschaft der singulären Figur einer gewissen in loc. cit. [7]), S. 137 angegebenen Ungleichheitsbeziehung genügen. Es würden bei allen diesen Betrachtungen nirgends neue Schwierigkeiten auftreten.

(Eingegangen am 17. November 1933.)

Über eine Transformation der Faberschen Polynomreihen.

Von

Paul Heuser in Darmstadt.

Durch konforme Abbildung kann man, wie G. Faber[1]) gezeigt hat, einem regulär-analytisch begrenzten, schlichten, einfachzusammenhängenden Gebiet G der z-Ebene eine Folge von Polynomen $p_n(z)$ so zuordnen, daß jede in G reguläre analytische Funktion $F(z)$ eindeutig in eine Reihe

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z) \tag{1}$$

entwickelt werden kann.

Im folgenden ergibt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen den Summen

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z)$$

und

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n^*(z)$$

zweier Faberreihen, die gleiche Koeffizienten haben, aber nach den Gliedern zweier Faberscher Polynomsysteme fortschreiten, die zu verschiedenen Gebieten G und G^* gehören. Da die Potenzreihen spezielle Faberreihen sind, lassen sich hiermit die weitgehenden Analogien begründen, die zwischen diesen beiden Reihenklassen bestehen[2]). Weiter ergibt sich eine besonders übersichtliche Integraldarstellung der Faberschen Polynome[2a]), und hieraus die Tatsache, daß ein und dasselbe Polynom in verschiedenen Faberschen Polynomsystemen auftreten kann. Solche Polynome erweisen sich als invariant gegenüber gewissen Transformationen, die unserer Betrachtung zugrunde liegen.

---

[1]) G. Faber, Über polynomische Entwicklungen, Math. Annalen 57 (1903), S. 389—408. G. Faber, Über polynomische Entwicklungen II, Math. Annalen 64 (1907), S. 116—135. G. Faber, Über Tschebyscheffsche Polynome, Journ. f. Math. 150 (1919), S. 79—106.

[2]) Vgl. G. Faber, Math. Annalen 57, bes. S. 398 u. 399.

[2a]) Wie ich nachträglich feststelle, findet sich dieselbe Integraldarstellung bereits bei G. Szegö, Über einen Satz von A. Markoff, Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 53.

I.

Es bedeute C die durchweg regulär-analytische Randkurve des ganz im Endlichen liegenden Gebietes G. $J(C) \equiv G$ und $A(C)$ seien die beiden offenen Gebiete, in die sie die z-Ebene zerlegt; die durch Hinzunahme von C abgeschlossenen Gebiete seien $\overline{J(C)}$ und $\overline{A(C)}$. Weiter bilde

$$z = \psi(t) = \frac{1}{t} + c_0 + c_1 t + \dots \tag{2}$$

das Gebiet $A(C)$ derart auf das Kreisgebiet $|t| < r$ ab, daß die Punkte $z = \infty$ und $t = 0$ sich entsprechen. Dadurch sind die Zahlen $c_0, c_1, \dots$ sowie r eindeutig bestimmt. Die zu C gehörigen Polynome $p_n(z)$ ergeben sich nach Faber[3]) aus einer erzeugenden Funktion. Es ist

$$\frac{t \cdot \psi'(t)}{z - \psi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(z)\, t^n. \tag{3}$$

Die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $F(z)$ sind gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L\curvearrowleft} F(\psi(t))\, t^{n-1}\, dt, \tag{4}$$

wobei die Integrationskurve L so zu wählen ist, daß sie den Punkt $t = 0$ umgibt und $F(\psi(t))$ auf ihr regulär ist. Wegen der über C gemachten Voraussetzung ist eine solche Wahl stets möglich. Weiter sei C^* eine beliebige, durchweg regulär-analytische geschlossene Kurve in einer z^*-Ebene. $p_n^*(z^*)$ sei das System der zu C^* gehörigen Faberschen Polynome. Analog wie oben sei $z^* = \psi^*(t)$ diejenige Funktion von der Form (2), die das Gebiet $A(C^*)$ konform auf $|t| < r^*$ abbildet. Schließlich bilde $z = \varphi(z^*)$ das Gebiet $A(C)$ der z-Ebene auf das Gebiet $A(C^*)$ der z^*-Ebene ab, so daß $z = \infty$ und $z^* = \infty$ sich entsprechen und $\varphi'(\infty)$ reell ist.

Nun bilden wir das Integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L^*\nearrow} \frac{F(\psi(\tilde{z}^*))}{z^* - \tilde{z}^*}\, d\tilde{z}^* = F^*(z^*). \tag{5}$$

Als Integrationskurve L^* wählen wir das in $J(C^*)$ gelegene Bild des Kreises $|t| = r^* + \varepsilon$, das durch $z^* = \psi^*(t)$ vermittelt wird. Bei hinreichend kleinem ε ist nämlich L^* durchweg regulär-analytisch, und $F(\varphi(z^*))$ auf L^* regulär. Dann stellt das Integral eine in $J(L^*)$ und, da ε beliebig klein gewählt werden kann, sogar in $J(C^*)$ reguläre analytische Funktion $F^*(z^*)$ dar.

---

[3]) Die Normierung stimmt mit der von Faber, Journ. f. Math. 150, gewählten überein.

Bezeichnen wir die Veränderliche wieder mit z, so kann $F^*(z)$ in eindeutiger Weise nach den zu C^* gehörigen Faberschen Polynomen $p_n^*(z)$ entwickelt werden:

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* p_n^*(z). \tag{6}$$

Hierbei ist

$$a_n^* = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=r^*+\varepsilon} F^*(\psi^*(t))\, t^{n-1}\, dt. \tag{7}$$

Nach dem Satze über die Laurent-Trennung einer in einem Ringgebiet regulären Funktion läßt sich $F(\varphi(z^*))$ durch das Cauchysche Integral (5) in zwei Teile, $F^*(z^*)$ und $R^*(z^*)$ zerlegen, so daß

$$F(\varphi(z^*)) \equiv F^*(z^*) + R^*(z^*) \tag{8}$$

ist. $F^*(z^*)$ ist regulär in $\overline{J(L^*)}$, $R^*(z^*)$ ist regulär in $\overline{A(L^*)}$. Das Integral (7) bleibt daher ungeändert, wenn wir den Integranden um die für $|t| \leqq r^* + \varepsilon$ reguläre Funktion $R^*(\psi^*(t))\, t^{n-1}$ vermehren. Also wird

$$a_n^* = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=r^*+\varepsilon} (F^*(\psi^*(t)) + R^*(\psi^*(t)))\, t^{n-1}\, dt,$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=r^*+\varepsilon} F(\varphi(\psi^*(t)))\, t^{n-1}\, dt.$$

Nun ist aber

$$\varphi(\psi^*(t)) \equiv \psi(\alpha \cdot t),$$

wenn man mit α das Radienverhältnis $\frac{r}{r^*}$ bezeichnet. Setzt man dann noch $\alpha \cdot t = \tau$ und $\varepsilon \cdot \alpha = \varepsilon_1$, so wird

$$a_n^* = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\tau|=r+\varepsilon_1} F(\psi(\tau))\, \tau^{n-1}\, d\tau, \tag{9}$$

$$= \frac{1}{\alpha^n} \cdot a_n.$$

Für Fabersche Reihen gilt demnach der folgende Transformationssatz:

„*$F(z)$ sei eine im Inneren der durchweg regulär-analytischen, geschlossenen Kurve C reguläre analytische Funktion mit der zu C gehörigen Faberreihe*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z).$$

$z = \varphi(z^*)$ bilde das Gebiet $A(C)$ derart auf das Äußere einer beliebigen, regulär-analytischen Kurve C^* ab, daß $z = \infty$ in $z^* = \infty$ übergeht und

$\varphi'(\infty)$ reell ist. Bedeuten dann $p_n^*(z)$ die zu C^* gehörigen Faberschen Polynome, so hat die Funktion

$$F^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \frac{F(\varphi(z^*))}{z - z^*} dz^*$$

die Faberentwicklung

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha^n} p_n^*(z),$$

wo α das Radienverhältnis $\frac{r}{r^*}$ der den Kurven C und C^* durch Abbildungen von der Form (2) entsprechenden Kreise W und W^* der t-Ebene bedeutet."

Umgekehrt seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z) = F(z)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(z) = F^*(z)$ zwei Faberreihen, die nach den zu C bzw. C^* gehörigen Polynomen fortschreiten, und die genau in $J(C)$ bzw. $J(C^*)$ konvergieren. $\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ sei gleich r. Dann folgt aus der grundlegenden Faberschen Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|p_n(z)|} = \frac{1}{|t|},$$

daß die den Kurven C und C^* durch Abbildungen von der Form (2) entsprechenden Kreise W und W^* beide den Radius r haben. Demnach wird, da $\alpha = 1$ ist,

$$F^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \frac{F(\varphi(z^*))}{z - z^*} dz^*.$$

II.

Wenden wir diesen Transformationssatz auf $p_n(z)$ und $p_n^*(z)$ an, so liefert er einen Zusammenhang zwischen Faberschen Polynomen gleich hohen Grades, die zu verschiedenen Gebieten gehören. Man hat nämlich:

(10) $$\frac{1}{\alpha^n} p_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} \frac{p_n(\varphi(z^*))}{z - z^*} dz^*$$

und analog:

(10a) $$\alpha^n p_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{p_n^*(\chi(\tilde{z}))}{z - \tilde{z}} d\tilde{z},$$

wenn man mit

$$z^* = \chi(z) = d_{-1} \cdot z + d_0 + \frac{d_1}{z} + \dots$$

die Umkehrfunktion zu $z = \varphi(z^*)$ bezeichnet.

Zu einer besonders übersichtlichen Integraldarstellung der Faberschen Polynome gelangt man, wenn man bei der obigen Transformation als Kurve C^* einen Kreis mit dem Mittelpunkt $z = 0$ wählt. Es wird dann

$$p_n^*(z) \equiv z^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und man hat

$$p_n(z) = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C} \frac{(\chi(\tilde{z}))^n}{z - \tilde{z}}\, d\tilde{z}. \tag{11}$$

Bis auf den von der Normierung herrührenden Faktor $\frac{1}{\alpha^n}$ ist also $p_n(z)$ gleich dem Hauptteil der Entwicklung von $(\chi(z))^n$ nach Potenzen von $\frac{1}{z}$.

Da die Potenzen z^n mit den Faberschen Polynomen der Kreise $|z| = \text{const}$ übereinstimmen, kann man den Transformationssatz auch auf Potenzreihen anwenden. Er ordnet der für $|z| < \frac{1}{r^*}$ konvergenten Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

die Faberreihe

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \frac{F(\varphi(z^*))}{z - z^*}\, dz^*$$

zu. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit, zahlreiche für Potenzreihen gültige Sätze auf Faberreihen zu übertragen. Als Beispiele seien die Sätze über überkonvergente Abschnittsfolgen genannt, sowie solche Sätze, die aus der Folge der Koeffizienten auf die Natur der Singularitäten schließen.

Aus der Darstellung (11) des Faberschen Polynoms $p_n(z)$ folgt, daß dieses nur von den n ersten Koeffizienten der Abbildungsfunktionen $\chi(z)$ abhängt. Daraus schließt man, daß ein und dasselbe Polynom in mehr als einem Faberschen Polynomsystem auftritt. Derartige Fälle lassen sich leicht konstruieren. Betrachten wir eine Potenzreihe, die in einer Umgebung von $z = \infty$, mit Ausnahme dieses Punktes selbst, konvergiert und die sich von der Entwicklung der Funktion $\chi(z)$ erst von dem Glied mit $\frac{1}{z^{n+1}}$ ab unterscheidet, so wird ihre Summe $\chi_1(z)$ eine Umgebung $z = \infty$ konform und schlicht auf eine Umgebung von $z^* = \infty$ abbilden. Nun sei W ein Kreis der z-Ebene mit dem Mittelpunkt $z = 0$, auf dem $\chi(z)$ und $\chi_1(z)$ regulär sind, und dessen abgeschlossenes Außengebiet durch beide Funktionen schlicht abgebildet wird. Zu den ihm vermöge

der Abbildungen durch χ und χ_1 entsprechenden regulär-analytischen und doppelpunktfreien geschlossenen Kurven Γ und Γ_1 gehören dann Fabersche Polynomsysteme, deren n erste Glieder übereinstimmen. Für ein Polynom $P(z)$, das sich aus diesen n Polynomen ganz und linear zusammensetzt, besteht infolgedessen die auch an sich bemerkenswerte Invarianz

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_1} \frac{P(\varphi(z^*))}{z - z^*} dz^*, \tag{12}$$

wenn $z = \varphi(z^*)$ in der im Transformationssatz festgelegten Art und Weise $A(\Gamma)$ auf $A(\Gamma_1)$ abbildet.

(Eingegangen am 2. Januar 1934.)